

## 内 容 简 介

本书是学习数学分析课程的一本极好的辅导书,分上、下两册,编写顺序与一般的数学分析教材同步,本册内容包括实数与数列极限,函数、极限与连续性,导数与微分,微分中值定理与利用导数研究函数,不定积分,定积分及其应用等,在归纳内容、释疑解难的基础上,用大量、全面的例题为读者诠释概念,演绎技巧,举证方法,通过学习它,读者可以循序渐进地融会知识,理解概念,熟悉技巧和掌握方法.因此,读者有必要认真学习本书,通过它化教科书上的抽象概念为自己的切实有用的知识.

希望本书能成为你的良师益友,欢迎你选用本系列丛书.

# 前 言

数学分析是高等学校数学专业的主要基础课程. 对初学者来说, 数学分析课程的概念难懂, 方法抽象, 解题难以入手, 思维难以展开. 为了帮助大家学好数学分析, 解决学习中的困难, 指导学习的方法, 提高学习的效率, 我们编写了本书.

为了使读者能循序渐进, 扎扎实实地从理论上、思维上、方法上掌握数学分析的概念与内容、方法及技巧, 我们采用与教材同步、以章节为序的方法, 对问题逐个地进行讨论、分析、举例、归纳, 在提升知识、解析疑难的基础上, 用大量的例题为读者诠释概念、演绎技巧、举证方法, 使读者通过例题边分析、边练习、边讨论、边总结, 从而更好地融会知识、理解概念、熟悉技巧和掌握方法, 将书本上的抽象理论真正化为自己的切实有用的知识, 更为后续课程打下良好的数学基础.

本书不像某些重点讲授方法的参考书那样, 以问题归类来讨论方法. 因此希望读者学习以后, 自己做一些归纳提高、整理加工的工作, 以增强自己的实践能力.

数学分析的题目浩如烟海, 编者只能选编其中一小部分比较普遍的和比较典型的献给读者. 有些例题是为了举证方法而选用的, 因此不一定是该例的最佳方法. 本书以较多的篇幅来讨论命题的论证, 这是数学分析的理论基础, 但也用了相当篇幅来叙述计算方法, 希望能以此提高读者的计算和证明能力.

本书的编写出版得到了华中科技大学出版社的热心支持和帮



助,在此向他们表示衷心的感谢.在本书写作中,曾参阅了一些作者关于数学分析问题的著作,本人借此向他们表示诚挚的谢意.

由于经验不足和学识所限,本书的失误之处望同行和读者热心指正.

孙清华 孙 昊

2003 年 1 月

# 目 录

第一章 实数与数列极限 .....	(1)
第一节 实数的表示与实数系的连续性 .....	(1)
主要内容 .....	(1)
疑难解析 .....	(2)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(4)
一、最大数与最小数 .....	(4)
二、上、下确界的命题 .....	(5)
第二节 实数的四则运算与实数系的基本性质 .....	(10)
主要内容 .....	(10)
第三节 不等式 .....	(11)
主要内容 .....	(11)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(12)
第四节 数列极限与收敛数列的性质 .....	(21)
主要内容 .....	(21)
疑难解析 .....	(22)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(23)
一、关于数列极限的概念 .....	(23)
二、数列极限的求解 .....	(29)
三、数列极限的证明 .....	(35)
四、应用斯笃兹定理求数列极限 .....	(38)
五、用其它方法求数列极限 .....	(41)
第五节 数列极限存在的条件 .....	(43)
主要内容 .....	(43)
疑难解析 .....	(44)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(45)
第六节 数列的上、下极限 .....	(57)
主要内容 .....	(57)

方法、技巧与典型例题分析 .....	(58)
<b>第二章 函数、极限与连续性</b> .....	(63)
第一节 映射与函数 .....	(63)
主要内容 .....	(63)
疑难解析 .....	(65)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(66)
第二节 函数的极限 .....	(79)
主要内容 .....	(79)
疑难解析 .....	(82)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(82)
第三节 两个重要极限 无穷小量与无穷大量 .....	(92)
主要内容 .....	(92)
疑难解析 .....	(93)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(94)
一、两个重要极限 .....	(95)
二、无穷小量与无穷大量 .....	(101)
第四节 连续函数 .....	(109)
主要内容 .....	(109)
疑难解析 .....	(111)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(112)
一、连续函数概念的命题 .....	(112)
二、闭区间上的连续函数 .....	(119)
三、一致连续性问题 .....	(125)
<b>第三章 导数与微分</b> .....	(131)
第一节 导数概念与求导法则 .....	(131)
主要内容 .....	(131)
疑难解析 .....	(132)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(134)
一、导数概念的命题 .....	(134)
二、求导法则的运用 .....	(139)
第二节 隐函数与参数方程确定函数的导数 .....	(151)

主要内容 .....	(151)
疑难解析 .....	(152)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(153)
一、隐函数的导数 .....	(153)
二、参数方程确定函数的导数 .....	(156)
第三节 微分与高阶导数 .....	(161)
主要内容 .....	(161)
疑难解析 .....	(162)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(163)
一、微分问题 .....	(163)
二、高阶导数与高阶微分问题 .....	(167)
第四章 微分中值定理与利用导数研究函数 .....	(177)
第一节 微分中值定理 .....	(177)
主要内容 .....	(177)
疑难解析 .....	(178)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(179)
一、罗尔定理的应用 .....	(179)
二、拉格朗日中值定理的应用 .....	(188)
三、柯西中值定理的应用 .....	(198)
第二节 洛必达法则 .....	(205)
主要内容 .....	(205)
疑难解析 .....	(207)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(208)
第三节 泰勒公式 .....	(219)
主要内容 .....	(219)
疑难解析 .....	(221)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(222)
一、利用泰勒公式计算极限 .....	(222)
二、函数的泰勒展开式或麦克劳林展开式 .....	(226)
三、证明不等式或等式及其它 .....	(228)
第四节 函数的单调性与极值 .....	(238)
主要内容 .....	(238)

疑难解析 .....	(239)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(241)
一、函数的单调性问题 .....	(241)
二、函数的极值与最值问题 .....	(250)
第五节 函数的凸性与拐点 .....	(255)
主要内容 .....	(255)
疑难解析 .....	(256)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(257)
第五章 不定积分 .....	(266)
第一节 不定积分的概念与基本公式 .....	(266)
主要内容 .....	(266)
疑难解析 .....	(267)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(268)
一、不定积分的基本概念 .....	(268)
二、用基本公式与性质计算不定积分 .....	(272)
第二节 换元积分法与分部积分法 .....	(276)
主要内容 .....	(276)
疑难解析 .....	(277)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(279)
一、换元积分法的应用 .....	(279)
二、分部积分法的应用 .....	(298)
第三节 有理函数与无理函数的不定积分 .....	(313)
主要内容 .....	(313)
疑难解析 .....	(316)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(317)
一、有理函数的不定积分 .....	(317)
二、三角函数有理式的不定积分 .....	(324)
三、无理函数的不定积分 .....	(330)
第六章 定积分及其应用 .....	(338)
第一节 定积分概念与可积分条件 .....	(338)
主要内容 .....	(338)

疑难解析 .....	(341)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(342)
一、定积分的概念 .....	(342)
二、函数的可积性 .....	(346)
第二节 定积分的性质 .....	(354)
主要内容 .....	(354)
疑难解析 .....	(355)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(357)
一、利用定积分求极限 .....	(357)
二、定积分的估值与比较 .....	(363)
三、求定积分的极限 .....	(368)
四、关于定积分的等式和不等式的证明 .....	(376)
五、利用定积分研究函数 .....	(387)
第三节 变上限积分与定积分的计算 .....	(392)
主要内容 .....	(392)
疑难解析 .....	(394)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(395)
一、变动上限积分函数 .....	(396)
二、定积分的计算与证明 .....	(408)
第四节 非正常积分(反常积分) .....	(435)
主要内容 .....	(435)
疑难解析 .....	(438)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(439)
一、非正常积分的计算 .....	(439)
二、非正常积分敛散性的判别 .....	(445)
三、非正常积分的其它问题 .....	(459)
第五节 定积分的应用 .....	(462)
主要内容 .....	(462)
疑难解析 .....	(466)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(467)
一、定积分在几何中的应用 .....	(467)
二、定积分在物理中的应用 .....	(483)

# 第一章 实数与数列极限

## 第一节 实数的表示与实数系的连续性

### 主要内容

#### 一、实数的表示

1. 全体有理数与全体无理数所构成的集合称为实数集合,记作

$$\mathbf{R} = \{x | x \text{ 是有理数或无理数} \}.$$

2. 任何一个实数都可用无尽小数表示. 其中任何有理数都可以表示为无尽循环小数(有尽小数视作后面有无尽个零的循环小数),任何无理数都可以表示为无尽小数.

3. 实数分为非负实数与负实数. 任何非负实数大于任何负实数.

对任意两个实数  $a$  和  $b$ , 必有且只有以下三种情形之一(称为三歧性):

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b.$$

4. 有尽小数在实数系中处处稠密.

设  $a$  和  $b$  是实数,  $a < b$ , 则存在有尽小数  $c$ , 满足  $a < c < b$ .

5. 实数  $x$  的绝对值定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{若 } x \text{ 是非负实数,} \\ -x, & \text{若 } x \text{ 是负实数.} \end{cases}$$

$-x$  称为  $x$  的相反数, 零的相反数是零本身.

MAG 94/12

## 二、实数系的连续性

1. 对于实数集合中的任何的分割 (Dedekind)  $A|A'$ , 存在产生这个分割的实数  $\beta$ , 这个数  $\beta$ : 1) 或是下类  $A$  中的最大数; 2) 或是上类  $A'$  中的最小数.

此性质称为实数系的连续性, 或完备性、密接性.

2. 实数集  $\mathbf{R}$  的各种子集, 简称为数集.

设  $E$  为一非空数集, 若  $\exists M \in \mathbf{R}$ , 使  $\forall x \in E$ , 有  $x \leq M$ , 则称  $M$  为  $E$  的一个上界; 若  $\exists m \in \mathbf{R}$ , 使  $\forall x \in E$ , 有  $x \geq m$ , 则称  $m$  为  $E$  的一个下界. 既有上界又有下界的数集  $E$ , 称为有界集. 即

$E$  为有界集  $\Leftrightarrow \exists X > 0$ , 使  $\forall x \in E$ , 有  $|x| \leq X$ .

$E$  的上界中的最小数, 称为数集  $E$  的上确界, 记作  $\sup E$ ;  $E$  的下界中的最大数, 称为数集  $E$  的下确界, 记作  $\inf E$ .

3. 确界存在定理 —— 实数系连续性定理 非空有上界的数集必有上确界, 非空有下界的数集必有下确界.

4. 非空有界数集的上(下)确界是惟一的.

## 疑难解析

1. 数集的最大数与最小数同数集的上确界与下确界有什么关系?

答 设  $E$  为一数集, 如果  $\exists \beta \in E$ , 使  $\forall x \in E$ , 有  $x \leq \beta$ , 则称  $\beta$  是  $E$  的最大数; 如果  $\exists \alpha \in E$ , 使  $\forall x \in E$ , 有  $x \geq \alpha$ , 则称  $\alpha$  是  $E$  的最小数.

与  $E$  的上、下界定义比较, 知其区别在于:  $\alpha$  与  $\beta$  是属于  $E$  的, 而  $E$  的上、下界是属于  $\mathbf{R}$  的, 可能不属于  $E$ . 所以, 上、下确界可能不属于  $E$ .

$E$  的上界的全体不可能有最大数, 一定有最小数, 即上确界;  $E$  的下界的全体不可能有最小数, 一定有最大数, 即下确界.

2. 为什么要引入确界概念?



答 因为,对有限数集  $E$ ,必有最大数  $\max E$  和最小数  $\min E$ ,它们分别为数集  $E$  的上边边界和下边边界.但当数集为无限集时,最大数与最小数就有可能不存在.因此,需要找出一个数作为它的上边(下边)边界.

若无限数集上方(下方)无界,则没有上边(下边)边界.若无限数集有上(下)界,且存在最大(小)数,则此最大(小)数即为此数集的上边(下边)边界;若不存在最大(小)数,则可以用其上(下)确界来作为上边(下边)边界.如无限数集  $\{n/(n+1) | n \in \mathbf{N}\}$  没有最大数,但有上界,则其上确界  $\sup\{n/(n+1) | n \in \mathbf{N}\} = 1$  可作为数集的上边边界.

另外,求开区间  $(a, b)$  长度的问题也要利用上、下确界来解决.因为,开区间  $(a, b)$  是有界的无限集,没有最大数,也没有最小数,也有上确界  $b$  和下确界  $a$ .以  $a$  和  $b$  作为数集的下边边界与上边边界,就可求得开区间  $(a, b)$  的长度  $d$  为

$$\begin{aligned} d &= \sup\{x | a < x < b\} - \inf\{x | a < x < b\} \\ &= \sup\{y - x | \forall x, y \in (a, b), y > x\} = b - a. \end{aligned}$$

由上可见,引入确界概念可以更好地描述实数的连续性,并且给证明问题带来许多方便.

### 3. 试叙述上(下)确界的等价命题.

答 数集  $E$  的上确界  $\sup E = \beta$  有三种等价命题,它们是:

$$(1) \begin{cases} \forall x \in E \Rightarrow x \leq \beta; \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in E \Rightarrow \beta - \varepsilon < x_0. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \forall x \in E \Rightarrow x \leq \beta; \\ \forall x < \beta, \exists x_0 \in E \Rightarrow x < x_0. \end{cases}$$

(3)  $\beta = \min\{y | \forall x \in E, x \leq y\}$ ,即数集  $E$  的上确界  $\beta$  是数集  $E$  的上界所构成数集中的最小数.

类似地,可写出下确界  $\inf E = \alpha$  的等价命题.

## 方法、技巧与典型例题分析

本节的例题绝大多数是证明题,因此必须对概念十分熟悉和理解.证明可以从正面进行,也可以从反面进行.一般,当问题从正面不易入手时,可考虑利用反证法证明.

### 一、最大数与最小数

**例 1** 设  $c$  为正整数,而不为整数的平方,且分割  $A|B$  确定实数  $c$ . 其中  $B$  类包含所有合于  $b^2 > c$  的正有理数  $b$ ,  $A$  类包含所有其余的有理数. 求证:  $A$  类中无最大数,  $B$  类中无最小数.

**证** 在  $A$  类中任取有理数  $a > 0$ , 则  $a^2 < c$ . 设  $r = c - a^2$ , 选取有理数  $x$ , 使  $0 < x < 1$ , 且  $(a + x)^2 < c$ . 这在  $0 < x < \frac{r}{2a + 1}$  时即可实现, 因为

$$c - (a + x)^2 = r - 2ax - x^2 > r - (2a + 1)x > 0.$$

取  $\delta = \min\left\{1, \frac{c - a^2}{2a + 1}\right\}$ , 则在  $(0, \delta)$  中任取一有理数  $x$ , 都有  $(a + x)^2 < c$ , 所以  $a + x$  属于  $A$  类, 且  $a + x > a$ , 即  $A$  类中无最大数.

在  $B$  类中任取一有理数  $b$ , 设  $s = b^2 - c$ . 选取有理数  $y$ , 使  $0 < y < b$ , 且  $(b - y)^2 > c$ . 这在  $0 < y < \frac{s}{2b}$  时即可实现, 因为

$$(b - y)^2 - c = s - 2by + y^2 > s - 2by > 0,$$

取  $\epsilon = \min\left\{b, \frac{b^2 - c}{2b}\right\}$ , 则在  $(0, \epsilon)$  中任取一有理数  $y$ , 有  $(b - y)^2 > c$ , 所以  $b - y$  属于  $B$  类, 且  $b - y < b$ , 即  $B$  类中无最小数.

**例 2** 设  $A = \{x | x \leq 0 \text{ 或 } x > 0, \text{ 且 } x^2 < 2, x \in \mathbf{Q}\}$ ,

$$B = \{x | x > 0, \text{ 且 } x^2 > 2, x \in \mathbf{Q}\},$$

其中  $\mathbf{Q}$  为有理数. 证明:  $A$  类中无最大数,  $B$  类中无最小数.

**证** 利用例 1, 令  $c = 2$ , 即可证出. 请读者一试.

**例 3** 设  $a \leq c \leq b$ , 证明:  $|c| \leq \max\{|a|, |b|\}$ .

证 因为

$$\begin{aligned}\max\{|a|, |b|\} &\geq |b| \geq b \geq c, \\ -\max\{|a|, |b|\} &\leq -|a| \leq a \leq c,\end{aligned}$$

所以

$$|c| \leq \max\{|a|, |b|\}.$$

例 4 设  $\max\{|a+b|, |a-b|\} < 1/2$ , 求证:

$$|a| < 1/2, |b| < 1/2.$$

证 用反证法. 设  $|a| > 1/2, |b| > 1/2$ .

(1) 设  $0 < a < b$ , 则

$$1/2 < |a| < |a+b|, 1/2 < |b| < |a+b|,$$

从而  $\max\{|a+b|, |a-b|\} > \frac{1}{2}$ , 引出矛盾.

(2) 设  $a < b < 0$ , 则

$$1/2 < |a| < |a+b|, 1/2 < |b| < |a+b|,$$

从而  $\max\{|a+b|, |a-b|\} > 1/2$ , 引出矛盾.

(3) 设  $a < 0 < b$ , 则

$$1/2 < |a| < |a-b|, 1/2 < |b| < |a-b|,$$

从而  $\max\{|a+b|, |a-b|\} > 1/2$ , 引出矛盾.

综上所述可知, 必有  $\max\{|a+b|, |a-b|\} < 1/2$ .

例 5 证明:  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , 有

$$\max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\} \geq 1/2.$$

证 用反证法. 设  $\max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\} < 1/2$ .

由例 4 知, 此时有  $|a| < 1/2, |b| < 1/2$ , 因而

$$|1-b| \geq 1 - |b| > 1/2,$$

与所设矛盾. 故命题必成立.

## 二、上、下确界的命题

例 6 证明: 若数集  $E$  的上(下)确界存在, 则它必惟一存在.

证 用反证法. 设  $p$  和  $q$  是  $E$  的上确界, 且  $p \neq \epsilon_0 = (q-p)/2$ , 则  $\forall x \in E, x \leq p < q - (q-p)/2 = q - \epsilon_0$ , 这与  $q$  为  $E$  的上确界矛盾. 故必有  $p = q$ , 即数集  $E$  的上确界是惟一的.

类似可证,数集  $E$  的下确界也是惟一的.

例 7 设  $E = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right\}$ , 求  $\sup E, \inf E$ , 问:  $\min E$  与  $\max E$  是否存在?

解 因为  $\forall n, 1 - \frac{1}{n} < 1$ , 且  $\forall$  任  $\varepsilon > 0, \exists n_0$ , 使  $1 - \frac{1}{n_0} \in \left\{ 1 - \frac{1}{n} \right\}, 1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$ , 仅当  $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ , 所以,  $\sup E = 1$ .

类似可证,  $\inf E = \frac{1}{2}$ .

由  $E = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \right\}$  是单调增加的知,  $\min E = \frac{1}{2}, \max E$  不存在.

例 8 设  $E = \{x | x \in \mathbf{Q}, \text{且 } x^2 < 2, x > 0\}$ , 证明:  $E$  有上界, 但在  $\mathbf{Q}$  内没有上确界.

证  $E$  有上界是显然的. 例如, 2 就是  $E$  的一个上界.

用反证法证明  $E$  在  $\mathbf{Q}$  内无上确界.

设  $E$  在  $\mathbf{Q}$  内有上确界,  $\sup E = \frac{n}{m} (m, n \in \mathbf{N}^+, \text{且 } m, n \text{ 互质})$ , 则有  $1 < \left( \frac{n}{m} \right)^2 < 3$ . 因为有理数的平方不可能等于 2, 就出现下列两种可能.

(1)  $1 < \left( \frac{n}{m} \right)^2 < 2$ . 若记  $2 - \left( \frac{n}{m} \right)^2 = t$ , 则  $0 < t < 1$ . 令  $r = \frac{n}{6m}t$ , 有  $\frac{n}{m} + r > 0$ , 且  $\frac{n}{m} + r \in \mathbf{Q}$ .

由于  $r^2 = \frac{n^2}{36m^2}t^2 < \frac{t}{18}$ , 且  $\frac{2n}{m}r = \frac{n^2}{3m^2}t < \frac{2}{3}t$ , 得

$$\left( \frac{n}{m} + r \right)^2 - 2 = r^2 + \frac{2n}{m}r - t < 0.$$

由此可知,  $\frac{n}{m} + r \in \mathbf{Q}$ , 与  $\frac{n}{m}$  是  $\mathbf{Q}$  的上确界矛盾.

(2)  $2 < \left( \frac{n}{m} \right)^2 < 3$ . 若记  $\left( \frac{n}{m} \right)^2 - 2 = t$ , 则  $0 < t < 1$ . 令  $r =$

$\frac{n}{6m}t$ , 有  $\frac{n}{m} - r > 0, \frac{n}{m} - r \in \mathbf{Q}$ .

由于  $\frac{2n}{m}r = \frac{n^2}{3m^2}t < t$ , 得

$$\left(\frac{n}{m} - r\right)^2 - 2 = r^2 - \frac{2n}{m} + t > 0.$$

由此可知,  $\frac{n}{m} - r$  也是  $\mathbf{Q}$  的上界, 与  $\frac{n}{m}$  是  $\mathbf{Q}$  的上确界矛盾.

综上所述知,  $E$  在  $\mathbf{Q}$  内无上确界.

例 9 设  $E = \{x | x^2 < 2, x \in \mathbf{Q}\}$ , 验证:

$$\sup = \sqrt{2}, \quad \inf = -\sqrt{2}.$$

证 因为  $\forall x \in E$ , 由  $x^2 < 2$  可得  $x < \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}$  是  $E$  的一个上界. 又取任  $a < \sqrt{2}$  知, 依有理数集的稠密性, 在  $(a, \sqrt{2})$  中一定存在有理数  $x'$ , 使  $(x')^2 < 2$ , 从而知  $x' \in E$ , 且  $a < x' \Rightarrow a$  不是  $E$  的上界. 于是, 依定义知  $\sup E = \sqrt{2}$ .

类似可验证,  $\inf E = -\sqrt{2}$ .

注意 例 9 与例 8 并不矛盾. 例 8 是指  $E$  在  $\mathbf{Q}$  内无上、下确界, 即确界定理在  $\mathbf{Q}$  内不成立.

例 10 设  $\{-x\}$  是一数集, 所含数是与  $x \in \{x\}$  符号相反的数, 证明:

$$(1) \inf\{-x\} = -\sup\{x\}; \quad (2) \sup\{-x\} = -\inf\{x\}.$$

证 (1) 设  $\sup\{x\} = b$ ,  $b$  为有限实数. 因而,  $\forall x$  数集中的所有  $x$ , 有  $x \leq b$ ; 又对任给的  $\varepsilon > 0$ , 数集中必有  $x$ , 使  $x > b - \varepsilon$ .

由于  $b \geq x$ , 故  $-b \leq -x$ ; 又  $\exists x$ , 使  $x > b - \varepsilon$  则必  $\exists -x$ , 使  $-x < -b + \varepsilon$ . 因为数集  $\{-x\}$  具有上述性质, 所以

$$\inf\{-x\} = -b = -\sup\{x\}.$$

同理可证  $b = +\infty$  的情形.

(2) 类似可证,  $\sup\{-x\} = -\inf\{x\}$ .

例 11 设有数集  $A, B$ , 若  $E = A \cup B$ , 证明:

$$(1) \sup E = \max\{\sup A, \sup B\};$$

$$(2) \inf E = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

证 (1) 若  $A, B$  中至少有一个无上界, 则  $E$  也无上界, 等式变为  $+\infty = +\infty$ .

若  $A, B$  都有上界, 并设  $E$  的上界为  $\sup E$ , 则由  $E = A \cup B, x \in A$  (或  $x \in B$ )  $\Rightarrow x \in E$ . 于是,  $x \leq \sup E$ , 即数  $\sup E$  是数集  $A$  (或  $B$ ) 的一个上界, 而数  $\sup A$  (或  $\sup B$ ) 是  $A$  (或  $B$ ) 的最小上界. 故有  $\sup A$  (或  $\sup B$ )  $\leq \sup E$ . 从而证得

$$\sup E \geq \max\{\sup A, \sup B\}.$$

又由  $\forall x \in E$ , 有  $x \in A$  (或  $x \in B$ )  $\Rightarrow x \leq \sup A$  (或  $x \leq \sup B$ ), 即  $x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$ . 从而证得

$$\sup E \leq \max\{\sup A, \sup B\}.$$

综合上面两个不等式, 知  $\sup E = \max\{\sup A, \sup B\}$  成立.

(2) 类似可证.

例 12 设  $\{x+y\}$  为所有  $x+y$  这些和的集合, 其中  $x \in \{x\}$  及  $y \in \{y\}$ , 证明:

$$(1) \inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\};$$

$$(2) \sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}.$$

证 (1) 考虑下确界为有限的情形.

设  $\inf\{x\} = a, \inf\{y\} = b$ . 由定义知,  $a \leq x$ , 有  $\forall$  任  $\epsilon > 0, \exists x$  使  $x < a + \frac{\epsilon}{2}; b \leq y$ , 且  $\forall$  任  $\epsilon > 0, \exists y$ , 使  $y < b + \frac{\epsilon}{2}$ . 从而知, 对于集  $\{x\}$  和  $\{y\}$  中的  $x$  和  $y$ , 恒有  $a + b \leq x + y$ , 又  $x + y < a + b + \epsilon$ , 故  $\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$  成立.

(2) 类似可证. 只考虑上确界为有限的情形.

例 13 设  $\{xy\}$  为所有  $xy$  乘积的集合, 其中  $x \in \{x\}, y \in \{y\}$ , 且  $x \geq 0, y \geq 0$ . 证明等式:

$$(1) \inf\{xy\} = \inf\{x\} \cdot \inf\{y\};$$

$$(2) \sup\{xy\} = \sup\{x\} \cdot \sup\{y\}.$$

证 (1) 设下确界为有限值,  $\inf\{x\} = a, \inf\{y\} = b$ . 由定义知  $x \geq a \geq 0, y \geq b \geq 0$ , 且  $\forall \epsilon > 0, \exists x \in \{x\}, y \in \{y\}$ , 使得  $x < a + \frac{\epsilon}{a+b+1}, y < b + \frac{\epsilon}{a+b+1}$ , 所以,  $xy \geq ab$ . 又数集  $\{x, y\} \ni$  数  $x, y$ , 使

$$\begin{aligned} xy &< \left(a + \frac{\epsilon}{a+b+1}\right) \left(b + \frac{\epsilon}{a+b+1}\right) \\ &= ab + \frac{(a+b)\epsilon}{a+b+1} + \frac{\epsilon^2}{(a+b+1)^2}, \end{aligned}$$

所以, 当  $\epsilon < 1$  时,  $xy < ab + \epsilon$ . 即证得

$$\inf\{xy\} = \inf\{x\}\inf\{y\}.$$

(2) 类似可证. 但要考虑上确界为无穷大和有限值两种情形. 特别是, 若  $\{x\}$  仅含元素 0, 而  $\sup\{y\} = +\infty$ , 则  $\sup\{xy\} = \sup\{x\} \cdot \sup\{y\}$  不成立.

例 14 设  $A, B \subseteq \mathbf{R}$ , 是非空有界集, 证明:

$$(1) A \subseteq B \Rightarrow \inf B \leq \inf A \leq \sup B;$$

(2) 如果  $\forall a \in A, \forall b \in B, |a - b| < \epsilon$ , 则

$$|\sup A - \sup B| \leq \epsilon, \quad |\inf A - \inf B| \leq \epsilon.$$

证 (1) 依定义,  $\forall x \in A, \inf A \leq x \leq \sup A$ , 又因为  $A \subseteq B$ , 所以,  $\forall x \in A, x \geq \inf B$ , 即  $\inf A \geq \inf B$ .

又  $\forall x \in A, x \leq \sup A \leq \sup B$ , 故命题成立.

(2) 依定义,  $\forall x \in A, \inf A \leq x \leq \sup A; \forall x \in B, \inf B \leq x \leq \sup B$ . 不妨设  $x_0 = \inf A, x_1 = \sup A, x_2 = \inf B, x_3 = \sup B$ , 则由  $\forall a \in A, b \in B, |a - b| < \epsilon$ , 可得出

$$|x_2 - x_0| \leq \epsilon, \quad |x_3 - x_1| \leq \epsilon.$$

即  $|\sup A - \sup B| \leq \epsilon, \quad |\inf A - \inf B| \leq \epsilon.$

## 第二节 实数的四则运算与实数系的基本性质

### 主要内容

1. 设  $a$  和  $b$  为实数, 则存在惟一实数  $u$ , 使得对于满足条件:  $\alpha \leq a \leq \alpha', \beta \leq b \leq \beta'$  的任何有尽小数  $\alpha, \alpha'$  和  $\beta, \beta'$ , 都有  $\alpha + \beta \leq u \leq \alpha' + \beta'$ , 于是实数  $u$  称为实数  $a$  与实数  $b$  的和, 记作  $a + b$ .

实数  $a$  与实数  $b$  的差定义为  $a$  与  $-b$  之和, 即  $a - b = a + (-b)$ .

2. 设  $a, b$  为非负实数, 则存在唯一实数  $v$ , 使得对于满足条件:  $0 \leq \alpha \leq a \leq \alpha', 0 \leq \beta \leq b \leq \beta'$  的任何有尽小数  $\alpha, \alpha'$  和  $\beta, \beta'$ , 都有  $\alpha\beta \leq v \leq \alpha'\beta'$ , 于是实数  $v$  称为非负实数  $a$  与实数  $b$  的乘积, 记作  $ab$ .

任意实数  $a$  与实数  $b$  的乘积

$$ab = \begin{cases} |a||b|, & \text{如果 } a, b \text{ 同号,} \\ -|a||b|, & \text{如果 } a, b \text{ 异号.} \end{cases}$$

3. 实数集  $\mathbf{R}$  是域. 在实数集上定义了加法与乘法, 且满足:

- (1) 加法交换律  $\forall x, y \in \mathbf{R}, x + y = y + x$ .
- (2) 加法结合律  $\forall x, y, z \in \mathbf{R}, (x + y) + z = x + (y + z)$ .
- (3) 存在零元素  $0$ , 使  $x + 0 = x$ .
- (4) 存在负元素  $-x$ , 使  $x + (-x) = 0$ .
- (5) 乘法交换律  $x \cdot y = y \cdot x$ .
- (6) 乘法结合律  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ .
- (7) 存在单位元素  $1$ , 使  $x \cdot 1 = x$ .
- (8) 存在逆元素  $x^{-1}$ , 使  $x \cdot x^{-1} = 1$ .
- (9) 乘法分配律  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ .



4. 实数域是全序域, 满足:

(1) 三歧性  $\forall x, y \in \mathbf{R}$ , 下列三式中有且仅有一式成立:

$$x = y, \quad x < y, \quad x > y.$$

(2) 传递性  $a < b, \quad b < c \Rightarrow a < c.$

(3) 顺序性  $a < b \Rightarrow a + c < b + c.$

$$a < b, \quad c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c.$$

### 第三节 不 等 式

#### 主 要 内 容

1. 三角形不等式 设  $a, b$  为任意实数, 则

$$|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|,$$

$$|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|.$$

2. 伯努利(Bernoulli) 不等式 设  $x > -1, n \in \mathbf{N}^+, n \geq 2$ , 则

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

3. 柯西(Cauchy) 不等式 设  $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n$  为两组实数, 则

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right).$$

4. 平均值不等式 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为  $n$  个正实数, 则

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

当且仅当所有  $x_i$  都相等时, 等号成立.

5. 赫尔德(Hölder) 不等式 设实数  $p, q$  满足  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , 且  $a_i, b_i$  为非负实数, 则

$$\text{当 } p > 1 \text{ 时, } \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\text{当 } p < 1 \text{ 时, } \sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

仅当  $a_i$  与  $b_i$  成比例时, 等号成立.

6. 闵可夫斯基(Minkowski) 不等式 对任意的实数  $r \neq 0, 1; a_i, b_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 有

$$\text{当 } r > 1 \text{ 时, } \left( \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^r \right)^{\frac{1}{r}} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^r \right)^{\frac{1}{r}},$$

$$\text{当 } r < 1 \text{ 时, } \left( \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^r \right)^{\frac{1}{r}} \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i^r \right)^{\frac{1}{r}} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

仅当  $a_i$  与  $b_i$  成比例时, 等号成立.

## 方法、技巧与典型例题分析

在数学分析课程中, 不等式是证明许多定理与公式的工具; 而数学分析中的一些定理和公式又可导出许多不等式. 不等式表达了许多数学分析问题的结果, 而不等式的证明又蕴涵着许多数学分析的技巧, 所以掌握不等式与不等式的应用对学习数学分析是十分重要的.

### 例 1 证明三角形不等式

$$|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

证 因为  $-|a| \leq a \leq |a|, -|b| \leq b \leq |b|$ ,  
所以  $-(|a| + |b|) \leq (a + b) \leq |a| + |b|$ ,  
即  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .

将式中  $b$  改为  $-b$ , 上式仍然成立, 所以

$$|a - b| \leq |a| + |b|.$$

由于  $|a| = |(a - b) + b|$ ,

因此  $|a| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$ .

将式中  $b$  改为  $-b$ , 上式仍然成立, 所以

$$|a| - |b| \leq |a + b|.$$

综上所述, 即得三角形不等式

$$|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

(1) 由于  $|a - b| = |b - a| \geq |b| - |a| \geq -(|a| - |b|)$ ,

$$|a + b| = |b + a| \geq |b| - |a| \geq -(|a| - |b|),$$

所以得到绝对值不等式:

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

(2) 利用数学归纳法, 可以将  $|a + b| \leq |a| + |b|$  推广到  $n$  个实数的情形, 即

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

**例 2** 证明不等式

$$|x + x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \geq |x| - (|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|).$$

**证** 因为, 由三角形不等式, 有

$$|x + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)| \geq |x| - |x_1 + x_2 + \cdots + x_n|,$$

$$\text{又 } |x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|,$$

$$\text{所以 } |x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \geq |x| - (|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|).$$

**例 3** 证明伯努利不等式

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \quad x > -1.$$

**证** 用数学归纳法. 当  $n = 1$  时, 上式成立. 设对  $n - 1$ , 有  $(1 + x)^{n-1} \geq 1 + (n - 1)x$  成立, 则

$$\begin{aligned} (1 + x)^n &= (1 + x)^{n-1}(1 + x) \geq [1 + (n - 1)x](1 + x) \\ &= 1 + (n - 1)x + x + (n - 1)x^2 \geq 1 + nx, \end{aligned}$$

即对一切自然数  $n$ , 当  $x \geq -1$  时, 有

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

**例 4** 设  $n \in \mathbf{N}$ , 证明:

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \geq 2.$$

证 利用伯努利不等式  $(1+x)^n \geq 1+nx$ , 有

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{n-1}, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n},$$

因为  $\frac{n}{n-1} - \frac{n+1}{n} = \frac{n^2 - n^2 + 1}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} > 0, n \geq 2$ . 所以

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

例 5 设实数  $a, b$  满足  $|a| < 1, |b| < 1$ . 证明:

$$\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1.$$

证 若要不等式成立, 应有

$$-1 < \frac{a+b}{1+ab} < 1,$$

即式  $1 - \frac{a+b}{1+ab} > 0$  和  $1 + \frac{a+b}{1+ab} > 0$  应同时成立.

因为  $|a| < 1, |b| < 1$ , 所以  $ab < 1 \Rightarrow 1+ab > 0$ , 将上述两式化为

$$1+ab-a-b = (1-a)(1-b) > 0,$$

$$1+ab+a+b = (1+a)(1+b) > 0,$$

显然, 当  $|a| < 1, |b| < 1$  时, 上两式成立, 从而所证不等式成立.

例 6 证明柯西不等式: 设  $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n$  为两组实数, 则

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right).$$

证法 1 用配方法. 由

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{j=1}^n y_j^2 - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{j=1}^n x_j y_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^2 y_j^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_i x_j y_j \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (x_i y_j - x_j y_i)^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

当  $x_i y_j = x_j y_i$  时, 等号成立.

**证法 2** 用二次三项式的判别式法. 由于

$$0 \leq \sum_{i=1}^n (x_i t + y_i)^2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) t^2 + 2 \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) t + \sum_{i=1}^n y_i^2,$$

所以, 判别式

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \leq 0.$$

从而所证命题成立.

**例 7** 设  $y_1, y_2, \dots, y_n$  是实数,  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0$ . 又  $x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq y_1 + y_2 + \dots + y_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , 证明:  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$ .

**证** 令  $x_{n+1} = 0$ , 以  $x_k - x_{k+1}$  乘不等式两边可得

$$\begin{aligned}
&(x_k - x_{k+1})(x_1 + x_2 + \dots + x_k) \\
&\leq (x_k - x_{k+1})(y_1 + y_2 + \dots + y_k).
\end{aligned}$$

对  $k$  作 1 到  $n$  的和, 得

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 \leq \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

两边平方, 利用柯西不等式结论, 得

$$\left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n y_k^2 \right),$$

即

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 \leq \sum_{k=1}^n y_k^2.$$

**例 8** 证明平均值不等式: 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为  $n$  个正实数, 则

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

**证** 当  $n = 1, 2$  时, 不等式显然成立.

设对任意  $n-1$  个正实数, 命题成立.

对  $n$  个正实数情形, 我们重新排列它们, 使  $x_n$  为其中最大的一个, 则有

$$x_n \geq A = \frac{1}{n-1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) \geq \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}.$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \left( \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \right)^n &= \left[ \frac{(n-1)A + x_n}{n} \right]^n \\ &= \left( A + \frac{x_n - A}{n} \right)^n = A^n + nA^{n-1} \left( \frac{x_n - A}{n} \right) + \cdots \\ &\geq A^n + nA^{n-1} \left( \frac{x_n - A}{n} \right) = A^{n-1} x_n \\ &\geq x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n, \end{aligned}$$

$$\text{即 } \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

当且仅当所有的  $x_i$  都相等时, 等号成立.

**例 9** 利用平均值不等式证明

$$\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n < \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

**证** 令平均值不等式

$$\sqrt[n+1]{x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1}} \leq \frac{1}{n+1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1})$$

中  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1 + \frac{1}{n}$ ,  $x_{n+1} = 1$ , 则上式成为

$$\sqrt[n+1]{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot 1} < \frac{1}{n+1} \left[ n \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + 1 \right] = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

两边  $n+1$  次方, 即得

$$\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n < \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}.$$

**例 10** 设  $x_1, x_2, \cdots, x_n$  是正数, 且  $n \geq 1$ , 证明:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

证 在平均值不等式中, 令  $x_i = \frac{1}{t_i}$ , 得

$$\sqrt[n]{\frac{1}{t_1} \cdot \frac{1}{t_2} \cdots \frac{1}{t_n}} \leq \frac{1}{n} \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n} \right),$$

即 
$$\frac{1}{\sqrt[n]{t_1 t_2 \cdots t_n}} \leq \frac{1}{n} \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n} \right),$$

化为 
$$\sqrt[n]{t_1 t_2 \cdots t_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}}$$

即为所证(只需将  $t_i$  改写为  $x_i$ ).

例 11 证明赫尔德不等式: 设实数  $p, q$  满足  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , 且  $a_i, b_i$  为非负实数, 则

$$\text{当 } p > 1 \text{ 时, } \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\text{当 } p < 1 \text{ 时, } \sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

仅当  $a_i$  与  $b_i$  成比例时, 等号成立.

证 利用下列不等式: 对  $t > 0$ , 有

$$t^\alpha - \alpha t + \alpha - 1 \geq 0 \quad (\alpha > 1 \text{ 或 } \alpha < 0), \quad (1)$$

$$t^\alpha - \alpha t + \alpha - 1 \leq 0 \quad (0 < \alpha < 1). \quad (2)$$

当  $t = 1$  时等号成立(利用函数单调性与极值证).

在式 (1), 式 (2) 中, 令  $\alpha = \frac{1}{p}$ ,  $1 - \alpha = \frac{1}{q}$ , 并以  $\frac{x}{y}$  代替  $t$ , 得

$$\left( \frac{x}{y} \right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{1}{p} \frac{x}{y} + \frac{1}{q} \Rightarrow x^{\frac{1}{p}} y^{1-\frac{1}{p}} \geq \frac{x}{p} + \frac{y}{q},$$

即

$$\begin{cases} x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, & p > 1, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \geq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, & p < 1. \end{cases} \quad (4)$$

在式 ③ 中, 令

$$x_i = a_i^p/A, \quad y_i = b_i^q/B,$$

其中  $A = \sum_{i=1}^n a_i^p, B = \sum_{i=1}^n b_i^q$ , 则当  $p > 1$  时, 有

$$\frac{a_i b_i}{A^{1/p} B^{1/q}} \leq \frac{a_i^p}{pA} + \frac{b_i^q}{qB}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \sum_{i=1}^n a_i b_i &\leq A^{1/p} B^{1/q} \left[ \frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{pA} + \frac{\sum_{i=1}^n b_i^q}{qB} \right] \\ &= A^{1/p} B^{1/q} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

类似可证  $p < 1$  时的不等式.

**例 12** 证明闵可夫斯基不等式: 对任意的  $r \neq 0, 1$  及  $a_i, b_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 有

$$\text{当 } r > 1 \text{ 时, } \left( \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^r \right)^{1/r} \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^r \right)^{1/r} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^r \right)^{1/r},$$

$$\text{当 } r < 1 \text{ 时, } \left( \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^r \right)^{1/r} \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i^r \right)^{1/r} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^r \right)^{1/r}.$$

当且仅当  $a_i$  与  $b_i$  成比例时, 等号成立.

**证** 当  $r > 1$  时, 令  $t_i = a_i + b_i$ , 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n t_i^r &= \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^r = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{r-1} (a_i + b_i) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i t_i^{r-1} + \sum_{i=1}^n b_i t_i^{r-1}. \end{aligned}$$

又令  $p = r, q = \frac{r}{r-1}$ , 则  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , 应用赫尔德不等式, 得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n t_i^r &\leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^r \right)^{1/r} \left( \sum_{i=1}^n t_i^r \right)^{\frac{r-1}{r}} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^r \right)^{1/r} \left( \sum_{i=1}^n t_i^r \right)^{\frac{r-1}{r}} \\ &= \left[ \left( \sum_{i=1}^n a_i^r \right)^{1/r} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^r \right)^{1/r} \right] \left( \sum_{i=1}^n t_i^r \right)^{1-1/r}. \end{aligned}$$



不等式两边同乘  $\left(\sum_{i=1}^n t_i^r\right)^{1/r-1} (> 0)$ , 得

$$\left(\sum_{i=1}^n t_i^r\right)^{1/r} = \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^r\right)^{1/r} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^r\right)^{1/r} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^r\right)^{1/r}.$$

类似可证  $r < 1$  时的不等式.

例 13(加权平均值不等式) 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为  $n$  个正数,  $\alpha_1,$

$\alpha_2, \dots, \alpha_n$  为满足  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  的正数, 则有

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

当且仅当  $x_i$  都相等时, 等号成立.

证 用数学归纳法. 当  $n = 2$  时, 对  $x_1 > 0, x_2 > 0$  及  $0 < \alpha < 1$ , 以  $t = \frac{x_1}{x_2}$  代入例 11 之式 ②, 得

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^\alpha - \alpha \frac{x_1}{x_2} + \alpha - 1 < 0,$$

即 
$$x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} \leq \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2.$$

故, 当  $n = 2$  时, 不等式成立.

设对  $n - 1$ , 不等式成立.

设对  $n$  个正整数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 正数  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  满足  $\sum_{i=1}^n \alpha_i =$

1. 又令  $t_i = x_i, \beta_i = \alpha_i, i = 1, 2, \dots, n - 2;$

$$t_{n-1} = x_{n-1}^{\alpha_{n-1}/\beta_{n-1}} x_n^{\alpha_n/\beta_{n-1}}, \quad \beta_{n-1} = \alpha_{n-1} + \alpha_n.$$

则  $y_i > 0, \beta_i > 0$  且  $\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i = 1.$

$$\begin{aligned} \text{故 } \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} &= \prod_{i=1}^{n-1} t_i^{\beta_i} \leq \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i t_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i x_i + (\alpha_{n-1} + \alpha_n) x_{n-1}^{\alpha_{n-1}/\beta_{n-1}} \cdot x_n^{\alpha_n/\beta_{n-1}} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i. \end{aligned}$$

即对  $n$ , 不等式也成立. 所以, 加权平均值不等式成立.

**例 14** 证明: 若  $x_1, x_2, \dots, x_n$  均为正数, 且  $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ , 则

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n.$$

当且仅当  $x_i$  均等于 1 时, 等号成立.

**证** 用数学归纳法. 对  $n = 1$ , 命题自然成立. 设对  $n - 1$ , 命题成立.

对  $n$  的情形. 设  $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ , 且  $x_i$  不全相同. 重新排列诸  $x_i$ , 使  $x_1 > 1, x_n < 1$ . 记  $x_1 x_n = y_1$ , 则由  $y_1 x_2 \cdots x_{n-1} = 1$  和归纳法假设知  $y_1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \geq n - 1$ . 因此

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ &= (y_1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) + x_1 + x_n - x_1 x_n \\ &\geq n + x_1 + x_n - x_1 x_n - 1 \\ &= n + (x_n - 1)(1 - x_1) > n. \end{aligned}$$

可见, 对  $n$  的情形, 命题也成立.

**例 15**(契比雪夫不等式) 设  $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n, b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ , 则

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i \right) \leq n \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

当且仅当  $a_i$  都相等或  $b_i$  都相等时, 等号成立.

**证** 因为

$$\begin{aligned} & n \sum_{i=1}^n a_i b_i - \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_i - a_i b_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_j b_j - a_j b_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_i + a_j b_j - a_i b_j - a_j b_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0. \end{aligned}$$

## 第四节 数列极限与收敛数列的性质

### 主要内容

1. 从自然数集  $\mathbf{N}$  到  $\mathbf{R}$  的一个映射  $x:\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ , 称为实数数列, 可以记作

$$\{x_n\}: x_1, x_2, \cdots, x_n,$$

或称为整标函数  $f(n)$ .

2. 对数列  $\{x_n\}$ , 若存在  $M \in \mathbf{R}$ , 使得  $\forall n \in \mathbf{N}, x_n \leq M$ , 则称数列  $\{x_n\}$  有上界,  $M$  是它的一个上界; 若存在  $m \in \mathbf{R}$ , 使得  $\forall n \in \mathbf{N}, x_n \geq m$ , 则称数列  $\{x_n\}$  有下界,  $m$  是它的一个下界.

若数列  $\{x_n\}$  有上界也有下界, 则称数列  $\{x_n\}$  有界.

3. 设  $\{x_n\}$  是一个数列,  $a$  是一个确定的数. 若  $\forall \varepsilon < 0, \exists$  自然数  $N$ , 使当  $n > N$  时, 都有

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

则称数列  $\{x_n\}$  收敛于  $a$ . 称  $a$  为数列的极限, 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

4. 若数列  $\{x_n\}$  收敛, 且以零为极限, 则称  $\{x_n\}$  为无穷小数列.

数列  $\{x_n\}$  收敛于  $a$  的充要条件是:  $\{x_n - a\}$  是无穷小数列.

5. 收敛数列有如下重要性质:

(1) 惟一性 若数列  $\{x_n\}$  有极限, 则极限值是惟一的.

(2) 有界性 若数列  $\{x_n\}$  收敛, 则  $\{x_n\}$  为有界数列.

(3) 保号性 若数列  $\{x_n\}$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0$  (或  $a < 0$ ), 则对任一满足不等式  $a > a' > 0$  (或  $0 > a' > a$ ) 的  $a'$ ,  $\exists$  自然数  $N$ , 使当  $n > N$  时,  $x_n > a' > 0$  (或  $x_n < a' < 0$ ).

(4) 不等式性 若数列  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$  都收敛, 且  $\exists$  某自然数  $N_0$ , 当  $n > N_0$  时, 有  $x_n \leq y_n$ , 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(5) 迫敛性 设数列  $\{x_n\}$  与  $\{y_n\}$  收敛于同一极限  $a$ , 若  $\exists$  某自然数  $N_0$ , 当  $n > N_0$  时, 有  $a_n \leq c_n \leq b_n$ , 则对数列  $\{c_n\}$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a.$$

6. 数列极限的四则运算法则 若  $\{x_n\}, \{y_n\}$  是收敛数列, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , 则

(1) 数列  $\{x_n \pm y_n\}$  也收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$ . 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(2) 数列  $\{x_n \cdot y_n\}$  也收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = ab$ . 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

(3) 若  $y_n \neq 0$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$ , 则数列  $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$  也收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ . 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

## 疑难解析

1. 如何理解数列极限的  $\epsilon$ - $N$  定义?

答 数列极限的  $\epsilon$ - $N$  定义反映了数列  $\{x_n\}$  的数值  $x_n$  与数  $x_n$  的下标  $n$  之间的变化关系. 读者应理解以下几点:

(1)  $\epsilon$  的任意性  $\epsilon$  是用来衡量  $x_n$  与常数  $a$  的接近程度的, 若  $\{x_n\}$  以  $a$  为极限, 则应该有  $|x_n - a| \rightarrow 0$ . 因此,  $\epsilon$  是可以任意选定的无论多小的正数. 选定  $\epsilon$  反映了我们对  $x_n$  与  $a$  接近程度的要求, 当然,  $\epsilon$  越小越好. 另一方面, 要求一旦提出, 是不可更改的, 所以  $\epsilon$

又是取定的,可以根据  $\epsilon$  求出相应的  $N$ .

(2)  $N$  的对应性  $N$  的大小由  $\epsilon$  确定,故通常记作  $N(\epsilon)$ .  $N$  反映了要使  $|x_n - a| < \epsilon$  时  $n$  的取值大小. 所以  $N$  有最小值,没有最大值,从而  $N$  可以有很多值. 在实际问题中,只要能证明  $N$  存在就行,不一定要求出  $N$ ,更不一定要求出最小的  $N$ . 通常,由  $|x_n - a| < \epsilon \Rightarrow n > N(\epsilon)$ ,从而知  $N$  是对应于  $\epsilon$  的,但不要认为是  $\epsilon$  的函数.

(3) 几何意义 定义中“当  $n > N$  时,都有  $|x_n - a| < \epsilon$ ”反映这样一个几何事实:在数轴上,凡下标  $n > N$  的点  $x_n$ ,都落在点  $a$  的  $\epsilon$  邻域内,而在此邻域外,至多有数列  $\{x_n\}$  的  $N$ (有限)个点(项).

## 2. 证明数列极限时怎样确定 $N$ ?

答 此时只要证明  $N$  存在,而不要求求得的是最小  $N$ ,所以,只需将  $|x_n - a|$  变形,通常用加强不等式“放大”,从  $|x_n - a|$  中分离出  $n$ ,然后由  $|x_n - a| < \epsilon$  确定  $N$ .

例如,证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ , 其中  $a > 1$ .

令  $a^{1/n} - 1 = \alpha$ , 则  $\alpha > 0$ , 依伯努利不等式,有

$$a = (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha = 1 + n(a^{1/n} - 1),$$

即

$$a^{1/n} - 1 \leq \frac{a - 1}{n}.$$

要  $|\sqrt[n]{a} - 1| = |a^{1/n} - 1| \leq \epsilon$ , 只要  $\left| \frac{a - 1}{n} \right| < \epsilon$ . 所以,有  $n > \frac{a - 1}{\epsilon}$ . 取  $N = \left[ \frac{a - 1}{\epsilon} \right]$ , 则当  $n > N$  时,就有  $\left| \frac{a - 1}{n} \right| < \epsilon$ , 即  $|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon$ .

## 方法、技巧与典型例题分析

### 一、关于数列极限的概念

利用这部分例题加深对极限概念的理解,运用数列极限的

$\epsilon$ - $N$  定义来讨论问题、分析问题,并作出结论.

例 1 求数列  $\{x_n\} = \left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}$  的最大项.

解 利用  $\{x_n\}$  的通项公式,对前后项的比进行分析. 因为

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{n^2}{2^n} \cdot \frac{2^{n-1}}{(n-1)^2} = \frac{n^2}{2(n-1)^2},$$

若  $x_n$  单调增加,则  $\frac{x_n}{x_{n-1}} > 1$ , 故有

$$\frac{n^2}{2(n-1)^2} > 1 \Rightarrow n^2 > 2(n-1)^2 \Rightarrow n^2 - 4n + 4 < 2,$$

即  $(n-2)^2 < 2 \Rightarrow n \leq 3$ .

若  $x_n$  单调减少,则  $\frac{x_n}{x_{n-1}} < 1$ , 故有

$$\frac{n^2}{2(n-1)^2} < 1 \Rightarrow n^2 < 2(n-1)^2 \Rightarrow n^2 - 4n + 4 > 2,$$

即  $(n-2)^2 > 2 \Rightarrow n \geq 4$ .

综上所述,数列  $\left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}$  当  $n \leq 3$  时单调增加,  $n \geq 4$  时单调减少,在  $n = 3$  时取得最大值.

故最大项为  $x_3, x_3 = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$ .

例 2 设  $x_n = \frac{\cos(n\pi/2)}{n}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . 又求出  $N$ , 使当  $n > N$  时  $x_n$  与其极限之差的绝对值小于  $\epsilon > 0$ ; 当  $\epsilon = 10^{-3}$  时, 求出相应的  $N$ .

解 由于  $\cos(n\pi/2)$  是有限数, 而  $n \rightarrow \infty$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . 证明如下:

因为  $|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{2} \right| \leq \frac{1}{n}$ , 所以  $\forall \epsilon > 0$ , 要使  $\frac{1}{n} < \epsilon$ , 只需  $n > \frac{1}{\epsilon}$ . 故  $N = \left[ \frac{1}{\epsilon} \right]$ .

当  $\epsilon = 10^{-3}$  时,  $N = \left[ \frac{1}{\epsilon} \right] = 10^3$ . 即  $\forall \epsilon = 10^{-3}$ , 当  $n > 10^3$  时,

就有  $|x_n - 0| < 10^{-3}$ .

**例 3** 证明:若数列  $\{x_n\}$  收敛,则它的任何子数列  $\{x_{n_k}\}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) 也收敛,且有同一极限.

**证** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 则依极限定义,  $\forall \epsilon > 0, \exists N$ , 当  $n > N$  时, 就有  $|x_n - a| < \epsilon$ . 因为  $\{x_{n_k}\}$  是  $\{x_n\}$  的子数列, 所以  $n_k > k$ . 故当  $k > N$  时, 必有  $n_k > k > N$ , 也有  $|x_{n_k} - a| < \epsilon$ . 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

**例 4** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$ .

**证** 由二项式展开定理, 有

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n = 1 + n + \frac{n}{2!}(n-1) + \frac{n}{3!}(n-1)(n-2) \\ &\quad + \frac{n}{4!}(n-1)(n-2)(n-3) + \dots + 1. \end{aligned}$$

根据极限式分子中  $n$  的次数, 适当放大  $|x_n - 0|$ , 证得与  $\epsilon$  相应的  $N$  存在. 即证明了极限.

因为要  $\left| \frac{n}{2^n} - 0 \right| = \frac{n}{2^n} < \frac{n}{n(n-1)/2!} = \frac{2}{n-1} < \epsilon$ , 只要  $N > 1 + \left[ \frac{2}{\epsilon} \right]$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ .

类似地, 使

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{2^n} &< \frac{n^2}{n(n-1)(n-2)/3!} = \frac{6n}{(n-1)(n-2)} < \epsilon, \\ \frac{n^3}{2^n} &< \frac{n^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)/4!} = \frac{24n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)} < \epsilon \end{aligned}$$

的  $N$  均存在, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$ .

这里, 利用了不等式

$$\begin{aligned} 2^n &> \frac{n(n-1)}{2!}, \quad 2^n > \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}, \\ 2^n &> \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}. \end{aligned}$$

利用不等式放大  $|x_n - a|$  来证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 是证数列极限与函数极限的常用方法, 读者应努力掌握, 学会使用. 如

证  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ , 可利用  $n! = 1 \cdot 2 \cdots n \geq n \cdot 2^{n-2}$ .

证  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$  ( $a > 1$ ), 可令  $a = 1 + h$  ( $h > 0$ ), 利用

$$a^n = (1 + h)^n = 1 + c_n^1 h + \cdots + c_n^{k+1} h^{k+1} + \cdots + h^n \\ > c_n^{k+1} h^{k+1}.$$

例 5 设对于数列  $\{x_n\}$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = a$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

证 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = a$ , 知  $\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$ , 使当  $n > N_1$  时,  $|x_{2n} - a| < \epsilon$ ; 同样, 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = a$ , 知  $\forall \epsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}$ , 使当  $n > N_2$  时,  $|x_{2n-1} - a| < \epsilon$ .

取  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 则当  $n > N$  时, 上述两不等式均成立, 即  $|x_n - a| < \epsilon$ . 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

例 6 已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a.$$

证 依极限定义  $\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$ , 使当  $n > N_1$  时, 有  $|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ . 于是, 当  $n > N_1$  时, 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - a \right| &= \left| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n - na}{n} \right| \\ &\leq \frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_{N_1} - a|}{n} \\ &\quad + \frac{|x_{N_1+1} - a| + |x_{N_1+2} - a| + \cdots + |x_n - a|}{n} \\ &\leq \frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_{N_1} - a|}{n} + \frac{n - N_1}{n} \cdot \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$



由于  $|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_{N_1} - a| = c$  为一常数, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{n} = 0.$$

于是,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N_2$  时, 有

$$\frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_{N_1} - a|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

所以, 取  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - a \right| \\ & < \frac{c}{n} + \frac{n - N_1}{n} \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

即证得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a$ .

类似可证:

(1) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty$ ;

(2) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ;

(3) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$  存在, 且  $x_n > 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ .

例 7(斯笃兹(O. Stolz) 定理) 证明: 若存在: (1)  $y_{n+1} > y_n$ ,

(2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$ , (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

证 (1) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a$  (有限数), 则  $\forall \varepsilon > 0$ , 当  $n > N$

时, 有  $a - \varepsilon < \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} < a + \varepsilon$ . 于是, 得到一组不等式:

$$(y_{N+1} - y_N)(a - \varepsilon) < x_{N+1} - x_N < (y_{N+1} - y_N)(a + \varepsilon),$$

$$(y_{N+2} - y_{N+1})(a - \varepsilon) < x_{N+2} - x_{N+1} < (y_{N+2} - y_{N+1})(a + \varepsilon),$$

.....

$$(y_n - y_{n-1})(a - \varepsilon) < x_n - x_{n-1} < (y_n - y_{n-1})(a + \varepsilon).$$

将不等式组中各不等式对应部分相加,得

$$(y_n - y_N)(a - \varepsilon) < x_n - x_N < (y_n - y_N)(a + \varepsilon),$$

即 
$$\left(1 - \frac{y_N}{y_n}\right)(a - \varepsilon) < \frac{x_n}{y_n} - \frac{y_N}{y_n} < \left(1 - \frac{y_N}{y_n}\right)(a + \varepsilon).$$

对取定的  $\varepsilon$  及相应的  $n$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $y_n \rightarrow +\infty$ , 故

$$a - \varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq a + \varepsilon.$$

由  $\varepsilon$  的任意性, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

(2) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = +\infty$ . 则  $\forall M \in \mathbf{R}$ , 当  $n > N$  时,

$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > M$ . 故依题(1), 得一不等式组, 经相同步骤后可得

$$\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} > M \Rightarrow x_n - x_N > M(y_n - y_N).$$

移项并除以  $y_n$ , 得

$$\frac{x_n}{y_n} > M \left(1 - \frac{y_N}{y_n}\right) + \frac{x_N}{y_n},$$

取  $n \rightarrow \infty$ , 则  $y_n \rightarrow \infty$ , 得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \geq M$ .

由  $M$  的任意性, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

类似可证  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = -\infty$  的情形.

### 例 8 讨论极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0},$$

其中  $a_m \neq 0, b_k \neq 0$ .

解 若  $m = k$ , 将分子、分母同除以  $x^m$ , 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m + a_{m-1}n^{-1} + \cdots + a_1n^{1-m} + a_0n^{-m}}{b_k + b_{k-1}n^{-1} + \cdots + b_1n^{1-k} + b_0n^{-k}},$$

分子、分母除第一项外,其它项的极限均为零.故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m n^m + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + \cdots + b_1 n + b_0} = \frac{a_m}{b_k} \left( \frac{a_m}{b_m} \right).$$

若  $m > k$ ,将分子、分母同除以  $x^k$ ,得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m n^{m-k} + a_{m-1} n^{m-1-k} + \cdots + a_1 n^{1-k} + a_0 n^{-k}}{b_k + b_{k-1} n^{-1} + \cdots + b_1 n^{1-k} + b_0 n^{-k}},$$

分子从第  $m - k + 1$  项后均为零,而前  $m - k$  项极限是  $\infty$ ;分母极限为  $b_k$ ,故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \infty;$$

若  $m < k$ ,将分子、分母同除以  $x^k$ ,得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m n^{m-k} + a_{m-1} n^{m-1-k} + \cdots + a_1 n^{1-k} + a_0 n^{-k}}{b_k + b_{k-1} n^{-1} + \cdots + b_1 n^{1-k} + b_0 n^{-k}}.$$

所以,分子极限为零,分母极限为常数,故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = 0.$$

综上所述,可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} \frac{a_m}{b_k}, & m = k, \\ \infty, & m > k, \\ 0, & m < k. \end{cases}$$

例 6、例 7 和例 8 是后面我们计算数列极限的常用方法和依据,请读者把它弄懂记熟.

## 二、数列极限的求解

到目前为止,我们已经掌握了一些计算数列极限的方法与结论.下面我们来实践和熟悉这些方法与结论.

### 1. 利用极限定义求极限

利用极限定义计算极限的关键是:将通项化为一常数与一含

$n$  的无穷小之和,从而得到  $|x_n - a| < \epsilon$ ,并依此求得对应的  $N$ .

例 9 求数列  $\{\sqrt[n]{n}\}$  的极限.

解 令  $x_n = \sqrt[n]{n}$ , 因为当  $n > 1$  时,  $\sqrt[n]{n} > 1$ , 所以  $x_n = 1 + \alpha_n$  ( $\alpha_n > 0$ ), 于是

$$n = (1 + \alpha_n)^n \geq 1 + n\alpha_n + \frac{n}{2}(n-1)\alpha_n^2 \geq \frac{n}{2}(n-1)\alpha_n^2,$$

即 
$$0 \leq \alpha_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \Rightarrow 0 \leq \alpha_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

故 
$$1 \leq x_n = 1 + \alpha_n \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

显然  $\{\alpha_n\}$  收敛于零. 因为  $\forall \epsilon > 0, \exists N = 1 + \frac{2}{\epsilon^2}$ , 就有  $\left| \sqrt{\frac{2}{n-1}} - 0 \right| < \epsilon$ . 所以, 由迫敛性得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

例 10 设  $a \in \mathbf{R}, |a| > 1$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n}$ .

解  $n \geq 2$  时, 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{n}{a^n} \right| &= \frac{n}{|a|^n} = \frac{n}{[1 + (|a| - 1)]^n} \\ &< \frac{n}{n(n-1)(|a| - 1)^2/2} \quad (\text{由二项展开式得}) \\ &= \frac{2}{(n-1)(|a| - 1)^2}. \end{aligned}$$

要使 
$$\frac{2}{(n-1)(|a| - 1)^2} < \epsilon,$$

只需 
$$n > \frac{2}{\epsilon(|a| - 1)^2} + 1.$$

即若取  $N = \frac{2}{\epsilon(|a| - 1)^2} + 2$ , 则当  $n > N$  时, 就有

$$\left| \frac{n}{a^n} \right| < \frac{2}{(n-1)(|a| - 1)^2} < \epsilon,$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$ . 数列  $\left\{ \frac{n}{a^n} \right\}, |a| > 1, a \in \mathbf{R}$  是无穷小序列.

## 2. 利用各种运算法则和技巧求极限

当数列的形式较复杂时,我们可以将其分解后利用四则运算法则计算数列极限.同时,问题往往不是孤立的,一个数列极限的计算可能要使用几种方法.所以读者在学习时要培养综合运用能力,不要将知识割裂得太碎.

**例 11** 若数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 都发散,它们的和数列 $\{x_n + y_n\}$ 是否一定发散?

**解** 不一定.如数列 $\left\{(-1)^n + \frac{c}{n}\right\}$ 与 $\left\{(-1)^{n+1} + \frac{c}{n}\right\}$ ( $c$ 为常数)都是发散的,但其和数列

$$\left\{(-1)^n + \frac{c}{n} + \left[(-1)^{n+1} + \frac{c}{n}\right]\right\} = \left\{\frac{2c}{n}\right\}$$

却是收敛数列.

**例 12** 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ ,是否一定有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ ?

**解** 不一定.如 $x_n = 1 + (-1)^n, y_n = 1 - (-1)^n$ ,有

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{[1 + (-1)^n][1 - (-1)^n]\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - (-1)^{2n}] = 0,\end{aligned}$$

但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 均不存在.

类似的命题很多,希望读者能认真辨析,并记住一些必要的例子(或学会构造一些例子)来说明问题.

**例 13** 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$ .

**解** 因为 $\frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$ ,所以,利用例 8 的结果,得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

**例 14** 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a + \cdots + a^n)$  ( $0 < a < 1$ ).

**解** 利用等比数列和的公式,得

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a + \cdots + a^n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - a} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}.\end{aligned}$$

例 15 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a)(1 + a^2) \cdots (1 + a^{2^n}) \quad (|a| < 1);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right).$$

解 (1) 因为

$$\begin{aligned}&(1 + a)(1 + a^2) \cdots (1 + a^{2^n}) \\ &= \frac{1 - a^2}{1 - a} \frac{1 - a^4}{1 - a^2} \cdots \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a^{2^n}} = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a},\end{aligned}$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a)(1 + a^2) \cdots (1 + a^{2^n}) = \frac{1}{1 - a}.$

(2) 因为

$$\begin{aligned}&\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right) \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4}\right) \cdots \left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \frac{n+1}{2n},\end{aligned}$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$

(3) 因为

$$\begin{aligned}&\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right) \\ &= \frac{1}{1 + 1/2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right),\end{aligned}$$

令  $a = \frac{1}{2}$ , 利用题(1)的结果, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 1/2} \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = \frac{4}{3}.$$

例 16 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right];$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right];$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right).$$

解 (1) 因为

$$1 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1),$$

所以,如同例 13,有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

$$(2) \text{ 设 } S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2,$$

$$\text{有 } 4S_n = 2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2,$$

$$S_{2n} = 1^2 + 2^2 + \cdots + (2n)^2,$$

$$\text{则 } S_{2n} - 4S_n = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2,$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{2n} - 4S_n}{n^3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} [2n(2n+1)(4n+1) - 4n(n+1)(2n+1)] \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{4}{3}.$$

$$(3) \text{ 设 } S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n},$$

$$\text{有 } 2S_n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n-1}},$$

$$\text{则 } S_n = 2S_n - S_n$$

$$= 1 + \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{5}{2^2} - \frac{3}{2^2} \right) + \cdots$$

$$+ \left( \frac{2n-1}{2^{n-1}} - \frac{2n-3}{2^{n-1}} \right) - \frac{2n-1}{2^n},$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right)$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 3 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 3 - \frac{2n+3}{2^n} \right) = 3.$

例 17 求下列极限:

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdots \sqrt[n]{2});$

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}.$

解 (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdots \sqrt[n]{2})$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1 - 1/2^n} = 2.$

(2) 利用几何平均值小于算术平均值性质(第三节平均值不等式),得

$$2 = \frac{1+3}{2} > \sqrt{1 \cdot 3}, 4 > \frac{3+5}{2} > \sqrt{3 \cdot 5} \cdots$$

$$2n = \frac{(2n-1) + (2n+1)}{2} > \sqrt{(2n-1)(2n+1)},$$

$$0 < x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$$

$$< \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{\sqrt{1 \cdot 3} \cdot \sqrt{3 \cdot 5} \cdots \sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$ , 所以, 依迫敛性, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} = 0.$$

例 18 求: (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-4)^n + 6^n}{5^{n+1} + 6^{n+1}};$  (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \sqrt{n}}}{\sqrt{n+1}};$

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{n+1} - \sin \sqrt{n}).$

解 (1) 分子、分母同除式中最大项  $6^{n+1}$ , 得



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-4)^n + 6^n}{5^{n+1} + 6^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-4/6)^n \cdot 1/6 + 1/6}{(5/6)^{n+1} + 1} = \frac{1}{6}.$$

(2) 因为分子、分母中  $n$  的最高幂次均为  $\frac{1}{2}$ , 由例 8 的结论, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1.$$

(3) 用有理化方法, 得

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{n+1} - \sin \sqrt{n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cos \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2} \sin \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2}. \end{aligned}$$

因为  $\left| \cos \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2} \right| < 1$ , 而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2} \xrightarrow{\text{有理化}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = 0,$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2} = \sin 0 = 0,$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{n+1} - \sin \sqrt{n}) = 0.$

### 三、数列极限的证明

用迫敛性求数列  $\{x_n\}$  的极限, 关键是找出两个有相同极限的数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$ , 使  $\{a_n\} \leq \{x_n\} \leq \{b_n\}$ . 一般  $\{a_n\}$  可利用  $\{x_n\}$  的下界确定, 取为常数  $a$ , 而  $\{b_n\}$  通过加强  $x_n$  得到  $b_n$ , 再证明  $\{b_n\} \rightarrow a$ .

例 19 设  $a > 0, b > 0$ , 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a, b).$$

证 因为

$$\sqrt[n]{[\max(a, b)]^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2[\max(a, b)]^n},$$

得  $\max(a, b) \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2} \max(a, b).$

由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$ , 则依迫敛性, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a, b).$$

例 20 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ .

解 因为

$$\begin{aligned} n! &= 1 \cdot 2 \cdots \left[ \frac{n}{2} \right] \left( \left[ \frac{n}{2} \right] + 1 \right) \cdots n \\ &= \begin{cases} \frac{n}{2}^{\left[ \frac{n}{2} \right]} = \left( \frac{n}{2} \right)^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{n}{2}^{\left[ \frac{n}{2} \right] + 1} \geq \left( \frac{n}{2} \right)^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为奇数,} \end{cases} \end{aligned}$$

所以有  $0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \sqrt{\frac{2}{n}}$ , 由  $\sqrt{\frac{2}{n}} \rightarrow 0$ , 依迫敛性, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

例 21 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1$ .

证 用放大法, 得

$$\frac{n \cdot 1}{n} \leq \frac{1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} \leq \frac{n \sqrt[n]{n}}{n},$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$  (见例 9). 依迫敛性, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1.$$

此题也可由例 6 结论直接写出. 类似可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right) = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) = 0.$$

例 22 设  $\{x_n\}$  是正实数数列,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0$ , 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = a.$$

证 由平均值不等式, 有

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n),$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n}} \leq \frac{1}{n} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right),$$

所以

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n).$$

因为  $\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} = 1 / \left[ \frac{1}{n} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right) \right] \rightarrow a,$

$$\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \rightarrow a \quad (\text{均依例 6 结论}),$$

依迫敛性,得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = a.$

**例 23** 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{1/n} - 1) = \ln a \quad (a > 0).$

**证** (1) 设  $a > 1$ , 令  $x_n = a^{1/n} - 1$ , 则  $x_n > 0$ , 且  $\frac{\ln a}{n} = \ln(1 + x_n)$ . 于是, 有

$$n(a^{1/n} - 1) = \frac{\ln a}{\ln(1 + x_n)} \cdot x_n.$$

因为  $x_n \rightarrow 0$ , 依极限定义, 当  $n > N$  时,  $0 < x_n < 1$ . 所以对每一确定的  $n$ ,  $\exists$  相应的  $k_n$ , 使

$$\frac{1}{k_n + 1} < x_n < \frac{1}{k_n} \quad (k_n \rightarrow \infty).$$

利用不等式  $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

(由  $1 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$  和  $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  两端取对数可证), 故

$$\frac{1}{k_n + 2} < \ln\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right) \leq \ln(1 + x_n) < \ln\left(1 + \frac{1}{k_n}\right) < \frac{1}{k_n}.$$

逐项相除得

$$1 - \frac{1}{k_n + 1} = \frac{k_n}{k_n + 1} < \frac{x_n}{\ln(1 + x_n)} < \frac{k_n + 2}{k_n} = 1 + \frac{2}{k_n}.$$

由  $k_n \rightarrow \infty$ , 依迫敛性, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{1/n} - 1) = \ln a.$$

(2) 设  $0 < a < 1$ , 则  $\frac{1}{a} > 1$ , 依题(1) 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \left( \frac{1}{a} \right)^{1/n} - 1 \right] = \ln \frac{1}{a}.$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \left( \frac{1}{a} \right)^{1/n} - 1 \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{a} \right)^{1/n} \cdot n \left[ 1 - \left( \frac{1}{a} \right)^{-1/n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} - \left( \frac{1}{a} \right)^{1/n} n(a^{1/n} - 1) \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{1/n} - 1) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \right). \end{aligned}$$

$$\text{又 } \ln \frac{1}{a} = -\ln a.$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{1/n} - 1) = \ln a$  也成立.

(3)  $a = 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{1/n} - 1)$  显然成立.

#### 四、应用斯笃兹定理求数列极限

斯笃兹定理的证明见例 7. 斯笃兹定理实质上是已知数列  $\{x_n\}$  与正无穷大数列  $\{y_n\}$  的各自相邻两项增长率之比的极限, 来求  $\frac{x_n}{y_n}$  的极限. 因此利用斯笃兹定理求极限的关键是, 将所给数列

化为符合定理条件的  $\frac{x_n}{y_n}$  形式, 再求出  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$ .

**例 24** 证明: 若  $p$  为自然数, 则

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2p}{p+1}.$$

**证** (1) 令  $x_n = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$ ,  $y_n = n^{p+1} \rightarrow \infty$ , 故

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} &= \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \frac{(n+1)^p}{(p+1)n^p + \dots} \\ &= \frac{(1 + 1/n)^p}{p+1 + o(1/n)} \rightarrow \frac{1}{p+1}.\end{aligned}$$

依斯笃兹定理, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

题(2)、题(3)可用类似方法证明, 请读者一试.

例 25 设  $a_1 > 0, a_{n+1} = a_n + 1/a_n, n = 1, 2, \dots$ . 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1.$$

证 设  $x_n = a_n^2, y_n = 2n \rightarrow +\infty$ . 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{2n} = 1$ ,

则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1$ . 对  $x_n, y_n$  应用斯笃兹定理, 得

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} &= \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{2(n+1) - 2n} = \frac{1}{2}(a_{n+1}^2 - a_n^2) \\ &= \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{a_n^2} + 2 - a_n^2\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{a_n^2}\right).\end{aligned}$$

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  (事实上, 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  为有限数, 则依  $a_{n+1}$

$= a_n + \frac{1}{a_n}$  有  $a = a + \frac{1}{a}$ , 而这是不可能的), 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{2n} = 1,$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1.$$

例 26 设  $\alpha$  为任意实数, 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{\alpha+1} + 2^{\alpha+1} + \dots + n^{\alpha+1}}{n(1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha)}.$$

解 将原式分解, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{\alpha+1} + 2^{\alpha+1} + \dots + n^{\alpha+1}}{n(1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1^{a+1} + 2^{a+1} + \cdots + n^{a+1}}{n^{a+2}} / \frac{1^a + 2^a + \cdots + n^a}{n^{a+1}} \right],$$

利用例 24(1) 的结论(由斯笃兹定理证得) 即得

$$\text{原式} = \frac{1}{\alpha + 2} / \frac{1}{\alpha + 1} = \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2}.$$

例 27 设  $S_n = \sum_{k=0}^n \ln(c_n^k)/n^2$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

解 因为  $n^2 \rightarrow +\infty$ , 应用斯笃兹公式, 有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n+1} \ln(c_{n+1}^k) - \sum_{k=0}^n \ln(c_n^k)}{(n+1)^2 - n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n \ln(c_{n+1}^k/c_n^k) + \ln(c_{n+1}^{n+1})}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n \ln \frac{n+1}{n-k+1}}{2n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n+1} \ln k}{2n+1}. \end{aligned}$$

再次应用斯笃兹定理, 有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln n - \ln(n+1)}{(2n+1) - (2n-1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + 1/n)^n}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

例 28 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{2^2-1} \right)^{1/2^{n-1}} \left( \frac{2^2}{2^3-1} \right)^{1/2^{n-2}} \cdots \left( \frac{2^{n-1}}{2^n-1} \right)^{1/2}$ .

解 设  $x_n = \left( \frac{2}{2^2-1} \right)^{1/2^{n-1}} \left( \frac{2^2}{2^3-1} \right)^{1/2^{n-2}} \cdots \left( \frac{2^{n-1}}{2^n-1} \right)^{1/2}$ , 则

$$\begin{aligned} \ln x_n &= \frac{1}{2^{n-1}} \ln \frac{2}{2^2-1} + \frac{1}{2^{n-2}} \ln \frac{2^2}{2^3-1} + \cdots + \frac{1}{2} \ln \frac{2^{n-1}}{2^n-1} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \left( \ln \frac{2}{2^2-1} + 2 \ln \frac{2^2}{2^3-1} + \cdots + 2^{n-2} \ln \frac{2^{n-1}}{2^n-1} \right), \end{aligned}$$

因为  $2^{n-1} \rightarrow +\infty$ , 应用斯笃兹定理, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-2} \ln \frac{2^{n-1}}{2^n-1}}{2^{n-1} - 2^{n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - 1/2^{n-1}} = \ln \frac{1}{2},$$

所以

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}.$$

### 五、用其它方法求数列极限

求证数列极限的方法还很多,下面再举出几个例子,请读者体会这些方法.

**例 29** 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1}{n} = ab.$$

**解** 本题可用变量代换方法求解. 因为

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n,$$

$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$  是无穷小数列(见本节主要内容 4), 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{(a + \alpha_1)(b + \beta_n) + \cdots + (a + \alpha_n)(b + \beta_1)}{n} \\ &= ab + b \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} + a \frac{\beta_1 + \cdots + \beta_n}{n} \\ &\quad + \frac{\alpha_1 \beta_n + \cdots + \alpha_n \beta_1}{n}. \end{aligned}$$

因为  $\{\beta_n\} \rightarrow 0, \{\alpha_n\} \rightarrow 0$ , 所以  $\{\beta_n\}$  是有界数列, 即  $|\beta_n| \leq M$ , 所以

$$\left| \frac{\alpha_1 \beta_n + \cdots + \alpha_n \beta_1}{n} \right| \leq M \frac{|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|}{n}.$$

依例 6 的结论, 原式中二、三、四项均趋近于零, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1}{n} = ab.$$

**例 30** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{n^2}$ .

**解** 令  $x_n = a + \beta_n$ , 则  $\{\beta_n\} \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} &\frac{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{n^2} \\ &= \frac{(a + \beta_1) + 2(a + \beta_2) + \cdots + n(a + \beta_n)}{n^2} \\ &= \frac{n+1}{2n} a + \left( \frac{1}{n} \beta_1 + \frac{2}{n} \beta_2 + \cdots + \frac{n}{n} \beta_n \right) / n. \end{aligned}$$

而

$$\left| \left( \frac{1}{n}\beta_1 + \frac{2}{n}\beta_2 + \cdots + \frac{n}{n}\beta_n \right) / n \right| \leq \frac{|\beta_1| + |\beta_2| + \cdots + |\beta_n|}{n}.$$

依例 6 的结论,  $\left( \frac{1}{n}\beta_1 + \frac{2}{n}\beta_2 + \cdots + \frac{n}{n}\beta_n \right) / n \rightarrow 0$ . 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n}a = \frac{a}{2}.$$

例 31 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+2+\cdots+k}$ .

解 利用自然数求和公式

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+2+\cdots+k} \\ &= 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+n} \\ &= 1 + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} \\ &= 1 + 2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] \\ &= 2 - \frac{2}{n+1}, \end{aligned}$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+2+\cdots+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 2.$

例 32 证明: 数列  $\{\sin n\}$  不存在极限.

证 用反证法. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n+2) = a$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\sin(n+2) - \sin n] = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sin 1 \cos(n+1) = 0,$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos n = 0.$

于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin 2n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sin n \cos n = 0,$

即  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin 2n = 0,$

从而  $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin^2 n + \cos^2 n) = 0.$

而这是不可能的. 所以数列  $\{\sin n\}$  不存在极限.

其它方法还有很多, 不再一一列举.



## 第五节 数列极限存在的条件

### 主要内容

1. 若数列各项满足关系式

$$a_n \leq a_{n+1} \quad (\text{或 } a_n \geq a_{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

则称数列  $\{a_n\}$  为递增(或递减)数列, 统称单调数列.

2. 单调递增数列收敛的充分必要条件是它有上界, 单调递减数列收敛的充分必要条件是它有下界. 即, 单调有界数列必有极限.

3. 柯西收敛定理 数列  $\{a_n\}$  收敛的充分必要条件是: 对任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使当  $n, m > N$  时, 都有  $|a_m - a_n| < \varepsilon$ .

4. 维尔斯特拉斯(Weierstrass)聚点定理 直线上的有界无限点集  $S$  至少有一个聚点.

波尔察诺 - 维尔斯特拉斯致密性定理 有界数列  $\{a_n\}$ , 必有收敛子列.

5. 如果一列闭区间  $\{[a_n, b_n]\}$  满足条件:

$$(1) [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0,$$

则称这列闭区间形成一个闭区间套.

如果  $\{[a_n, b_n]\}$  形成一个闭区间套, 则存在惟一的实数  $\xi$  属于所有闭区间  $[a_n, b_n]$ , 且  $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . 称此结论为闭区间套定理.

又若  $\{a_n\}$  收敛于  $a$ , 则其任何子数列  $\{a_{n_k}\}$  都收敛于同一极限  $a$ .

常用结果  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ .

6. 有限覆盖定理 设  $S$  为直线上的一个点集, 若  $S$  中任何一

点都含在开区间集  $H$  中至少一个开区间中, 则称  $H$  为  $S$  的一个开覆盖.

海涅 - 波莱尔 (Heine-Borel) 有限覆盖定理 设  $[a, b]$  是一个闭区间,  $H$  为  $[a, b]$  的一个开覆盖, 则在  $H$  必存在有限个开区间, 它构成  $[a, b]$  上的一个开覆盖.

## 疑难解析

### 1. 为什么单调有界是数列收敛的充分条件?

答 单调有界是数列收敛的充分条件. 因为一个数列  $\{a_n\}$  若满足以下两个条件: (1) 有界, (2) 单调, 则  $\{a_n\}$  必收敛; 但若只满足其中一个条件, 则  $\{a_n\}$  不一定收敛. 如

$a_n = (-1)^n$ , 有界但不单调,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  不存在.

$a_n = 2n$ , 单调但无界,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  不存在.

但, 若  $\{a_n\}$  收敛, 则  $\{a_n\}$  必有界, 却不一定单调. 如  $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$  收敛于零, 有界但不单调.

从几何角度看, 在数轴上对应单调数列的点  $a_n$  只能向一个方向移动. 如果加上有界这个条件, 则数列的全部点都落在数轴上某区间  $[-M, M]$  内, 且无限趋向于某一定点  $A$ , 也就是数列  $\{a_n\}$  趋于一个极限, 且这极限的绝对值不会超过  $A$ .

### 2. 怎样理解柯西收敛定理?

答 柯西收敛定理的条件反映了这样一个事实: 收敛数列的各项愈到后面, 愈是互相接近, 因此它们之间差的绝对值可以小于任何预先给定的正数. 从几何角度看, 数列的项越到后面越是挤在一起, 因此它们之间的距离趋向于零. 因而可以确定数列收敛于某一极限值  $A$ .

### 3. 怎样应用有限覆盖定理证明命题?

答 有限覆盖定理与其它描述实数系连续性定理的不同在

于:有限覆盖定理着眼于区间的整体,而闭区间套定理、确界定理等着眼于一点的局部.有限覆盖定理的作用是从覆盖某闭区间 $[a,b]$ 的无限个开区间中选出有限个也能覆盖闭区间 $[a,b]$ 的开区间,化“无限”为“有限”.通过这种方法,将闭区间 $[a,b]$ 上每点所具有的局部性质转化为整个闭区间上的整体性质.因此当要证明闭区间上的整体性质时,可考虑使用有限覆盖定理;要证明闭区间上某一点的局部性质时,可考虑使用闭区间套定理、致密性定理、确界定理等.它们之间又可以相互证明.

应用有限覆盖定理证明命题的基本步骤是:由所要证明的整体性质 $A$ ,在闭区间 $[a,b]$ 上每一点找性质 $A^*$ .然后构造一个开区间集 $\bigcup a_i$ ,使 $[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$ ,且在每个开区间 $a_i$ 上性质 $A^*$ 都成立.于是由有限覆盖定理知,存在有限个开区间 $\bigcup_{i=1}^n a_i$ ,使 $[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^n a_i$ ,再证明在区间 $[a,b]$ 上性质 $A$ 成立(见例17、例18).

## 方法、技巧与典型例题分析

用单调有界来确定极限存在并不要求求出极限,一般只是证明极限的存在.这里的技巧在于确定单调性的技巧,可以由 $x_{n+1} - x_n$ 或者 $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 来确定,读者要通过多看例题来掌握.判别有界则比较简单,一般可以通过加强不等式得到.

**例1** 设 $a > 0, x_0 > 0, x_n = \frac{1}{2} \left( x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right), n = 1, 2, \dots$ .

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$ .

**证** 由 $\left( \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^2 \geq 0 \Rightarrow t + \frac{1}{t} \geq 2 \ (t > 0)$ ,知

$$x_n = \frac{\sqrt{a}}{2} \left[ \frac{x_{n-1}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_{n-1}} \right] \geq \sqrt{a}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

得  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{a}{x_n^2} \right) \leq 1 \Rightarrow x_{n+1} \leq x_n.$

故数列  $\{x_n\}$  单调递减且有下界, 极限存在. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 则

$$A \geq \sqrt{a} > 0.$$

且  $A = \frac{1}{2} \left( A + \frac{a}{A} \right) \Rightarrow A^2 = a \Rightarrow A = \sqrt{a}.$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}.$

例 2 设  $\alpha > 0$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n}{n!}.$

解 设  $x_n = \frac{\alpha^n}{n!}$ , 则  $x_n > 0, n \in \mathbb{N}$ . 当  $n$  充分大时, 有

$$\frac{\alpha}{n+1} < 1.$$

于是  $x_n = \frac{\alpha^n}{n!} > \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \frac{\alpha}{n+1} = x_{n+1}, n \in \mathbb{N}.$

所以  $\{x_n\}$  有极限. 记  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 则由

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{n+1} \cdot \frac{\alpha^n}{n!} = \frac{\alpha}{n+1} x_n \Rightarrow A = 0 \cdot A = 0,$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0.$

例 3 利用单调有界性求极限.

(1) 设  $a > 0, x_1 = \sqrt{a}, x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \dots, x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$

(2) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2}).$

解 (1)  $x_n$  单调增加是显然的, 现证明  $x_n$  有界. 用归纳法证明  $x_n < a$ .

对  $x_1 = \sqrt{a}, x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}} < \sqrt{a} + 1$  是显然的.

设  $x_n < \sqrt{a} + 1$ , 则

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \leq \sqrt{a + \sqrt{a} + 1} < \sqrt{a} + 1,$$

故数列  $\{x_n\}$  单调有界必有极限. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 由

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \Rightarrow A = \sqrt{a + A}.$$

解  $A^2 - A - a = 0$  得

$$A = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4a}).$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4a}).$

(2) 令  $x_n = \sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdots \sqrt[n]{2}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 则

$$1 < x_n < x_{n+1}, x_n < 2.$$

所以  $\{x_n\}$  是单调有界数列, 必有极限.

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 由  $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ , 得

$$A = \sqrt{2A} \Rightarrow A = 2 \quad (\text{显然 } A \neq 0),$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdots \sqrt[n]{2} = 2.$

**例 4** 利用单调有界性证明:

(1) 若  $0 < x_1 < 1$ , 且  $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 1.$

(2) 设  $x_1 = a \geq 0$ ,  $y_1 = b \geq 0$ , 且  $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ ,  $y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$

**证** (1) 因为

$$x_{n+1} - x_n = x_n(1 - x_n) - x_n = -x_n^2 < 0,$$

所以  $\{x_n\}$  单调减少. 又由  $0 < x_1 < 1$ , 由归纳法可证  $0 < x_n < 1$ , 从而  $\{x_n\}$  有下界.

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 在  $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$  两边取极限, 得

$$A = A(1 - A) \Rightarrow A = 0.$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

(2)  $x_n \geq 0, y_n \geq 0$  是显然的. 由

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \geq \sqrt{x_n y_n} = x_{n+1},$$

得

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \geq \sqrt{x_n x_n} = x_n,$$

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \leq \frac{y_n + y_n}{2} = y_n.$$

知  $\{x_n\}$  单调增加,  $\{y_n\}$  单调减少, 又

$$x_n \leq y_n \leq y_1, \quad y_n \geq x_n \geq x_1,$$

所以  $\{x_n\}, \{y_n\}$  有界. 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$  存在.

对  $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$  两边取极限, 得

$$B = \frac{1}{2}(A + B) \Rightarrow A = B.$$

由以上例题得知:

证明数列有界常用下列方法: (1) 观察法. 从已知条件与通项公式得出; (2) 数学归纳法; (3) 利用已知命题与公式判断, 如  $|\sin n| \leq 1, a^2 + b^2 \geq 2|a||b|$  等等.

证明数列单调常用下列方法: (1) 观察法, 考察通项公式或项的结构; (2) 数学归纳法; (3) 判断  $x_{n+1} - x_n$  的符号; (4) 考察  $\frac{x_{n+1}}{x_n}$  与 1 的关系.

**例 5** 证明: 数列  $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$  单调增加, 数列  $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$  单调减少, 两者收敛于同一极限.

**证** 记  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ , 由平均值不等式

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n),$$

知  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1 \leq \left[\frac{n(1 + 1/n) + 1}{n+1}\right]^{n+1} = x_{n+1},$

$$\frac{1}{y_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \cdot 1 \leq \left[\frac{(n+1) \cdot n/(n+1) + 1}{n+2}\right]^{n+2} = \frac{1}{y_{n+1}},$$

即  $\{x_n\}$  单调增加,  $\{y_n\}$  单调减少, 且

$$1 = x_1 < x_n < y_n < y_1 = 4.$$

所以  $\{x_n\}, \{y_n\}$  单调有界, 必定收敛. 由  $y_n = x_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ , 知它们有相同的极限. 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

**例 6** 证明: 若  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ , 则数列  $\{a_n\}$  收敛.

**证** 由上例知  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ , 两边取对数得,

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

即有不等式  $\frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ .

$$\begin{aligned} \text{则} \quad b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \\ &> \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} - \ln n \\ &= \ln(n+1) - \ln n > 0. \end{aligned}$$

即  $\{b_n\}$  单调减少有下界, 所以  $\{b_n\}$  收敛.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = r \approx 0.57721566490 \cdots$$

称为欧拉(Euler)数.

$$\text{例 7} \quad \text{求} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right).$$

解 将通项表示成欧拉数形式,有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

两边取极限,得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_{2n} + \ln 2n - b_n - \ln n) = \ln 2.$$

例 8 利用欧拉数证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right] = \ln 2;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = 1.$$

证 (1) 记  $d_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ . 又

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \ln n,$$

$$b_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \ln 2n,$$

将  $b_n$  的第  $2k$  项减去  $b_n$  的第  $k$  项,得

$$\begin{aligned} b_{2n} - b_n &= 1 + \left( \frac{1}{2} - 1 \right) + \frac{1}{3} + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{2n-1} \right) \\ &\quad + \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} \right) - \ln 2n + \ln n \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} - \ln 2 \\ &= d_n - \ln 2. \end{aligned}$$

所以 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln 2 + b_{2n} - b_n) = \ln 2,$$

即 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right] = \ln 2.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} (b_n + \ln n) = 1 \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = r). \end{aligned}$$



例 9 求下列极限:

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n; & \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n; \\ (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}; & \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n. \end{aligned}$$

解 利用极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  的形式性求解. 因为  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  是底为 1 加无穷小  $\frac{1}{n}$ 、指数为同一无穷小的倒数, 所以将所求极限写成这一形式, 即可直接写出极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n \cdot \frac{1}{2}} = e^{1/2}.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2 \cdot \frac{1}{n}} = e^0 = 1.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^n = +\infty.$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}} = e.$$

例 10 设  $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ , 证明  $\{a_n\}$  收敛.

证 因为  $\forall n, p \in \mathbf{N}$ ,

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\ &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

所以,  $\forall \epsilon > 0$ , 当  $n > N = \left[\frac{1}{\epsilon}\right]$  及  $p \in \mathbf{N}$ , 恒有  $|a_{n+p} - a_n| < \epsilon$ .

依柯西收敛原理, 数列  $\{a_n\}$  收敛.

例 11 设  $x_n = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n$ ,  $|a_k| < M, k = 0, 1, 2, \cdots$ , 且  $|q| < 1$ , 问  $\{x_n\}$  是否收敛.

解 设  $p$  为正整数.

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= |a_{n+1}q^{n+1} + \cdots + a_{n+p}q^{n+p}| \\
&< M(|q|^{n+1} + \cdots + |q|^{n+p}) \\
&< M \frac{|q|^{n+1}}{1 - |q|} = M_1 |q|^{n+1},
\end{aligned}$$

故当  $n > N$  时有  $|q|^{n+1} < \frac{\epsilon}{M_1}$ . 故当  $n > N$  时, 对任意正整数  $p$ , 有  $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon$ . 依柯西收敛原理,  $\{x_n\}$  收敛.

**例 12** 设  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ , 证明  $\{x_n\}$  发散.

**证** 设  $\epsilon = \frac{1}{2}$ , 取  $p = n$ , 则

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

所以,  $\{x_n\}$  不满足柯西收敛定理条件, 故数列  $\{x_n\}$  发散.

**例 13** 设  $x_1 = a, x_2 = b, x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$  ( $n \geq 3$ ). 利用区间套定理证明  $\{x_n\}$  收敛, 并求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**证** 因为

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{2}(x_{n-1} - x_{n-2}), \quad n = 3, 4, \cdots,$$

求积得

$$\prod_{i=3}^n (x_i - x_{i-1}) = \prod_{i=3}^n \left[ -\frac{1}{2}(x_{i-1} - x_{i-2}) \right] = \prod_{i=2}^{n-1} \left( -\frac{1}{2} \right) (x_i - x_{i-1}),$$

化简得

$$x_n - x_{n-1} = \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-2} (x_2 - x_1) = \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-2} (b - a),$$

求和得  $x_n - x_1 = (b - a) \frac{1 - (-1/2)^{n-1}}{1 - (-1/2)},$

即  $x_n = \frac{2}{3}(b - a)[1 - (-1/2)^{n-1}] + a.$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{3}(a + 2b).$

例 14 证明: (1)  $\left\{\sin \frac{n\pi}{4}\right\}$  发散;

(2) 给定  $x_0$ , 设  $x_1 = \cos x_0$ ,  $x_2 = \cos(\cos x_0)$ ,  $\dots$ ,  $x_n = \underbrace{\cos \cos \cdots \cos}_{n\uparrow} x_0$ , 则  $\{x_n\}$  收敛.

证 (1) 若取  $n_k = 4k$ ,  $n'_k = 8k + 2$ , 则  $\left\{\sin \frac{n\pi}{4}\right\}$  的子列  $\left\{\sin\left(\frac{\pi}{4}n_k\right)\right\}$  收敛于零, 子列  $\left\{\sin\left(\frac{\pi}{4}n'_k\right)\right\}$  收敛于 1. 由于  $\{x_n\}$  的两个子列分别收敛于不同的极限, 故  $\{x_n\}$  发散.

(2) 不妨设  $0 < x_1 < 1$ , 则  $0 \leq x_n \leq 1$ . 由于  $\cos x$  在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  内递减, 所以  $x_n$  不是单调数列, 故分别讨论单调奇子列  $\{x_{2n-1}\}$  与单调偶子列  $\{x_{2n}\}$ .

若  $x_1 \leq x_3$ , 则

$$\begin{aligned} x_4 - x_2 &= \cos x_3 - \cos x_1 \\ &= -2\sin \frac{x_3 - x_1}{2} \sin \frac{x_3 + x_1}{2} \leq 0. \end{aligned}$$

从而  $x_4 \leq x_2$ . 又

$$\begin{aligned} x_5 - x_3 &= \cos x_4 - \cos x_2 \\ &= -2\sin \frac{x_4 - x_2}{2} \sin \frac{x_4 + x_2}{2} \geq 0, \end{aligned}$$

故  $x_5 \geq x_3$ . 依次递推, 知  $\{x_{2n-1}\}$  单调递增,  $\{x_{2n}\}$  单调递减.

若  $x_1 \geq x_3$ , 可证得相同结论.

故  $\{x_{2n}\}$  与  $\{x_{2n-1}\}$  都是单调有界数列, 因而都有极限. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \alpha$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = \beta$ , 则

$$\begin{cases} \cos \alpha = \beta, \\ \cos \beta = \alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \cos(\cos \alpha), \\ \beta = \cos(\cos \beta). \end{cases}$$

由  $x = \cos(\cos x)$  零点的惟一性  $\Rightarrow \alpha = \beta$ .

所以,  $\{x_{2n}\}$  与  $\{x_{2n-1}\}$  收敛于同一极限. 即  $\{x_n\}$  收敛.

例 15 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^{3n}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3-1}{n^3-2} \right)^{4n^3}.$$

解 同例 9, 利用  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$  的形式性.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-1}{n+2} \right)^{-(n+2) \cdot 3n/(n+2)} = e^{-3}.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3-1}{n^3-2} \right)^{4n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n^3-2} \right)^{(n^3-2) \cdot 4n^3/(n^3-2)} = e^4.$$

例 16 设有一对小兔经两个月后成年, 从第三个月开始每月产一对小兔, 新出生的小兔也在出生两个月后成年, 每月产一对小兔. 假设出生的小兔均无死亡, 求:

(1) 一年后有几对兔子? (2)  $n$  个月后将有多少对兔子?

(3) 若  $n$  个月后有  $F_n$  对兔子, 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}}$ .

解 若按题示规律递推可得

月 份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
对 数	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	...

将上表表示为数列  $\{F_n\}$  ( $n$  为月数), 则

$$\{F_n\}: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

数列  $\{F_n\}$  称为斐波那契 (Fibonacci) 数列.

由数列观察到:  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n \geq 2$ .

现要求通项  $F_n$  的表达式. 构造特征方程

$$x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

解得一对特征根

$$x_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \quad x_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}),$$

则 
$$F_n = c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

将  $n = 1, 2$  代入, 可确定

$$\begin{cases} F_1 = c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + c_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1, \\ F_2 = c_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + c_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \\ c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

所以 
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

再用数学归纳法证明  $F_n$  的正确性.

$n = 1$  时,  $F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right] = 1$  显然正确.

设  $n = k$  时,  $F_k$  成立, 则  $n = k + 1$  时, 有

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right] \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right] \end{aligned}$$

所以 
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

成立. 由此可知

(1)  $n = 13, F_n = 233$  (对);

(2)  $n$  个月后, 有

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \text{ (对);}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

例 17 用有限覆盖定理证明闭区间套定理.

证 用反证法. 设闭区间套定理不成立, 即闭区间  $[a_1, b_1]$  上任一点  $x$  都不属于闭区间  $[a_k, b_k]$ , 则必存在点  $x$  的邻域  $U(x, \delta_x)$ , 使  $U(x, \delta_x) \cap [a_k, b_k] = \emptyset$ . 但  $[a_1, b_1] \subset \bigcup_{x \in (a, b)} U(x, \delta_x)$ . 依有限覆盖定理, 有

$$[a_1, b_1] \subset \bigcup_{k=1}^n U(x, \delta_x),$$

其中  $U(x, \delta_x) \cap [a_{i_k}, b_{i_k}] = \emptyset, k = 1, 2, \dots, n; i_k \in \mathbf{N}$ , 且  $i_k \geq 2$ .

设  $\max\{i_1, i_2, \dots, i_n\} = j$ , 则由闭区间套的条件(1), 有

$$\bigcap_{k=1}^n [a_{i_k}, b_{i_k}] = [a_j, b_j].$$

于是

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

有

$$U(x_k, \delta_{x_k}) \cap (a_j, b_j) = \emptyset,$$

即

$$\bigcup_{i=1}^n U(x_k, \delta_{x_k}) \cap [a_j, b_j] = \emptyset.$$

这样, 一方面有  $[a_1, b_1] \subset \bigcup_{k=1}^n U[x_k, \delta_{x_k}]$ , 另一方面,  $\bigcup_{k=1}^n U(x_k, \delta_{x_k})$  又不包含  $[a_j, b_j] \subset [a_1, b_1]$ , 从而引出矛盾. 故假设不成立.

惟一性证明只用到闭区间套的条件(2), 而其它证法相同, 不再写出.

例 18 设  $\{f_n(x)\}$  是  $[a, b]$  上连续函数列, 在  $[a, b]$  上收敛于连续函数  $f(x)$ . 若  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上单调减少, 证明  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛.

证  $\forall \epsilon > 0$ , 对任  $x_0 \in [a, b]$ ,  $\exists N_0$ , 使

$$|f_{N_0}(x_0) - f(x_0)| < \epsilon.$$

又由  $f_{N_0}(x)$  及  $f(x)$  的连续性, 有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f_{N_0}(x) - f(x)| = |f_{N_0}(x_0) - f(x_0)|.$$

从而对所给  $\epsilon$ ,  $\exists \delta_{x_0} > 0$ , 使当

$$x \in (x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0}) \cap [a, b]$$

时,有  $|f_{N_0}(x) - f(x)| < \epsilon$ .

由于  $\{f_n(x)\}$  单调递减,故当  $n > N_0$  时,有

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_{N_0}(x) - f(x)| < \epsilon$$

在  $(x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0}) \cap [a, b]$  上成立.

因为  $[a, b] \subset \bigcup_{k=1}^m (x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0})$ ,

故由有限覆盖定理,有

$$[a, b] \subset \bigcup_{k=1}^m (x_k - \delta_{x_k}, x_k + \delta_{x_k}).$$

设  $\max\{N_1, N_2, \dots, N_m\} = e$ ,

于是,当  $n > l$  时,对任意的  $x \in [a, b]$ ,有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

成立. 所以,函数列  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛于连续函数  $f(x)$ .

## 第六节 数列的上、下极限

### 主要内容

1. 上、下极限的聚点定义 有界数列  $\{a_n\}$  的上、下极限定义为  $\{a_n\}$  的最大(小)聚点,记作

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n (= A), \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n (= a).$$

2. 上、下极限的  $\epsilon$ - $N$  定义  $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$ , 当  $n > N$  时, 总有  $a_n < A + \epsilon$ ; 又  $\exists$  子列  $\{a_{n_k}\}$ , 使  $a_{n_k} > A - \epsilon$  ( $k \in \mathbf{N}$ ), 则有  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n (= A)$ .

$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$ , 当  $n > N$  时, 总有  $a_n > a - \epsilon$ ; 又  $\exists$  子列  $\{a_{n_k}\}$ , 使  $a_{n_k} < a + \epsilon$  ( $k \in \mathbf{N}$ ), 则有  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n (= a)$ .

### 3. 上、下极限的确界定义

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k = \inf_n \sup_{k \geq n} a_k \quad (= A),$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k = \sup_n \inf_{k \geq n} a_k \quad (= a).$$

### 4. 上、下极限的基本性质

$$(1) \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  的充分必要条件是

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (a \text{ 为有限数或 } \pm \infty).$$

(3) 对  $\{a_n\}$  的子列  $\{a_{n_k}\}$ , 有

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$$

(4) 上、下极限有保不等式性  $\forall n \geq n_0$ , 若  $a_n \leq b_n$ , 则

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

$$(5) \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n),$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

## 方法、技巧与典型例题分析

上、下极限的概念比普通的极限概念要更复杂, 关于上、下极限命题的证明也比普通极限的命题复杂和困难, 所以我们只讨论数列有界的情况. 读者要注意逻辑的正确性与思维的严密性, 若遇到不等式的情形更应如此.

例 1 证明:

$$(1) \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n;$$

$$(2) \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

证 先证  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则依上极限定义,  $\forall \varepsilon > 0$ , 数列  $\{a_n\}$  中至多只有



$N$  项大于  $a + \varepsilon$ , 而有无穷项小于  $a - \varepsilon$ ; 即对  $\{-a_n\}$ , 至多有  $N$  项小于  $-a - \varepsilon$ , 而有无穷项大于  $-a + \varepsilon$ , 所以依下极限定义, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -a, \quad \text{即} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n).$$

$$(1) \text{ 设 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = c.$$

用反证法. 设  $c < a + b$ . 依下极限定义,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ , 当  $n > N$  时, 有  $a_n + b_n < c + \varepsilon$ . 不妨设  $\varepsilon = \frac{1}{2}(a + b - c)$ , 则

$$\text{当 } n < N \text{ 时, } a_n + b_n < c + \varepsilon < a + b - \varepsilon.$$

又有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , 依下极限定义, 则

$$\text{当 } n < N_1 \text{ 时, } a_n < a - \frac{\varepsilon}{2}; \text{ 当 } n < N_2 \text{ 时, } b_n < b - \frac{\varepsilon}{2}.$$

由此推出矛盾. 故  $a + b \leq c$ , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n).$$

又令  $d_n = a_n + b_n$ , 则  $a_n = d_n + (-b_n)$ . 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n + \lim_{n \rightarrow \infty} (-b_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

$$\text{由于} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-b_n) = -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$\text{所以} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

(2) 以  $-b_n$  及  $-a_n$  分别代替题(1)中的  $a_n$  与  $b_n$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-b_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} -(a_n + b_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} -b_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ , 得

$$-\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq -\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

$$\text{即} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

当  $\{a_n\}: 0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots; \{b_n\}: 2, 3, 1, 2, 3, 1, \dots$  时, 题(1)、题(2)中仅不等号成立. 读者可自己举出类似例子.

例 2 设  $a_n \geq 0, b_n \geq 0, n = 1, 2, \dots$ , 证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{b_n} \leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n} \leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \cdot \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

证 (1) 先证右边不等式. 依定义,  $\{a_n\}$  存在子列  $\{a_{n_k}\}$ , 使  $a_{n_k} \rightarrow a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0$ ; 而对  $\{b_n\}$  也存在子列  $\{b_{n_{ki}}\}$ , 使  $b_{n_{ki}} \rightarrow b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq 0$ .

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n_k} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ,  $a_{n_{ki}} b_{n_{ki}} \rightarrow ab$ , 知  $ab$  是数列  $\{a_n b_n\}$  的一个聚点, 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \leq ab$ .

由于  $a \geq 0, b \geq 0$ , 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \leq ab \leq a \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

再证左边不等式. 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  时, 不等式显然成立. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b_0$ , 依定义,  $\exists N > 0$ , 当  $n > N$  时,  $a_n > 0$ . 又, 依定义,  $\{a_n b_n\} \ni$  子数列  $\{a_{n_k} b_{n_k}\}$ , 使  $a_{n_k} b_{n_k} \rightarrow a' = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n$ ;  $\{a_n\} \ni$  子数列  $\{a_{n_{ki}}\}$ , 使  $a_{n_{ki}} \rightarrow b' = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

因为  $b' = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b_0, a_n \geq 0$ , 所以

$$b_{n_{ki}} = a_{n_{ki}} b_{n_{ki}} / a_{n_{ki}} \rightarrow \frac{a'}{b'}.$$

即  $\frac{a'}{b'}$  是  $\{b_n\}$  的一个聚点, 即  $\frac{a'}{b'} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . 从而知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = a' \geq b' \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

(2) 类似可证. 请读者一试.

例 3 证明: 若  $a_n > 0$ , 对  $\{a_n\}$ , 有

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1 + a_n}{a_n} - 1 \right)} \geq 1.$$

证 用反证法. 设  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1 + a_n}{a_n} - 1 \right)} < 1$ , 则  $\exists N > 0$ , 当  $n \geq N$  时, 有

$$n \left( \frac{1 + a_n}{a_n} - 1 \right) < 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1}, n \geq N.$$

将一连串不等式中前  $k$  个相加, 得

$$\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{N+k} < \frac{a_N}{N} - \frac{a_{N+k}}{N+k} < \frac{a_N}{N}, k > 1.$$

但事实上,当  $k \rightarrow \infty$  时,上式左边  $\rightarrow +\infty$ ,矛盾.故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1+a_n}{a_n} - 1 \right) \geq 1.$$

**例 4** 证明:若  $a_n > 0, n = 1, 2, \cdots$ , 有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 1,$$

则数列  $\{a_n\}$  收敛.

**证** 设  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}, a > 0$ .

依定义,  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N$  时, 有  $\frac{1}{a_n} < \frac{1}{a} + \frac{\epsilon}{a}$ . 故

$$a_n > \frac{a}{1+\epsilon} = a \left( 1 - \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \right) > a(1-\epsilon),$$

即  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \geq a$ . 因为  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ , 所以  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ , 数列  $\{a_n\}$  收敛.

**例 5** 证明:若  $a_n > 0, n = 1, 2, \cdots$ , 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

**证** 设  $a = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ , 当  $a = +\infty$ , 不等式必成立.

当  $0 \leq a < +\infty$  时, 依极限定义,  $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$ , 当  $k > N$  时, 有  $\frac{a_{k+1}}{a_k} < a + \epsilon$ .

任取  $n > N$ , 令  $k = N, N+1, \cdots, n-1$ , 将所得  $n-N$  个不等式相乘, 得

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} < (a + \epsilon)^{n-N},$$

即  $\frac{a_n}{a_N} < (a + \epsilon)^{n-N} \Rightarrow a_n < M(a + \epsilon)^n$ .

其中  $M = a_N(a + \epsilon)^{-N}$ . 于是  $\sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{M}(a + \epsilon)$ , 得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M}(a + \epsilon) = a + \epsilon.$$

由  $\epsilon$  的任意性知, 所证不等式成立.

例 6 设有数列  $\{a_n\}$  及常数  $d \geq 2$ , 令

$$b_n = a_n + da_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

证明: 数列  $\{b_n\}$  收敛的充要条件是数列  $\{a_n\}$  收敛.

证 充分性是显然的. 现证必要性.

设  $\{b_n\}$  收敛, 则  $\{b_n\}$  有界  $\Rightarrow \{a_n\}$  有界. 因为若有  $|a_1| \leq M$ ,  $|b_n| \leq M$ , 则当  $|a_n| \leq M$  时, 有

$$|a_{n+1}| = \left| \frac{1}{d}b_n - \frac{1}{d}a_n \right| \leq \frac{|b_n|}{d} + \frac{|a_n|}{d} \leq \frac{2}{d}M \leq M.$$

所以  $\{a_n\}$  有界.

又设  $\varliminf_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , 对等式  $a_n = b_n - da_{n+1}$

两边分别取上、下极限, 利用

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-a_n) &= -\varliminf_{n \rightarrow \infty} a_n, & \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= \varliminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \end{aligned}$$

得

$$A = b - da, \quad a = b - dA.$$

立即可得  $a = A$ , 所以  $\{a_n\}$  收敛.

## 第二章 函数、极限与连续性

### 第一节 映射与函数

#### 主要内容

##### 一、映射

1. 设  $A, B$  为两个非空集合. 若对每一个  $x \in A$ , 按照某一确定法则  $f$ , 有惟一确定的  $y \in B$  与之对应, 则称法则  $f$  是从集合  $A$  到集合  $B$  的一个映射 (又称算子), 记作

$$f: A \rightarrow B \quad \text{或} \quad f: x \rightarrow y = f(x), \quad x \in A.$$

其中,  $y$  称为元素  $x$  在映射  $f$  下的像,  $x$  称为  $y$  在映射  $f$  下的一个逆像 (原像). 集合  $A$  称为映射  $f$  的定义域, 记作  $D(f) = A$ .  $A$  中所有元素  $x$  的像  $y$  的全体所构成的集合称为映射  $f$  的值域, 记作  $R(f)$  (或  $f(A)$ ), 即

$$R(f) = f(A) = \{y \mid y = f(x), \quad x \in A\}.$$

2. 设  $f$  是从集合  $A$  到集合  $B$  的一个映射, 若对  $A$  中的任意两个不同的元素  $x_1 \neq x_2$ , 它们的像  $y_1 \neq y_2$ , 则称  $f$  是从  $A$  到  $B$  的一个单射; 如果  $R(f) = B$ , 即  $B$  中每一元素  $y$  都是  $A$  中某元素的像, 则称  $f$  是从  $A$  到  $B$  的满射; 如果  $f$  既是单射又是满射, 则称  $f$  为双射 (一一映射).

3. 设  $f: A \rightarrow B$  是单射, 则由映射定义, 对每一  $y \in R(f)$ , 有惟一的  $x \in A$  满足  $f(x) = y$ . 对应关系  $g: R(f) \rightarrow A$  定义一个从  $R(f)$  到  $X$  的映射, 称为  $f$  的逆映射, 记作  $f^{-1}$ . 定义域为  $D(f^{-1}) =$

$R(f)$ , 值域为  $R(f^{-1}) = A$ .

4. 设有两个映射  $g: A \rightarrow B_1, f: B_2 \rightarrow C$ , 如果  $B_1 \subset B_2$ , 则对应关系  $f \circ g: A \rightarrow C$  或  $(f \circ g)(x) = f[g(x)], x \in A$  定义一个从  $A$  到  $C$  的映射, 称为映射  $f$  和  $g$  的复合映射.

## 二、函数

1. 设有两个实数集  $A$  和  $B$ , 若存在一个对应法则  $f$ , 使集  $A$  内的每一个数  $x$ , 都有一个惟一的数  $y \in B$  与之对应, 则称  $f$  是定义在集  $A$  上的函数. 记作  $f: x \rightarrow y = f(x)$ .  $y = f(x)$  称为一元实函数, 简称函数.  $A$  称为定义域.

函数  $f$  给出  $x$  轴上点集  $A$  到  $y$  轴上点集  $B$  的一个映射.

2. 函数的表示法即对应法则  $f$  的表示法, 有列表法、图示法和公式法.

函数的公式法表示除形式  $y = f(x)$  外, 还有分段表示、隐式表示与参数表示.

### 3. 函数的几个特性

(1) 奇偶性 设  $f$  为定义在对称于原点的数集  $D$  上的函数, 若对  $x \in D$ , 有  $-x \in D$ , 满足

$$f(x) = -f(-x) \quad (\text{或 } f(x) = f(-x)), \quad x \in D,$$

则称  $f$  为  $D$  上的奇函数(或偶函数).

(2) 有界性 设  $f(x)$  在  $D$  上有定义, 若  $\exists M > 0$ , 使  $\forall x \in D$ , 有  $|f(x)| \leq M$ , 则称  $f$  为  $D$  上的有界函数.

(3) 单调性 设  $f(x)$  在  $D$  上有定义, 若  $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \leq x_2$  时, 有

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) \geq f(x_2)),$$

则称函数  $f$  在  $D$  上单调增加(或减少). 当式中等号不存在时, 称严格单调增加(或减少).

(4) 周期性 设  $f(x)$  在  $D$  上有定义, 若存在正数  $T$ , 使对于一切  $x \in D, f(x + T) = f(x)$  成立, 则  $f$  为  $D$  上的周期函数,  $T$  为  $f$  的周期.  $T$  中的最小值称为最小周期, 简称周期.

4. 设有函数  $f: A \rightarrow \mathbf{R}$  与  $g: B \rightarrow \mathbf{R}$ , 若  $R(f) \subseteq B$ , 则称复合映射  $\varphi = g \circ f: A \rightarrow \mathbf{R}$  为  $g$  与  $f$  的复合函数. 如  $y = g(u), u = f(x), u \in R(f)$ , 则

$$y = \varphi(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)], \quad x \in A.$$

其中  $u$  称为中间变量, “ $\circ$ ” 表示复合运算.

5. 设有函数  $f: A \rightarrow B = R(f)$ , 若存在函数  $g: R(f) \rightarrow A$ , 使  $g$  是  $f$  的逆映射,  $f$  是可逆的. 则  $g$  称为  $f$  的反(逆)函数, 记作

$$g = f^{-1}.$$

6. 常数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数. 由基本初等函数经有限次四则运算与复合运算得到的可由一个式子表示的函数, 称为初等函数.

## 疑难解析

### 1. 构成一个映射有哪些条件与要求?

答 构成一个映射必须具备下列三个基本要素:

- (1) 集合  $A$ , 即定义域  $D(f) = A$ ;
- (2) 集合  $B$ , 即限制值域的范围:  $R(f) \subset B$ ;
- (3) 对应法则  $f$ , 使每个  $x \in A$ , 有惟一的  $y = f(x)$  与之对应.

在这里, 映射有两点要求: 一是元素的像必须是惟一的. 如  $f: y^2 = x$  就不是一个映射; 凡是不满足像的唯一性要求的对应法则, 一般只要对值域范围稍加限制, 就能使之成为映射. 二是不要求原像也具有惟一性. 如  $f: y = x^2$  是一个映射.

### 2. 说明函数与映射的关系?

答 在映射的定义中, 若  $B$  是一个实数集, 则称映射  $f: A \rightarrow B$  是泛函; 若  $A, B$  都是实数集, 则映射  $f: A \rightarrow B$  是一元函数. 若  $A = B$ , 则  $f$  是  $A$  到自身的映射, 称为  $A$  上的一个变换. 若集  $A$  中的每个元素都映为自己, 则映射称为恒等映射或单位映射, 记作  $I_A$  或  $I$ , 即  $\forall x \in A, I_x = x$ .

## 方法、技巧与典型例题分析

映射的基本概念必须十分熟悉,才能证明关于映射的一些命题.证明中要特别注意元素的任意性,只有任意性才能保证命题的普通性.证明技巧中很重要的一点是反证法的运用,用好反证法将给我们解题以很大便利.

**例 1** 设  $A = B = [0, 1]$ , 则  $\varphi_1(x) = \frac{1}{2}x$ ,  $\varphi_2(x) = \sin\pi x$ ,  $\varphi_3(x) = x$  都是什么样的映射.

**解**  $\varphi_1$  是从  $A$  到  $B$  的单射,不是满射; $\varphi_2$  是从  $A$  到  $B$  的满射,不是单射; $\varphi_3$  是从  $A$  到  $B$  的双射.

**例 2** 设映射  $f: A \rightarrow B$  是可逆的,证明:其逆映射是惟一的.

**证** 用反证法.设  $g_1, g_2$  都是  $f$  的逆映射,且  $g_1 \neq g_2$ , 则  $\exists y \in B$ , 使得  $g_1(y) \neq g_2(y)$ . 由于有  $f \circ g_2(y) = y$ , 得  $g_1 \circ f \circ g_2(y) = g_1(y)$ . 又  $g_1 \circ f = I_A$ , 得  $g_1 \circ f \circ g_2(y) = g_2(y)$ , 即有  $g_1(y) = g_2(y)$ , 推出矛盾, 所以假设不成立. 映射  $f: A \rightarrow B$  可逆, 则其逆映射是惟一的.

**例 3** 设  $f: A \rightarrow B$  与  $g: B \rightarrow A$  是两个任意映射, 若  $g \circ f = I_A$ , 证明  $f$  是单射,  $g$  是满射.

**证** 因为  $\forall x \in A, \exists$  元素  $f(x) \in B$ , 使  $g[f(x)] = x$ , 所以  $g$  是满射.

用反证法证明  $f$  是单射. 设有  $x_1 \neq x_2$ , 使  $f(x_1) = f(x_2)$ , 则  $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ . 又  $g \circ f = I_A$ , 故  $x_1 = x_2$ , 推出矛盾. 所以  $f$  一定是单射.

**例 4** 设有映射  $f: X \rightarrow Y, A \subseteq X, B \subseteq Y$ , 证明:

(1)  $f[f^{-1}(B)] = B \cap f(X)$ ;

(2)  $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ , 若  $f$  是单射, 则  $f^{-1}[f(A)] = A$ ;

(3)  $f[f^{-1}(B)] = B \Leftrightarrow f$  为满射.



证 (1)  $f[f^{-1}(B)] \subseteq B \cap f(X)$  是显然的. 又由  $B \cap f(X) \subseteq B, f^{-1}[B \cap f(X)] \subseteq f^{-1}(B)$ , 所以  $B \cap f(X) \subset f[f^{-1}(B)]$ .  
故  $f[f^{-1}(B)] = B \cap f(X)$ .

(2) 只需证  $f^{-1}[f(A)] \subseteq A$ . 因为  $\forall x \in f^{-1}[f(A)], \exists y \in f(A)$ , 使得  $x = f^{-1}(y)$ , 所以  $y = f(x)$ . 即  $f^{-1}[f(A)] \subseteq A$ .

若  $f$  是单射, 则  $f^{-1}[f(A)] = A$ .

(3) 先证充分性. 由题(1)知  $f[f^{-1}(B)] \subseteq B$ , 又因为  $f$  是满射,  $\forall y \in B, \exists x \in f^{-1}(B)$ , 使  $f(x) = y$ , 故  $y \in f[f^{-1}(B)]$ , 因而  $B \subseteq f[f^{-1}(B)]$ . 于是  $f[f^{-1}(B)] = B$ . 而必要性是显然的.

例 5 设映射  $f: X \rightarrow Y, A, B \subseteq X$ . 证明:

(1)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ ;

(2)  $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ ;

(3) 若  $f$  为单射, 则题(2)成为等式.

证 (1)  $\forall y \in f(A \cup B), \exists x \in A \cup B$ , 当  $x \in A$  时,  $y \in f(A)$ ; 当  $x \in B$  时,  $y \in f(B)$ . 所以  $y \in f(A) \cup f(B)$ . 故

$$f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B).$$

又  $\forall y \in f(A) \cup f(B)$ , 当  $y \in f(A)$  时,  $\exists x \in A$ , 使  $f(x) = y$ ; 当  $y \in f(B)$  时,  $\exists x \in B$ , 使  $f(x) = y$ . 故

$$f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B).$$

综上所述得,  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .

(2) 因为  $\forall y \in f(A \cap B), \exists x \in A \cap B$ , 使  $f(x) = y$ , 即  $x \in A$  且  $x \in B$ , 故  $y \in f(A)$  且  $y \in f(B)$ . 故

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(3) 因为题(2)  $\forall y \in f(A) \cap f(B)$ . 有  $y \in f(A)$  且  $y \in f(B)$ . 所以  $\exists x_1 \in A$ , 使  $f(x_1) = y, \exists x_2 \in B$ , 使  $f(x_2) = y$ . 又因为  $f$  是单射, 所以  $x_1 = x_2$ , 即  $x \in A \cap B$ , 又  $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$ , 故  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ .

例 6 证明:  $f$  是  $A$  到  $B$  上可逆映射的充分必要条件是  $f$  是  $A$  到  $B$  的双射.

证 充分性 设  $f$  是  $A$  到  $B$  的双射, 则  $\forall y \in B, \exists$  惟一的  $x \in A$ , 使得  $y = f(x)$ . 由此作从  $B$  到  $A$  的映射:  $f^{-1}y \rightarrow x$ , 则  $\forall x \in A$ , 有

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(y) = x,$$

即  $f^{-1} \circ f = I_A$ . 同时,  $\forall y \in B$ , 有

$$(f \circ f^{-1})(y) = f[f^{-1}(y)] = f(x) = y.$$

即  $f \circ f^{-1} = I_B$ . 因此,  $f$  是可逆的.

必要性 设  $f$  可逆, 故存在  $f^{-1}: B \rightarrow A$ , 使得  $f^{-1} \circ f = I_A$ ,  $f \circ f^{-1} = I_B$ , 于是,  $\forall x_1, x_2 \in A$ , 当  $f(x_1) = f(x_2)$  时, 有

$$\begin{aligned} x_1 &= (f^{-1} \circ f)(x_1) = f^{-1}[f(x_1)] = f^{-1}[f(x_2)] \\ &= (f^{-1} \circ f)(x_2) = x_2. \end{aligned}$$

所以,  $f$  是单射. 又,  $\forall y \in B$ , 有

$$y = (f \circ f^{-1})(y) = f[f^{-1}(y)],$$

即  $R(f) = B$ , 故知  $f$  又是满射. 从而  $f$  是双射.

掌握函数的基本概念, 对函数式、函数的定义域、值域、复合函数和反函数有足够的了解, 能够求出函数表达式、定义区域和函数, 会复合和分解函数, 会从已知函数求出函数的反函数.

例7 设  $f(x) = 2x - x^2$  ( $0 \leq x \leq 1$ ), 求定义于  $(-\infty, +\infty)$  的函数  $F(x)$ , 使  $F(x)$  满足以下条件:

- (1)  $F(x) \equiv f(x)$  ( $0 \leq x \leq 1$ );
- (2)  $F(-x) = -F(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ );
- (3)  $F(x+2) = -F(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ).

解 由条件(3)知  $F(x+4) = -F(x+2) = F(x)$ , 所以  $F(x)$  是  $T=4$  的周期函数. 在  $[-2, 2]$  上考虑  $F(x)$  的表达式, 因为在  $[0, 1]$  上有

$$F(x) = f(x) = 2x - x^2 = 1 - (x-1)^2,$$

由  $F(-x) = -F(x)$ , 故在  $[-1, 0)$  上有

$$F(x) = -[1 - (-x-1)^2] = (x+1)^2 - 1,$$

由  $F(x+2) = -F(x)$ , 故在  $[1, 2)$  上有

$$F(x) = -\{[(x-2)+1]^2 - 1\} = 1 - (x-1)^2.$$

又由  $F(-x) = -F(x)$ , 故在  $[-2, -1)$  上有

$$F(x) = [1 - (-x-1)^2] = (x+1)^2 - 1.$$

综上所述得, 在  $[-2, 2]$  上有

$$F(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 1, & -2 \leq x < 0, \\ 1 - (x-1)^2, & 0 \leq x < 2. \end{cases}$$

考察到  $T = 4$ , 故在  $(-\infty, +\infty)$  上有

$$F(x) = \begin{cases} (x-4k+1)^2 - 1, & 4k-2 \leq x < 4k, \\ 1 - (x-4k-1)^2, & 4k \leq x < 4k+2, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

例 8 设  $f(x) = \frac{1}{\lg(3-x)} + \sqrt{49-x^2}$ , 求  $f(x)$  的定义域与  $f[f(-7)]$ .

解  $\frac{1}{\lg(3-x)}$  要求  $3-x > 0, 3-x \neq 1$ , 即  $-\infty < x < 2 \cup 2 < x < 3$ .  $\sqrt{49-x^2}$  要求  $-7 \leq x \leq 7$ . 故  $f(x)$  的定义域为  $-7 \leq x < 2 \cup 2 < x < 3$ .

因为  $f(-7) = \frac{1}{\lg 10} + 0 = 1$ , 所以

$$f[f(-7)] = f(1) = \frac{1}{\lg 2} + 4\sqrt{3}.$$

例 9 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{|x| - x}; \quad (2) y = \frac{1}{x} \ln \frac{1-x}{1+x};$$

$$(3) y = \sqrt{2+x-x^2} + \arcsin\left(\lg \frac{x}{10}\right);$$

$$(4) y = \arcsin \frac{2x}{1+x}.$$

解 (1)  $|x| - x \neq 0$ , 定义域即  $|x| \neq x$  的点集.

(2)  $x \neq 0, \frac{1-x}{1+x} > 0$ . 定义域为  $(-1, 0) \cup (0, 1)$ .

$$(3) x \text{ 满足 } \begin{cases} 2+x-x^2 \geq 0, \\ \left| \lg \frac{x}{10} \right| \leq 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2-x)(1+x) > 0, \\ -1 \leq \lg \frac{x}{10} \leq 1. \end{cases}$$

由第一式得  $-1 \leq x \leq 2$ , 由第二式得  $1 \leq x \leq 100$ . 定义域为  $[1, 2]$ .

(4) 由

$$\left| \frac{2x}{1+x} \right| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{2x}{1+x} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 2 - \frac{2}{1+x} \leq 1,$$

即  $-3 \leq \frac{-2}{1+x} \leq 1$ , 解得  $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ . 定义域为  $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$ .

**例 10** 设  $f(x)$  的定义域为  $[0, 1]$ , 求下列函数的定义域:

$$(1) f\left(\sin \frac{\pi}{x}\right); \quad (2) f(x-a) + f(x+a) \quad (a > 0).$$

**解** (1) 因为对  $f(x)$  要求  $0 \leq x \leq 1$ , 即要求  $0 \leq \sin \frac{\pi}{x} \leq 1$ , 所以  $2n\pi \leq \frac{\pi}{x} \leq (2n+1)\pi, n \in \mathbf{Z}$ .

当  $n = 0$  时,  $0 \leq \frac{1}{x} \leq 1$ , 即  $x \geq 1$ .

当  $n \neq 0$  时,  $2n \leq \frac{1}{x} \leq 2n+1$ , 即  $x \in \left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right]$ .

故  $f\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$  的定义域为  $\left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right] \cup [1, +\infty)$ .

(2) 由  $f(x)$  的定义域为  $[0, 1]$  知, 应有

$$\begin{cases} 0 \leq x-a \leq 1, \\ 0 \leq x+a \leq 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq x \leq 1+a, \\ -a \leq x \leq 1-a. \end{cases}$$

因为  $a > 0$ , 故当  $1-a \geq a$  (即  $0 < a \leq 1/2$ ) 时,  $a \leq x \leq 1-a$ .  
当  $1-a < a$  (即  $a > 1/2$ ) 时, 不等式组无解. 定义域为  $[a, 1-a]$  ( $0 < a < 1/2$ ).

**例 11** 设  $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2}}$ , 求:

$$(1) f(x) \text{ 的定义域}; \quad (2) \frac{1}{2} \{f[f(x)]\}^2.$$

解 (1) 因为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sqrt{2x}, & x > 0, \end{cases}$$

所以定义域为 $(-\infty, +\infty)$ .

$$\begin{aligned} (2) \text{ 由 } f[f(x)] &= \sqrt{\sqrt{x + \sqrt{x^2}} + \sqrt{\left(\sqrt{x + \sqrt{x^2}}\right)^2}} \\ &= \sqrt{2\sqrt{x + \sqrt{x^2}}} = \sqrt{2f(x)}, \end{aligned}$$

$$\text{得 } \frac{1}{2}\{f[f(x)]\}^2 = \frac{1}{2}\{\sqrt{2f(x)}\}^2 = \frac{1}{2} \cdot 2f(x) = f(x).$$

求函数定义域时要注意以下几点: (1) 负数不能开偶次方; (2) 分式的分母不能为零; (3) 对数的真数必须是正数; (4) 反三角函数值有限制; (5) 反函数  $y = f^{-1}(x)$  的定义域是原来函数  $y = f(x)$  的值域; (6) 奇、偶函数定义域是关于原点对称的数集; (7) 有限个函数四则运算得到的函数的定义域是这些函数定义域的交集; (8) 复合函数  $z = f[\varphi(x)]$  的定义域一般是  $y = \varphi(x)$  定义域的子集, 在子集上  $y = \varphi(x)$  的值域属于  $z = f(y)$  的定义域; (9) 应用问题函数的定义域要考虑问题的具体条件与意义来确定.

例 12 证明: 若对任意实数  $x$  和  $y$ , 有

$$2f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y),$$

且  $f(x) \neq 0$ , 则:

$$(1) [f(x)]^2 = \frac{1}{2}[f(2x) + 1];$$

$$(2) [f(x)]^2 + [f(y)]^2 = f(x+y)f(x-y) + 1.$$

证 此类问题一般通过对已知等式中的  $x$  或  $y$  取特殊值来证.

(1) 在等式中令  $y = 0$ , 得  $2f(x)f(0) = 2f(x)$ . 由  $f(x) \neq 0$  和上式的普通性, 必  $f(0) = 1$ . 再在等式中令  $x = y$ , 得

$$2[f(x)]^2 = 2f(2x) + 1 \Rightarrow [f(x)]^2 = \frac{1}{2}[f(2x) + 1].$$

(2) 在等式中以  $x+y$  与  $x-y$  分别替代  $x$  与  $y$ , 并利用题(1)的结果, 得

$$\begin{aligned} 2f(x+y)f(x-y) &= f(2x) + f(2y) \\ &= 2[f(x)]^2 + 2[f(y)]^2 - 2, \end{aligned}$$

所以  $[f(x)]^2 + [f(y)]^2 = f(x+y)f(x-y) + 1$ .

例 13 已知  $f(x)$  是单值函数, 且满足方程

$$f^2(\ln x) + 2xf(\ln x) + x^2 \ln x = 0 \quad (0 < x < e),$$

$f(0) = 0$ , 求  $f(x)$ .

解 设  $t = \ln x$ , 则  $x = e^t$ , 关系式化为

$$f^2(t) + 2e^t f(t) + e^{2t} t = 0.$$

解得  $f(t) = e^t(1 \pm \sqrt{1-t})$ , 由  $f(0) = 0$ , 得

$$f(x) = e^x(1 - \sqrt{1-x}).$$

例 14 设  $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x} + 3$ , 求  $f(x)$ .

解法 1 (化变量法)

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 1,$$

故

$$f(x) = x^2 + 1.$$

解法 2 设  $t = x + \frac{1}{x}$ , 则  $t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ . 因此

$$f(t) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 + 1 = t^2 + 1,$$

故

$$f(x) = x^2 + 1.$$

类似可求下列各题:

已知  $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$  ( $x > 0$ ), 则

$$f(x) = \frac{1}{x}(1 + \sqrt{x^2 + 1}).$$

已知  $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$ , 则  $f(x) = x^2 - 5x + 6$ .

例 15 设  $z = \sqrt{y} + f(\sqrt[3]{x} - 1)$ , 且  $y = \frac{1}{z} = x$ . 求  $f(x)$

及  $z$  的表达式.

解 取  $y = 1, z = x$  代入已知表达式, 得

$$x = 1 + f(\sqrt[3]{x} - 1) \Rightarrow x - 1 = f(\sqrt[3]{x} - 1).$$

令  $\sqrt[3]{x} - 1 = t$ , 则  $x = (t + 1)^3$ , 上式化为

$$f(t) = (t + 1)^3 - 1 = t^3 + 3t^2 + 3t,$$

即  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x, z = \sqrt{y} + (x - 1).$

例 16 设对任意  $x, y \in \mathbf{R}$ , 若有  $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{1}{2}[f(x) + f(y)]$ , 且  $f(x) \geq 0, f(0) = c$ , 证明: 对任意  $x \in \mathbf{R}, f(x) = c$ .

证 不等式  $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{1}{2}[f(x) + f(y)]$  说明在任意区间  $[a, b]$  上, 函数  $f(x)$  在区间中点  $\frac{a+b}{2}$  的值不小于两端点上函数值  $f(a)$  与  $f(b)$  的算术平均值, 则函数曲线是水平的或向上凸起的. 若  $f(x) \geq 0$ , 则  $f(x)$  只能是水平线. 先用反证法证  $f(x) \geq c$ .

设  $\exists a \in \mathbf{R}$ , 有  $f(a) < c = f(0)$ . 又设  $f(0) - f(a) = h > 0$ . 在题给不等式中, 令  $x = 0, y = 2a$ , 则有

$$2f(a) \geq f(0) + f(2a)$$

或  $f(2a) \leq f(0) - 2[f(0) - f(a)] = f(0) - 2h.$

令  $x = a, y = 3a$ , 类似推出

$$f(3a) \leq 2f(2a) - f(a) \leq f(0) - 3h, \dots$$

由数学归纳法可证, 对任意  $n$ , 有

$$f(na) \leq f(0) - nh.$$

因为  $h > 0$ , 故当  $n$  充分大时, 有  $f(na) < 0$ . 这与  $f(x) \geq 0$  矛盾, 所以, 对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 有  $f(x) \geq c$ .

再来证  $f(x) = c$ . 因为对题给的不等式, 若取  $y = -x$  ( $x \in \mathbf{R}$ ), 有  $2f(0) = 2c \geq f(x) + f(-x)$ . 由于  $f(x) \geq c, f(-x) \geq c$ , 故必  $f(x) = f(-x) = c$ . 即对任意  $x \in \mathbf{R}, f(x) = c$ .

例 17 设  $f(x) = \frac{x}{x-1}$ , 求  $f\{f[f(f(x))]\}$  和  $f[1/f(x)]$

$(x \neq 0, x \neq 1)$ .

解 
$$f[f(x)] = \frac{x/(x-1)}{x/(x-1) - 1} = x,$$

$$f[f(f(x))] = \frac{x}{x-1} = f(x),$$

$$f\{f[f(f(x))]\} = f(f(x)) = x.$$

又  $1/f(x) = (x-1)/x = 1 - 1/x$ , 所以

$$f[1/f(x)] = f(1 - 1/x) = \frac{1 - 1/x}{(1 - 1/x) - 1} = 1 - x.$$

例 18 设函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & |x| \leq 2, \\ 2, & |x| > 2, \end{cases}$$

求  $f[f(x)], f[g(x)], g[f(x)], g[g(x)]$ .

解  $f(x), g(x)$  的图形分别如图 2.1(a), (b) 所示.

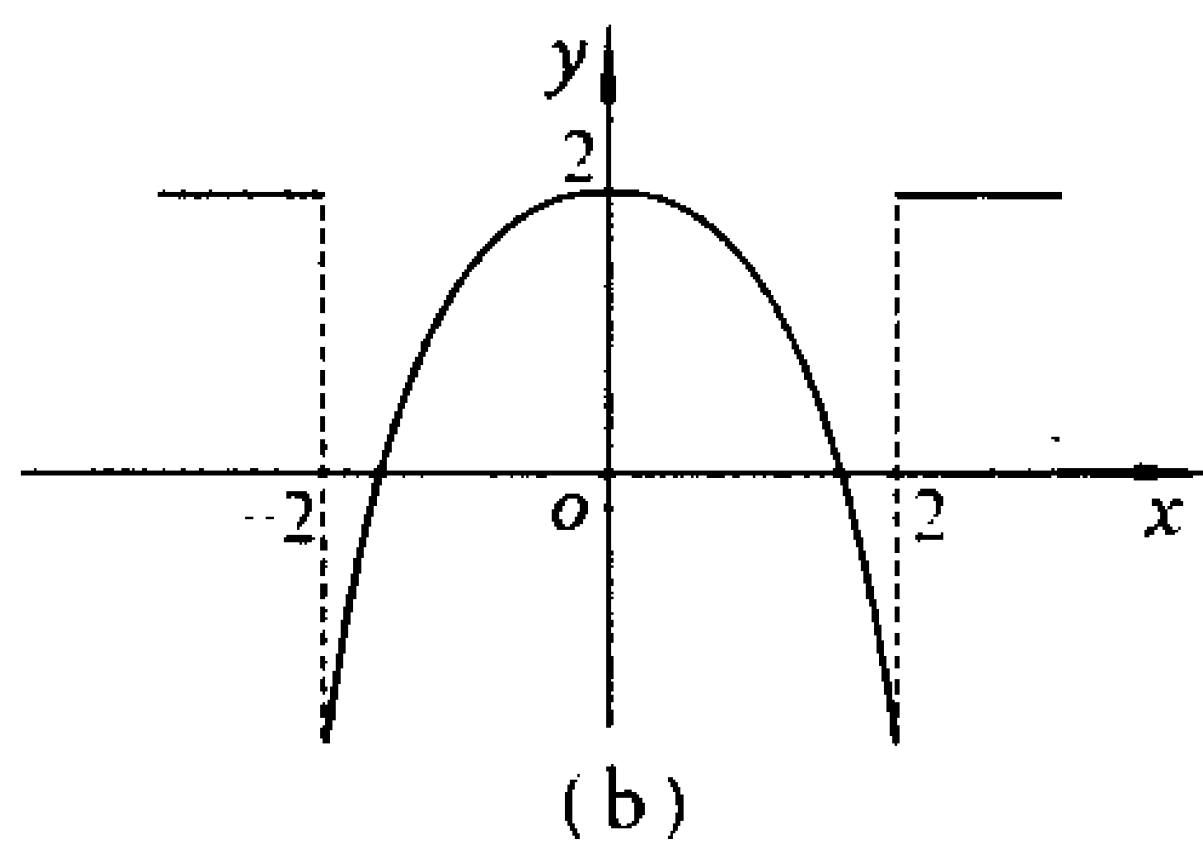
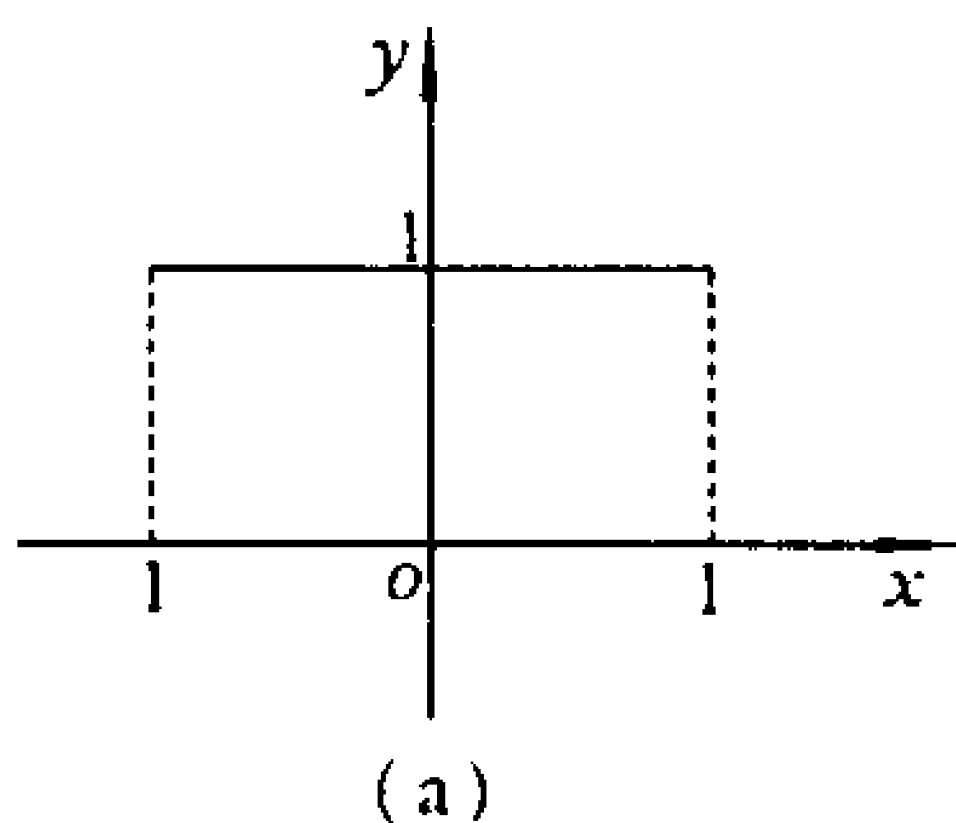


图 2.1

(1) 因为在  $(-\infty, +\infty)$  内,  $|f(x)| \leq 1$ , 所以

$$f[f(x)] = 1, \quad -\infty < x < +\infty.$$

(2) 因为当  $1 \leq |x| \leq \sqrt{3}$  时,  $|g(x)| \leq 1$ , 当  $|x| < 1$  或  $|x| > \sqrt{3}$  时,  $|g(x)| > 1$ , 所以

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1, & 1 \leq |x| \leq \sqrt{3}, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(3) 因为在  $(-\infty, +\infty)$  内,  $|f(x)| \leq 1$ , 于是  $g[f(x)] = 2 - [f(x)]^2$ . 考虑  $f(x)$  的取值, 得



$$g[f(x)] = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 2, & |x| > 1. \end{cases}$$

(4) 因为在  $(-\infty, +\infty)$  内,  $|g(x)| \leq 2$ , 所以  $g[g(x)] = 2 - [g(x)]^2$ . 考虑  $g(x)$  的取值, 得

$$g[g(x)] = \begin{cases} 2 - (2 - x^2)^2, & |x| \leq 2, \\ -2, & |x| > 2. \end{cases}$$

例 19 设  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ , 求  $f_n(x) = \underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n\uparrow}$ .

解 用数学归纳法. 当  $n=2$  时,  $f_2(x) = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$ . 设当  $n=k$  时,  $f_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$ . 则对于  $n=k+1$ , 有

$$f_{k+1}(x) = \frac{x/\sqrt{1+kx^2}}{\sqrt{1+[x/\sqrt{1+kx^2}]^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

例 20 设  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  ( $ad-bc \neq 0$ ), 求其反函数, 并指出  $a, b, c, d$  满足什么条件时, 反函数与直接函数相同.

解 由  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  解得  $x = \frac{-dy+b}{cy-a}$ , 所以反函数为

$$y = \frac{-dx+b}{cx-a}.$$

由  $\frac{dx+b}{cx+d} = \frac{-dx+b}{cx-a} \Rightarrow (a+d)[x^2 + (d-a)x - b] = 0$ , 所以, 应有  $a+d=0$  或  $b=c=0$  而  $a=d \neq 0$ .

了解函数的特性, 对研究函数是十分有用的. 解这类题的方法有反证法、恒等变换法、放大法等.

例 21 证明: 定义于对称区间  $(-l, l)$  内的任何函数  $f(x)$  均可表示为一个奇函数与一个偶函数之和的形式.

证 构造两个新的函数

$$f_1(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)], \quad f_2(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)].$$

$$\begin{aligned}\text{因为 } f_1(-x) &= \frac{1}{2}[f(-x) + f(-(-x))] \\ &= \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = f_1(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_2(-x) &= \frac{1}{2}[f(-x) - f(-(-x))] \\ &= \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -f_2(x),\end{aligned}$$

所以,  $f_1(x)$  是偶函数,  $f_2(x)$  是奇函数. 而

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

故  $f(x)$  可表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

**例 22** 设  $f(x)$  是奇函数,  $f(1) = a$ , 且

$$f(x+2) - f(x) = f(2).$$

(1) 求  $f(2)$  与  $f(5)$  与  $a$  的关系式;

(2)  $a$  为何值时,  $f(x)$  是以 2 为周期的函数?

**解** (1)  $x$  取  $-1, 1$  和  $3$  时, 由所给等式得

$$f(2) = f(1) - f(-1) = 2f(1) = 2a,$$

$$f(2) = f(3) - f(1), \quad f(2) = f(5) - f(3),$$

将后两式相加, 得  $f(5) = 2f(2) + f(1) = 5a$ .

(2) 如果  $f(x)$  以 2 为周期, 则

$$f(x+2) = f(x) \Rightarrow f(x+2) - f(x) = 0 = f(2),$$

即  $f(2) = 2a = 0 \Rightarrow a = 0$ . 所以取  $a = 0$  时,  $f(x)$  是以 2 为周期的周期函数.

**例 23** 已知函数  $f(x)$  满足关系式

$$af(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{b}{x} \quad (|a| \neq 1, a, b \text{ 为常数}),$$

确定  $f(x)$  的奇偶性.

**解** 将  $x = \frac{1}{t}$  代入关系式得  $af\left(\frac{1}{t}\right) + f(t) = bt$ , 又将  $t$  改为  $x$  与关系式联立得方程组

$$\begin{cases} af\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = bx, \\ af(x) + f(x) = \frac{b}{x}, \end{cases}$$

可解得

$$f(x) = \frac{1}{a^2 - 1} \left( \frac{ab}{x} - bx \right) = \frac{ab - bx^2}{(a^2 - 1)x} \quad (|a| \neq 1).$$

显然 
$$f(-x) = \frac{ab - b(-x)^2}{(a^2 - 1)(-x)} = -f(x).$$

所以  $f(x)$  是奇函数.

**例 24** 证明: 函数  $f(x) = 2x + \sin x$  在  $\mathbf{R}$  上是严格递增的.

**证**  $\forall x, y \in \mathbf{R}$ , 且  $x < y$ , 有

$$\begin{aligned} |\sin y - \sin x| &= 2 \left| \sin \frac{y-x}{2} \right| \left| \cos \frac{y+x}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{y-x}{2} \right| \leq y-x, \end{aligned}$$

即有 
$$-(y-x) \leq \sin y - \sin x \leq y-x.$$

由此 
$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= 2(y-x) + (\sin y - \sin x) \\ &\geq y-x > 0. \end{aligned}$$

从而知  $f(x) = 2x + \sin x$  在  $\mathbf{R}$  上是严格递增的.

**例 25** 设  $f(x), \varphi(x), \psi(x)$  都是单调增函数, 且满足

$$f(x) \leq \varphi(x) \leq \psi(x),$$

**证明:**  $f[f(x)] \leq \varphi[\varphi(x)] \leq \psi[\psi(x)].$

**证** 由  $f(x) \leq \varphi(x) \leq \psi(x)$  且  $f(x), \varphi(x), \psi(x)$  均为单调增函数, 得

$$f[f(x)] \leq f[\varphi(x)] \leq \varphi[\varphi(x)] \leq \varphi[\psi(x)] \leq \psi[\psi(x)],$$

即所证不等式成立.

**例 26** 讨论下列函数是否周期函数. 若是, 求出其周期.

(1)  $y = x \cos x$ ;      (2)  $y = \sin^2 x$ .

**解** 判断一个函数是否周期函数常用两种方法: 一是将所给函数进行恒等变形, 讨论是否为周期函数的和、差、积、商; 二是利

用反证法,证明周期  $T$  不存在(或与变量有关).

(1) 因为在  $x\cos x$  中,  $x$  不是周期函数,所以函数的周期可能不存在. 用反证法. 设函数的周期  $T > 0$ , 则

$$(x+T)\cos(x+T) = x\cos x.$$

令  $x = 0$  和  $x = \pi/2$ , 得

$$\begin{cases} T\cos T = 0, \\ \left(T + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{T+\pi}{2}\right) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos T = 0, \\ \sin T = 0. \end{cases}$$

显然, 满足方程组的  $T$  不存在. 故  $y = x\cos x$  不是周期函数.

(2)  $\sin^2 x$  是两个周期函数的积, 可能是周期函数, 用恒等变换法, 得

$$y = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x.$$

其中  $1/2$  是常数, 周期可取任意正数;  $\cos 2x$  是周期为  $\pi$  的周期函数. 所以  $y = \sin^2 x$  是周期为  $\pi$  的函数.

**例 27** 证明: 若函数  $f(x)$  与  $\varphi(x)$  在数集  $A$  上有界, 则函数  $f(x) + \varphi(x)$ ,  $f(x) - \varphi(x)$ ,  $f(x)\varphi(x)$  在数集  $A$  上也有界.

**证** 若  $f(x)$  有界, 则  $\exists M_1 > 0, \forall x \in A$  有  $|f(x)| \leq M_1$ ; 若  $\varphi(x)$  有界, 则  $\exists M_2 > 0, \forall x \in A$  有  $|\varphi(x)| \leq M_2$ . 所以

$$|f(x) \pm \varphi(x)| \leq |f(x)| + |\varphi(x)| \leq M_1 + M_2,$$

$$|f(x) \cdot \varphi(x)| = |f(x)| \cdot |\varphi(x)| \leq M_1 \cdot M_2.$$

故函数  $f(x) + \varphi(x)$ ,  $f(x) - \varphi(x)$ ,  $f(x)\varphi(x)$  在  $A$  上也有界.

**例 28** 证明: 定义在同一数集上且周期是可通约的两个周期函数的和与积都是周期函数, 并求  $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$  的周期和  $f(x) = \sin^2 x$  的周期.

**证** 设  $f_1(x), f_2(x)$  是定义在同一数集上, 且周期分别  $T_1$  和  $T_2$  的两个周期函数. 设  $T$  为  $T_1$  与  $T_2$  的公约数, 即

$$T_1 = k_1 T, \quad T_2 = k_2 T \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{Z})$$

则  $f_1(x + k_1T) = f_1(x), f_2(x + k_2T) = f_2(x).$

设  $F_1(x) = f_1(x) + f_2(x)$ , 于是

$$\begin{aligned} F_1(x + k_1k_2T) &= f_1(x + k_1k_2T) + f_2(x + k_1k_2T) \\ &= f_1(x) + f_2(x) = F_1(x). \end{aligned}$$

设  $F_2(x) = f_1(x)f_2(x)$ , 于是

$$\begin{aligned} F_2(x + k_1k_2T) &= f_1(x + k_1k_2T)f_2(x + k_1k_2T) \\ &= f_1(x)f_2(x) = F_2(x). \end{aligned}$$

在  $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$  中,  $\sin x, \sin 2x, \sin 3x$  的周期分别为  $2\pi, \pi, \frac{2}{3}\pi$ , 所以  $f(x)$  的周期是其最小公倍数  $2\pi$ .

$f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$  的周期是  $\pi$  (见例 25 题(2)).

## 第二节 函数的极限

### 主要内容

1. 设  $f$  为定义在  $(a, +\infty)$  上的函数,  $A$  是一个确定的数, 若  $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$ , 使得当  $x > M$  时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称函数  $f$  当  $x$  趋向  $+\infty$  时以  $A$  为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow \infty).$$

2. 设  $f$  在点  $x_0$  的去心邻域  $U^\circ(x_0, \delta_0)$  内有定义,  $A$  是一个确定的数. 若  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  ( $\delta < \delta_0$ ), 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称  $f$  当  $x$  趋向  $x_0$  时以  $A$  为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0).$$

3. 函数的极限具有以下性质:

(1) 惟一性 若极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 则必是惟一的.

(2) 局部有界性 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 则存在  $x_0$  的某去心邻域  $U^\circ(x_0, \delta)$ , 使得  $f(x)$  在邻域中有界.

(3) 局部保号性 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$  (或  $< 0$ ), 则对任意正数  $r$  ( $0 < r < |A|$ ), 存在  $x_0$  的某一去心邻域  $U^\circ(x_0, \delta)$ , 使得对一切  $x \in U^\circ(x_0, \delta)$ , 恒有  $f(x) > r > 0$  (或  $f(x) < -r < 0$ ).

(4) 不等式性 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  都存在, 且存在  $x_0$  的某一去心邻域  $U^\circ(x_0, \delta)$ , 使得对一切  $x \in U^\circ(x_0, \delta)$  都有  $f(x) \leq g(x)$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

(5) 迫敛性 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ , 且存在  $x_0$  的某一去心邻域  $U^\circ(x_0, \delta)$ , 使得对一切  $x \in U^\circ(x_0, \delta)$  都有  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A.$$

4. 若极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  都存在, 则函数  $f \pm g, f \cdot g$  在  $x \rightarrow x_0$  时极限也存在, 且

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

又若  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$ , 则  $f/g$  在  $x \rightarrow x_0$  时极限存在, 且

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

5. 设  $f(x)$  在  $(x_0 - r, x_0)$  ( $r > 0$ ) 内有定义,  $A$  是一个确定的数,  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得当  $-\delta < x - x_0 < 0$  时, 有  $|f(x) - A| < \epsilon$ , 则称  $f(x)$  在  $x_0$  的左极限是  $A$ , 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A.$$

类似可以定义  $f(x)$  在  $x_0$  的右极限  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ .

函数  $f(x)$  在  $x_0$  极限存在的充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$

以后, 我们将  $U(x_0, \delta)$  记作  $U(x_0)$ ,  $U^\circ(x, \delta)$  记作  $U^\circ(x_0)$ .

6. 海涅(Heine)定理 设  $f(x)$  在  $x_0$  的某去心邻域有定义, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在的充分必要条件是: 对于任意满足条件  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , 且  $x_n \neq x_0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 的数列  $\{x_n\}$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

7. 柯西(Cauchy)准则 设  $f(x)$  在  $x_0$  的某去心邻域  $U^\circ(x_0, \delta_0)$  内有定义, 则极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在的充分必要条件是:  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta (< \delta_0) > 0$ , 使得对任何  $x', x'' \in U^\circ(x_0, \delta)$ , 都有

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

对于一些定理与法则, 我们只写出了  $x \rightarrow x_0$  时的情形,  $x \rightarrow \infty$  的情形希望读者自己写出.

8. 设  $f(x)$  定义在  $U_+^\circ(x_0)$  (或  $U_-^\circ(x_0)$ ) 上是单调有界函数, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  (或  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ ) 存在.

9. 设  $f(t)$  在  $U^\circ(t_0)$  上有定义, 且  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = A$ ,  $t = g(x)$  在  $U^\circ(x_0)$  上有定义, 当  $x \in U^\circ(x_0)$  时,  $t = g(x) \in U^\circ(t_0)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = t_0$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = A.$$

## 疑难解析

### 1. 怎样理解函数极限的 $\epsilon$ - $\delta$ 定义?

答 函数极限的  $\epsilon$ - $\delta$  定义是在  $x \rightarrow x_0$  情形的极限定义. 如同数列极限定义,  $\epsilon$  是可以任意取定的正数, 它反映了函数值  $f(x)$  与  $A$  的接近程度;  $\delta$  反映了  $x$  与  $x_0$  的接近程度, 是一个与  $\epsilon$  有关的量. 一般地,  $\epsilon$  越小,  $\delta$  也相应地要小一些.

在定义中只要求  $f(x)$  在  $U^\circ(x_0)$  有定义, 是说明极限只研究  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  而不等于  $x_0$  的过程中函数值  $f(x)$  的变化趋势.

在几何上,  $\epsilon$ - $\delta$  定义的意义是: 当动点  $x$  进入以  $x_0$  为中心线、 $x_0 - \delta$  和  $x_0 + \delta$  为边界的垂直带形域时, 函数值  $f(x)$  一定落在以  $y = A$  为中心线、 $A + \epsilon$  和  $A - \epsilon$  为边界的水平带形域内.

### 2. 在使用函数极限性质的时候要注意什么?

答 在函数极限问题中,  $x$  的趋向可以是  $x_0, x_0^+, x_0^-, -\infty, +\infty$ , 函数的极限可以是有限数  $A, \infty, +\infty, -\infty$ . 因此, 讨论函数极限问题时, 首先要注意必须在同一趋向下; 其次, 关于函数极限的性质, 如局部保号性与迫敛性, 只在极限为  $A, +\infty, -\infty$  时才成立. 当  $\infty$  未定号时, 因无法与任意有限数比较而得不出结果.

在复合函数求极限时, 由于内外层函数的不同情形的组合很多, 做证明题时一定要全面进行考虑.

## 方法、技巧与典型例题分析

求函数的极限有很多种方法, 其中许多与求数列极限的方法和技巧相同, 读者可参阅第一章第四节.

### 一、用极限定义证明极限

用极限定义证明极限, 在  $x \rightarrow x_0$  时,  $\forall \epsilon > 0$ , 要找出对应的  $\delta$ ; 在  $x \rightarrow \infty$  时, 要找出对应的  $M$ . 一般的方法是: 将  $|f(x) - A|$  经



变形、放大,得到  $|x - x_0| < \delta$  或  $|x| > M$ . 在变形时大多是改变  $f(x)$  的形式,但有时也可以改变  $A$  的形式来实现.

例 1 证明:若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 且  $f(x) > 0 (A \geq 0)$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{A}.$$

证 分两种情形.

当  $A = 0$  时,若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , 取  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 对任意满足  $0 < |x - x_0| < \delta$  的  $x$ , 有  $|f(x)| < \epsilon$ , 即  $\sqrt{f(x)} < \sqrt{\epsilon}$ . 故

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = 0.$$

当  $A > 0$  时,若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 即  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 对任意满足  $0 < |x - x_0| < \delta$  的  $x$ , 有  $|f(x) - A| < \epsilon$ , 即

$$\begin{aligned} |\sqrt{f(x)} - \sqrt{A}| &= \frac{|f(x) - A|}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{A}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{A}} |f(x) - A| < \frac{1}{\sqrt{A}} \epsilon. \end{aligned}$$

故  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{A}.$

有时,在将  $|f(x) - A|$  变形时,不仅得到  $x - x_0$  因式,而且还得到含  $x$  的其它因式. 这时,我们要利用  $x \rightarrow x_0$  这一条件,限定  $x$  的取值范围,得出  $|x - x_0| < \delta$ , 如例 2、例 3.

例 2 证明:  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{7}{16x^2 - 9}} = 1.$

证 因为

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{\frac{7}{16x^2 - 9}} - 1 \right| &= \left| \frac{7/(16x^2 - 9) - 1}{\sqrt{7/(16x^2 - 9)} + 1} \right| \\ &\leq \left| \frac{7}{16x^2 - 9} - 1 \right| = \frac{16|1 + x||1 - x|}{|(4x + 3)(4x - 3)|}, \end{aligned}$$

设  $|x - 1| < 1$ , 即  $0 < x < 2$ , 则上式右边不大于  $\frac{16 \cdot 3|1 - x|}{3 \cdot 4|x - 3/4|}.$

再设  $|x-1| < \frac{1}{8}$ , 即  $1 - \frac{1}{8} < x < 1 + \frac{1}{8}$ , 于是上式右边不大于  $32|1-x|$ .

故  $\forall \epsilon > 0$ , 取  $\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{32}, \frac{1}{8}\right\}$ , 则当  $|x-1| < \delta$  时, 有

$$\left|\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}} - 1\right| < \epsilon, \text{ 即}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{7}{16x^2-9}} = 1.$$

例 3 按定义验证  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{x^2-3} = 2$ .

证 因为  $\forall \epsilon > 0$ , 要找到  $M > 0$ , 使  $|x| > M$  时, 有

$$\left|\frac{2x^2-1}{x^2-3} - 2\right| = \frac{7}{|x^2-3|} < \epsilon.$$

而当  $|x| > 3$  时,  $|x^2-3| > |x|$ , 故要

$$\frac{7}{|x^2-3|} < \frac{7}{|x|} < \epsilon.$$

只需  $|x| > \frac{7}{\epsilon}$ . 故  $\forall \epsilon > 0$ , 取  $M = \max\left\{3, \frac{7}{\epsilon}\right\}$ , 当  $|x| > M$  时, 有

$$\left|\frac{2x^2-1}{x^2-3} - 2\right| < \epsilon.$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-1}{x^2-3} = 2.$$

## 二、用恒等变形求极限

例 4 求  $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1}\right)$ .

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1 - 3}{x^3 + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2+x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{x^2+x+1} = -1. \end{aligned}$$

例5 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$ .

解 先有理化,再进行恒等变形.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} \left( \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^{3/2}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}} + 1\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} \\ &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

例6 求  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$ .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} &\quad (\text{分子二项式展开}) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [x^n + nx^{n-1}\Delta x + \cdots + \Delta x^n - x^n] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ nx^{n-1} + \frac{n}{2}(n-1)x^{n-2}\Delta x + \cdots + \Delta x^{n-1} \right] \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

例7 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$ .

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[n]{1+x} - 1)(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \cdots + 1)}{x(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \cdots + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 1 / [\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \cdots + 1] = 1/n. \end{aligned}$$

### 三、用变量代换求极限

例8 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 + x^2})$ .

解 令  $x = \frac{1}{t}$ , 则  $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$ .

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{1+t}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{1+t} - 1) - (\sqrt[3]{1+t} - 1)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{t(\sqrt{1+t} + 1)} \\ &\quad - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{t(\sqrt[3]{(1+t)^2} + \sqrt[3]{1+t} + 1)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

例 9 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} \quad (a > 0); \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}.$$

解 (1) 令  $x = e^t$ ,  $a = e^a$ , 则  $a > 1$ , 得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{at}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{a^t} \quad (\text{第一章第四节例 4}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

(2) 由题(1)知, 当  $a = 1$  时, 有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ , 于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln x / x} = e^0 = 1.$$

例 10 求  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi}{2} x$ .

解法 1 令  $t = \frac{\pi}{2}(1-x)$ , 则  $\frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{2} - t$ , 于是

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} t \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{\pi} \cdot \cot t \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{t}{\tan t} = \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

解法 2 令  $x - 1 = t$ , 则  $\frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{2}(1+t)$ , 于是

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 0} (-t) \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}t\right) = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \cot \frac{\pi t}{2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot \pi/2}{\tan \pi(t/2)} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

这里用到了下一节的重要结论  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  和  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ .

**例 11** 利用变量代换求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^\alpha - e^\beta}{\alpha - \beta}.$$

**解** (1) 令  $\arcsin x = t$ , 则  $x = \sin t$ , 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1.$$

(2) 令  $\arctan x = t$ , 则  $x = \tan t$ , 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t} = 1.$$

(3) 令  $e^x - 1 = t$ , 则  $x = \ln(1 + t)$ , 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1 + t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1 + t)^{1/t}} = 1.$$

(4) 令  $\alpha - \beta = t$ , 则

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \beta} \frac{e^\alpha - e^\beta}{\alpha - \beta} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^\beta(e^t - 1)}{t} \quad (\text{利用题(3)的结果}) \\ &= e^\beta. \end{aligned}$$

这里用到了下一节的另一重要结论  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$ .

#### 四、用迫敛性求极限

**例 12** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[ \frac{1}{x} \right]$ .

**解** 因为  $\frac{1}{x} - 1 < \left[ \frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ ), 所以

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } 1 - x < x \left[ \frac{1}{x} \right] \leq 1;$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } 1 - x > x \left[ \frac{1}{x} \right] \geq 1.$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left[ \frac{1}{x} \right] = 1.$$

## 五、其它方法

例 13 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = a > 0, \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = b$ , 证明:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = a^b.$$

证 引入函数  $\varphi(x) = v(x) \ln u(x)$ , 因为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln u(x) = \ln a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = b \ln a,$$

故

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\varphi(x)} = e^{b \ln a} = a^b.$$

这个例子给出了求幂指数函数极限的公式.

例 14 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\tan x}$ .

解 对函数变形可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\sqrt{x}} \right]^{\tan x / \sqrt{x}} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}} \right]^{\tan x / \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}} \right]^{\sqrt{x}}, \end{aligned}$$

而  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}} = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\tan x} = 1^0 = 1.$$

例 15 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} \frac{a^x - 1}{a - 1} \right)^{1/x}, a > 0, a \neq 1$ .

解 令  $f(x) = \left( \frac{1}{x} \frac{a^x - 1}{a - 1} \right)^{1/x}$ , 则对  $a > 1, x > 0$ , 有

$$\ln f(x) = -\frac{\ln x}{x} - \frac{\ln(a-1)}{x} + \frac{\ln(a^x - 1)}{x}.$$

因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a-1)}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a^x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(1 - a^{-x})}{x} + \ln a \right) = \ln a,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{1}{x} \frac{a^x - 1}{a - 1} \right)^{1/x} = \ln a.$$

当  $0 < a < 1, x > 0$  时, 有

$$\ln f(x) = -\frac{\ln x}{x} - \frac{\ln(1-a)}{x} + \frac{\ln(1-a^x)}{x},$$

而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1-a)}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1-a^x)}{x} = 0.$

所以  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{1}{x} \frac{a^x - 1}{a - 1} \right)^{1/x} = 0.$

综上所述, 得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e_{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln f(x)} = \begin{cases} a, & a > 1, \\ 1, & 0 < a < 1. \end{cases}$$

**例 16** 讨论极限:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}, \quad a_n \neq 0, b_m \neq 0.$$

**解** 利用第一章第四节例 8 结论可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_n}, & m = n, \\ 0, & n < m, \\ \infty, & n > m. \end{cases}$$

本例的结果对  $m, n$  不是整数的情形也适用.

**例 17** 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{1+x}}}{\sqrt{x}}.$

**解**  $x \rightarrow +\infty$ , 分子各项中最高项次数为  $\frac{1}{2}$ , 由系数比, 得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} = 1.$$

**例 18** 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$

**解**  $x \rightarrow \infty$ . 分子最高项次数为  $n$ , 第一项的系数和为零, 第二项系数和为  $2^n$ ; 分母最高项次数为  $n$ , 系数为 1. 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n}{x^n} = \frac{2^n}{1} = 2^n.$$

**例 19** 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2}(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$ .

**解** 先有理化,再比较最高项次数与系数.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2}(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^{3/2}(\sqrt{x^2+2x} - x - 1)(\sqrt{x^2+2x} + x + 1)}{(\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x^2+2x} + x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^{3/2}}{(\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x^2+2x} + x + 1)}. \end{aligned}$$

至此可以看出,分子  $x$  的次数是  $3/2$ ,系数是  $-2$ ,而分母  $x$  的次数最高也是  $3/2$ ,系数是  $4 \times 2 = 8$ . 故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2}(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}.$$

**例 20** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{2 + e^{1/x}}{1 + e^{4/x}} + \frac{\sin x}{|x|} \right]$ .

**解** 用左、右极限求解. 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{2 + e^{1/x}}{1 + e^{4/x}} + \frac{\sin x}{|x|} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{2e^{-4/x} + e^{-3/x}}{e^{-4/x} + 1} + \frac{\sin x}{x} \right] = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \frac{2 + e^{1/x}}{1 + e^{4/x}} + \frac{\sin x}{|x|} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \frac{2 + e^{1/x}}{1 + e^{4/x}} - \frac{\sin x}{x} \right] = 2 - 1 = 1, \end{aligned}$$

所以 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{2 + e^{1/x}}{1 + e^{4/x}} + \frac{\sin x}{|x|} \right] = 1.$$

**例 21** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos ax}}$  ( $0 < |a| < \pi$ ).

**解** 用左、右极限求解. 当  $a > 0$  时,有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos ax}} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sqrt{2\sin^2(ax/2)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{\sqrt{2}\sin(ax/2)} = -\frac{\sqrt{2}}{a}, \end{aligned}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos ax}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{2} \sin(ax/2)} = \frac{\sqrt{2}}{a};$$

当  $a < 0$  时, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos ax}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sqrt{2} \sin(ax/2)} = \frac{\sqrt{2}}{a},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos ax}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{\sqrt{2} \sin(ax/2)} = -\frac{\sqrt{2}}{a}.$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos ax}}$  不存在.

例 22 求  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{2a}{3} + \frac{a}{\pi} \arctan \frac{1}{x-a} \right)$ .

解  $a \neq 0$  时, 讨论左、右极限. 因为

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \left( \frac{2a}{3} + \frac{a}{\pi} \arctan \frac{1}{x-a} \right) = \frac{2a}{3} + \frac{a}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{7a}{6},$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \left( \frac{2a}{3} + \frac{a}{\pi} \arctan \frac{1}{x-a} \right) = \frac{2a}{3} + \frac{a}{\pi} \left( -\frac{\pi}{2} \right) = \frac{a}{6},$$

左、右极限存在, 但不相等, 所以

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{2a}{3} + \frac{a}{\pi} \arctan \frac{1}{x-a} \quad (a \neq 0)$$

不存在.

$a = 0$  时, 显然有  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{2a}{3} + \frac{a}{\pi} \arctan \frac{1}{x-a} \right) = 0$ .

例 23 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} \right) = 0$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^3}$ .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} &= \frac{\sin 6x - 6x + 6x + xf(x)}{x^3} \\ &= \frac{\sin 6x - 6x}{x^3} + \frac{6x + xf(x)}{x^3}. \end{aligned}$$

当  $x \rightarrow 0$  时,  $6x - \sin 6x \sim (6x)^3/6$ . 因而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(6x)^3}{6x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2},$$

所以 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{36x^3}{x^3} = 36.$$

例 24 求 
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4\arctan x - \pi}{x - 1}.$$

解 作变量代换  $t = x - 1$ , 则  $x = t + 1$ , 再利用等式

$$\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x - y}{1 + xy} \quad (xy > -1),$$

则 
$$\begin{aligned} \text{原式} &= 4 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan(t + 1) - \arctan 1}{t} \\ &= 4 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[ \arctan \frac{(1 + t) - 1}{1 + (1 + t) \cdot 1} \right] \\ &= 4 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \arctan \left( \frac{t}{2 + t} \right) \\ &= 4 \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{t}{2 + t} \cdot \frac{1}{t} \right) = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$

最后一个等式利用了等价无穷小的代换.

### 第三节 两个重要极限 无穷小量与无穷大量

#### 主要内容

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e, \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

2. 若函数  $f(x)$  的极限等于零, 则称这个函数为无穷小量, 简称无穷小, 用记号“ $o$ ”表示.

函数  $f$  在  $x \rightarrow x_0$  时极限为  $A$  的充要条件是  $f(x) - A$  在  $x \rightarrow x_0$  时为无穷小量.

3. 无穷小量有如下运算性质:

- (1) 有限个无穷小量之和是无穷小量.
- (2) 有界函数与无穷小量的乘积是无穷小量.
- (3) 常数与无穷小量的乘积是无穷小量.
- (4) 有限个无穷小量的乘积是无穷小量.

#### 4. 无穷小量阶的比较

设在  $x$  的同一趋向下,  $f, g$  均为无穷小量, 则:

若  $\lim \frac{f}{g} = 0$ , 称  $f$  为比  $g$  高阶的无穷小量.

若  $\lim \frac{f}{g} = \infty$ , 称  $f$  为比  $g$  低阶的无穷小量.

若  $\lim \frac{f}{g} = c \neq 0$ , 称  $f$  与  $g$  是同阶无穷小量.

若  $\lim \frac{f}{g} = 1$ , 称  $f$  与  $g$  是等价无穷小量, 记作  $f \sim g$ .

常用的等价无穷小量有:

当  $x \rightarrow 0$  时,  $x \sim \sin x \sim \tan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim \arcsin x$   
 $\sim \arctan x, \sqrt[n]{1+x} \sim 1 + \frac{x}{n}, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}.$

5. 若函数  $f(x)$  以  $\infty$  (或  $-\infty, +\infty$ ) 为极限, 则称  $f$  为无穷大量, 用记号“ $O$ ”表示.

6. 若函数  $f(x)$  在  $x$  的某一趋向下为无穷小量, 则  $\frac{1}{f(x)}$  在  $x$  的同一趋向下为无穷大量 ( $f \neq 0$ ).

7. 无穷大量阶的比较类同于无穷小量阶的比较.

### 疑难解析

#### 1. 怎样理解无穷小量和无穷小量的阶?

答 无穷小量是一个变量, 它在  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 的过程中可以变得小于事先给定的任意小正数. 无穷小量是在  $x$  的某一趋向下实现的, 因而不是普遍意义的.

在  $x$  的同一趋向下的几个无穷小量收敛于零的速度有快慢之分, 无穷小量的阶就是对它们的收敛速度作出的判断. 但是, 并不是任何两个无穷小量都可以进行比较的. 如  $x \rightarrow 0$  时,  $x \sin \frac{1}{x}$  是无穷小量, 但它没有阶. 事实上, 若其阶为  $\alpha$ , 则  $\alpha \leq 1$ . 当  $\alpha < 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} / x^\alpha = 0$ ; 当  $\alpha = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} / x$  不存在, 都与无穷小量阶的定义相矛盾.

## 2. 怎样理解无穷大量和无穷大量的阶?

答 请读者参照疑难解析 1 自己作出回答.

需要注意的是: 无穷大量一定是无界函数, 但无界函数不一定是无穷大量. 如函数  $f(x) = x \sin x$  在  $x \rightarrow +\infty$  时是无界函数, 因为对任何  $M > 0$ , 取  $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ , 总能使

$$f(x) = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} > M.$$

但当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq \infty$ , 因为若取数列  $x_n = 2n\pi$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 0$ .

## 3. 在具体计算中, 使用等价量代换要注意什么问题?

答 在计算中出现无穷小量(或无穷大量)的相互叠加(如函数的代数和)时, 不能直接进行等价量代换. 应将它们分离(如代数和化为乘积)后才能进行代换, 如

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{\cos x \cdot x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot x^2/2}{\cos x \cdot x^3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

如果直接进行代换, 将得到错误的结果.

## 方法、技巧与典型例题分析

两个重要极限的利用与等价无穷小(大)代换是极限计算的

重要方法. 利用两个重要极限的技巧在于掌握它们的形式特点.

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  的形式特点是, 在  $x$  的趋向下, 分式的分母是无穷小量, 分子是同一无穷小量的正弦函数. 这里  $x$  趋向于什么不是重要的, 重要的是分母是无穷小量, 分子是同一无穷小量的正弦函数. 因而  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{x-a} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1/x)}{1/x} = 1$ .

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$  的形式特点是, 幂指函数的底数是 1 与一个无穷小量的和, 指数是同一无穷小量的倒数. 同样,  $x$  趋向于什么不是重要的. 因而

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\csc x} = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 2/x)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 2/x)^{\frac{x}{2} \cdot 4} = e^{-4}.$$

因此, 如何将函数变形为重要极限的形式, 成为我们解题的关键. 无穷小量代换应注意的问题已在疑难解析 3 中指出, 不再重复.

### 一、两个重要极限

例 1 利用重要极限求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} 2^x \sin \frac{\pi}{2^x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{x} \cdot \sin(1/x)}{\sqrt{x} - 1};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2 - 4};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax - \sin ax}{3bx + \sin bx}.$$

解 将函数变形为重要极限形式后, 再利用重要极限求出.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} 2^x \sin \frac{\pi}{2^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi/2^x)}{\pi/2^x} \cdot \pi = \pi \cdot 1 = \pi.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{x} \sin(1/x)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1/x)}{1/x} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \\ = 1 \cdot 1 = 1.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} \cdot \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{(x/2)^2 \cdot 4} = 1^2 \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax - \sin ax}{3bx + \sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - (\sin ax)/ax}{3 + (\sin bx)/bx} \cdot \frac{ax}{bx} \\ = \frac{2-1}{3+1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{4b}.$$

例 2 利用重要极限求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow n\pi} \frac{\sin x}{x - n\pi} \quad (n \in \mathbf{N}^+);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \sin \frac{x-a}{2} \tan \frac{\pi x}{2a}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( 1 - \cos \frac{\pi}{x} \right).$$

解 此例的变形要比例 1 复杂, 因此要谨防出错.

$$(1) \quad \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{\cos x \cdot x^3} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2\sin^2(x/2)}{(x/2)^2} \cdot \frac{1}{4\cos x} \\ = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

(2) 令  $t = x - n\pi$ , 则  $x = n\pi + t$ , 于是

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(-1)^n \sin t}{t} = (-1)^n.$$

(3) 令  $t = x - a$ , 则  $x = a + t$ , 于是

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 0} \sin \frac{t}{2} \cdot \tan \frac{\pi(a+t)}{2a} \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \sin \frac{t}{2} \cdot \tan \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{2a} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \sin \frac{t}{2} \left( -\cot \frac{\pi t}{2a} \right) \\ = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t/2)}{t/2} \cdot \frac{\pi t/(2a)}{\tan[(\pi t/2a)]} \cdot \frac{a}{\pi} = - \frac{a}{\pi}.$$

$$(4) \quad \text{原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2[1 - \cos(\pi/x)][1 + \cos(\pi/x)]}{1 + \cos(\pi/x)} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sin^2(\pi/x)}{1 + \cos(\pi/x)}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2(\pi/x)}{(\pi/x)^2} \cdot \pi^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos(\pi/x)} \\
&= 1^2 \cdot \pi^2 \cdot 1/2 = \pi^2/2.
\end{aligned}$$

例 3 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}{x \sin x}$ .

解 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 + x \sin x} - 1) + (1 - \cos x)}{x \sin x}$ .

其中

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{x \sin x} \xrightarrow{\text{有理化}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{x \sin x (\sqrt{1 + x \sin x} + 1)} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)}{(x/2) \cdot 2 \sin(x/2) \cos(x/2) \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}{x \sin x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

例 4 设  $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$ , 其中  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  是常数, 且  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 有  $|f(x)| \leq |\sin x|$ , 证明:

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1.$$

证 利用极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . 用  $|x| \neq 0$  除  $|f(x)| \leq |\sin x|$ , 将  $f(x)$  用等式代入, 得

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(x)}{x} \right| &= \left| a_1 \frac{\sin x}{x} + 2a_2 \frac{\sin 2x}{2x} + \cdots + na_n \frac{\sin nx}{nx} \right| \\
&\leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq 1
\end{aligned}$$

或  $-1 \leq a_1 \frac{\sin x}{x} + 2a_2 \frac{\sin 2x}{2x} + \cdots + na_n \frac{\sin nx}{nx} \leq 1.$

上述不等式对任何  $x \neq 0$  都成立. 当  $x \rightarrow 0$  时, 有

$$-1 \leq a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n \leq 1,$$

所以  $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1.$

例 5 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos a_1 x \cdots \cos a_n x}{x^2}$ .

解 先利用  $x_0 + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = x_n$  将分子变形, 然后利用

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  即可求得.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} [(1 - \cos a_1 x) + (\cos a_1 x - \cos a_1 x \cos a_2 x) + \cdots \\ &\quad + (\cos a_1 x \cdots \cos a_{n-1} x - \cos a_1 x \cdots \cos a_n x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \cos a_1 x \cdots \cos a_{i-1} x \cdot \frac{1 - \cos a_i x}{x^2} \quad (\text{令 } \cos a_0 x = 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \cos a_1 x \cdots \cos a_{i-1} x \frac{\sin^2(a_i x/2)}{(a_i x/2)^2} \cdot \frac{a_i^2}{2} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{2} = \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2). \end{aligned}$$

例 6 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(a+x)\tan(a-x) - \tan^2 a}{x^2}$ .

解 先变形, 再利用重要极限求解.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left( \frac{\tan a + \tan x}{1 - \tan a \tan x} \cdot \frac{\tan a - \tan x}{1 + \tan a \tan x} - \tan^2 a \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left( \frac{\tan^2 a - \tan^2 x}{1 - \tan^2 a \tan^2 x} - \tan^2 a \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{x^2} \cdot \left( \frac{\tan^4 a - 1}{1 - \tan^2 a \tan^2 x} \right) = \tan^4 a - 1. \end{aligned}$$

例 7 利用重要极限求下列极限:

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^{3x}; & \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{3}{x} \right)^{2x}; \\ (3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{x^2 + 1}; & \quad (4) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{1 - 2x}. \end{aligned}$$

解 仍然是从  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$  的形式性入手.

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^{3x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^{\frac{x}{2} \cdot \frac{3x}{x/2}} = e^6. \\ (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{3}{x} \right)^{2x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{3}{x} \right)^{-\frac{x}{3} \cdot \frac{2x}{-x/3}} = e^{-6}. \end{aligned}$$



$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)^{x^2 \cdot (x^2 + 1)/x^2} = e.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{1/3} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{-1/2x \cdot -2} = e^{-2}.$$

例 8 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \cos x^{1/(1 - \cos x)};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x \cos \sqrt{x}};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{\sin a} \right)^{1/(x-a)} \quad (a \neq k\pi).$$

解 先变形为  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}$  形式.

$$(1) \text{原式} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \{ [1 + (\tan x - 1)]^{1/(\tan x - 1)} \}^{\tan 2x \cdot (\tan x - 1)},$$

$$\text{而} \quad \tan 2x \cdot (\tan x - 1) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} (\tan x - 1) \\ = - \frac{2 \tan x}{1 + \tan x} \xrightarrow{x \rightarrow \pi/4} -1.$$

所以

$$\text{原式} = e^{-1}.$$

$$(2) \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\cos x - 1)]^{1/(\cos x - 1) \cdot (-1)} = e^{-1}.$$

$$(3) \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0^+} [1 + (\cos \sqrt{x} - 1)]^{1/(\cos \sqrt{x} - 1) \cdot (\cos \sqrt{x} - 1)/x} \\ = e^{-1/2}.$$

$$(4) \text{原式} = \lim_{x \rightarrow a} \left( 1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\sin a / (\sin x - \sin a) \cdot (\sin x - \sin a) / [(x-a) \sin a]}.$$

$$\text{而} \quad \frac{\sin x - \sin a}{(x-a) \sin a} = \frac{2 \cos (x+a)/2 \cdot \sin (x-a)/2}{(x-a) \sin a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \cot a,$$

所以

$$\text{原式} = e^{\cot a}.$$

此类题可以转化为下述命题来解.

若  $f(x)$  与  $g(x)$  是定义在  $(-\infty, +\infty)$  上的两个函数, 且  $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = \infty, \lim [f(x)g(x)] = a$  ( $a$  为有限数或  $\pm \infty$ ), 则

$$\lim [1 + f(x)]^{g(x)} = e^{\lim [f(x)g(x)]} = e^a.$$

例 9 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[x]{a} + \sqrt[x]{b}}{2} \right)^x (a > 0, b > 0)$ .

解 化为重要极限形式.

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ 1 + \left( \frac{\sqrt[x]{a} + \sqrt[x]{b}}{2} - 1 \right) \right]^{\left( \frac{1}{\frac{\sqrt[x]{a} + \sqrt[x]{b}}{2} - 1} \right) \left( \frac{\sqrt[x]{a} + \sqrt[x]{b}}{2} - 1 \right) x}.$$

$$\text{而 } \left( \frac{\sqrt[x]{a} + \sqrt[x]{b}}{2} - 1 \right) x = \frac{1}{2} [(\sqrt[x]{a} - 1) + (\sqrt[x]{b} - 1)] x,$$

$$\text{其中 } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[x]{a} - 1) x \stackrel{x=1/t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} \\ \stackrel{a^t - 1 = y}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log a (1 + y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\log a (1 + y)^{1/y}} = \ln a.$$

$$\text{所以 } \left( \frac{\sqrt[x]{a} + \sqrt[x]{b}}{2} - 1 \right) x = \frac{1}{2} (\ln a + \ln b),$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[x]{a} + \sqrt[x]{b}}{2} \right)^x = e^{(\ln ab)/2} = \sqrt{ab}.$$

例 10 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{1/x}, a > 0, b > 0, c > 0$  和

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{1/x}, a_i > 0, i = 1, 2, \dots.$$

解 利用例 9 的方法.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{1/x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + \left( \frac{a^x + b^x + c^x}{3} - 1 \right) \right]^{\left( \frac{1}{\frac{a^x + b^x + c^x}{3} - 1} \right) \left( \frac{a^x - 1 + b^x - 1 + c^x - 1}{3x} \right)} \\ = \sqrt[3]{abc}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{1/x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + \left( \frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} - 1 \right) \right]^{\left( \frac{1}{\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} - 1} \right) \left( \frac{a_1^x - 1 + \cdots + a_n^x - 1}{nx} \right)} \\ = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

例 11 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$ .

解 将原式分解后凑成重要极限形式.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+a)^{x+a}}{(x+a+b)^{x+a}} \cdot \frac{(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{x+b}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 / \left[ \left( 1 + \frac{b}{x+a} \right)^{x+a} \cdot \left( 1 + \frac{a}{x+b} \right)^{x+b} \right] \\ &= \frac{1}{e^a \cdot e^b} = e^{-(a+b)}. \end{aligned}$$

例 12 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+2)\ln(x+2) - 2(x+1)\ln(x+1) + x\ln x]x$ .

解 将原式进行拆、拼变形,化为重要极限形式.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+1)\ln \frac{x+2}{(x+1)^2} + \ln(x+2) \\ &\quad + (x+1)\ln x - \ln x]x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (x+1)\ln \frac{(x+2)x}{(x+1)^2} + \ln \frac{x+2}{x} \right]x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \left[ (x^2+x)\ln \left( 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \right) \right] + \ln \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^x \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left\{ \left[ 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \right]^{(x+1)^2} \left[ 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \right]^{-(x+1)^2 \cdot \frac{1}{x+1}} \right\} \\ &\quad + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^{x/2 \cdot 2} \\ &= \ln e^{-1} + \ln e^2 = -1 + 2 = 1. \end{aligned}$$

## 二、无穷小量与无穷大量

例 13 证明下列关系式:

$$(1) \sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x} \sim \frac{1}{4}x^3 (x \rightarrow 0);$$

$$(2) \sqrt{x + \sqrt{1 + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x} \quad (x \rightarrow \infty).$$

解 按定义求极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3/4}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})/4} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3 \cos x(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})/4} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x^2/2}{x^3/2} = 1.
\end{aligned}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}} = 1.$$

所以,题(1)、题(2)所示关系式成立.

**例 14** 设  $f(x)$  和  $g(x)$  分别是关于  $x - a$  的  $p$  级和  $q$  级无穷小,求  $f(x) \pm g(x)$ ,  $f(x)g(x)$ ,  $f(x)/g(x)$  关于  $x - a$  的无穷小的级.

**解** 设  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x - a)^p} = \alpha \neq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x - a)^q} = \beta \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
(1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \pm g(x)}{(x - a)^t} \\
= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x - a)^p} (x - a)^{p-t} \pm \frac{g(x)}{(x - a)^q} (x - a)^{q-t}.
\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x - a)^p} (x - a)^{p-t} &= \begin{cases} 0, & t < p, \\ \alpha, & t = p, \end{cases} \\
\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x - a)^q} (x - a)^{q-t} &= \begin{cases} 0, & t < q, \\ \beta, & t = q, \end{cases}
\end{aligned}$$

故  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \pm g(x)}{(x - a)^t} = \begin{cases} \alpha \neq 0, & t = p = \min(p, q) < q, \\ \beta \neq 0, & t = q = \min(p, q) < p. \end{cases}$

则  $f(x) \pm g(x)$  是关于  $x - a$  的  $t$  ( $t = \min(p, q)$ ) 阶无穷小.

当  $p = q$  时,有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \pm g(x)}{(x - a)^p} = \alpha + \beta \neq 0 \quad (\alpha + \beta \neq 0),$$

这时  $f(x) \pm g(x)$  是关于  $x - a$  的  $p$  ( $p = q$ ) 阶无穷小.

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x)}{(x - a)^{p+q}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x - a)^p} \cdot \frac{g(x)}{(x - a)^q} = \alpha\beta \neq 0,$$

故  $f(x)g(x)$  是关于  $(x-a)$  的  $p+q$  阶无穷小.

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)/g(x)}{(x-a)^{p-q}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^p} \bigg/ \frac{g(x)}{(x-a)^q} = \frac{\alpha}{\beta} \neq 0,$$

故  $f(x)/g(x)$  是关于  $(x-a)$  的  $p-q$  ( $p > q$ ) 阶无穷小.

**例 15** 证明: 当  $x \rightarrow a$  时, 有

$$(1) o[f(x)] \cdot o[g(x)] = o[f(x)g(x)];$$

$$(2) O[f(x)] \cdot O[g(x)] = O[f(x)g(x)];$$

$$(3) o\{O[f(x)]\} = o[f(x)];$$

$$(4) O\{o[f(x)]\} = o[f(x)].$$

其中  $o[f(x)]$  表示是关于  $f(x)$  的高阶无穷小,  $O[f(x)]$  表示是关于  $f(x)$  的高阶无穷大.

证 (1)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{o[f(x)]o[g(x)]}{f(x)g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{o[f(x)]}{f(x)} \cdot \frac{o[g(x)]}{g(x)} = 0,$

故  $o[f(x)]o[g(x)] = o[f(x)g(x)].$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{O[f(x)]O[g(x)]}{f(x)g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{O[f(x)]}{f(x)} \cdot \frac{O[g(x)]}{g(x)} = A \neq 0,$$

故  $O[f(x)] \cdot O[g(x)] = O[f(x)g(x)]$

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{o\{O[f(x)]\}}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{o\{O[f(x)]\}}{O[f(x)]} \cdot \frac{O[f(x)]}{f(x)} = 0,$$

故  $o\{O[f(x)]\} = o[f(x)].$

$$(4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{O\{o[f(x)]\}}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{O\{o[f(x)]\}}{o[f(x)]} \cdot \frac{o[f(x)]}{f(x)} = 0,$$

故  $O\{o[f(x)]\} = o[f(x)].$

**例 16** 利用等价无穷小代换求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sqrt[n]{1+(x-2\pi)^2} - 1}{1 - \cos x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - e^{x/3}}{\ln(1+2x)};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3-x}); \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan^4 x}{\sin^3 x (1 - \cos x)};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}}{e^x - 1}; \quad (6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x \sin x^3}.$$

解 (1) 因为  $\sqrt[n]{1+(x-2\pi)^2} \sim 1 + \frac{1}{n}(x-2\pi)^2, 1 - \cos$

$= 1 - \cos(2\pi - x) \sim (2\pi - x)^2/2 = (x - 2\pi)^2/2$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sqrt{1 + (x - 2\pi)^2} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{(x - 2\pi)^2/n}{(x - 2\pi)^2/2} = \frac{2}{n}.$$

(2) 因为  $\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{x}{2}$ ,  $e^{x/3} \sim 1 + \frac{x}{3}$ ,  $\ln(1+2x) \sim 2x$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - e^{x/3}}{\ln(1+2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x/2 - 1 - x/3}{2x} = \frac{1}{12}.$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3-x})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left[ \left( \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) - \left( \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}} - 1 \right) \right].$$

因为  $\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} \sim 1 + \frac{1}{3x^2}$ ,  $\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}} \sim 1 - \frac{1}{3x^2}$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3-x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}.$$

(4) 因为  $\tan^4 x \sim x^4$ ,  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ ,  $\sin^3 x \sim x^3$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \tan^4 x}{\sin^3 x (1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot x^4}{x^3 \cdot x^2/2} = 2.$$

(5) 因为  $\sqrt{1+\tan x} \sim 1 + \frac{x}{2}$ ,  $\sqrt{1-\tan x} \sim 1 - \frac{x}{2}$ ,  $e^x - 1 \sim x$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x/2 - 1 + x/2}{x} = 1.$$

(6) 因为  $1 - \cos x^2 \sim \frac{x^4}{2}$ ,  $\sin x^3 \sim x^3$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x^2}{x \sin x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4/2}{x \cdot x^3} = \frac{1}{2}.$$

例 17 利用等价无穷小求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x - (1 - \cos \sqrt{x})}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \cot x \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos(1/x)}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right).$$

解 (1) 原式 =  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x(1 - \cos \sqrt{x})(1 + \sqrt{\cos x})}$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2/2}{x \cdot (\sqrt{x})^2/2 \cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

$$(2) \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\sin x} \frac{x - \sin x}{x \sin x}.$$

因为  $x \rightarrow 0$  时,  $\sin x \sim x - \frac{1}{3!}x^3 \Rightarrow x - \sin x \sim \frac{x^3}{3!}, \sin x \sim x$ ,

所以

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3/3!}{x^3} \cdot \cos x = \frac{1}{6}.$$

$$(3) \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos(1/x)}{2\ln(1 + x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left( \frac{3\sin x}{x} + x \cos \frac{1}{x} \right).$$

因为  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$  是无穷小与有界量的乘积, 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos(1/x)}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)} = \frac{3}{2} + 0 = \frac{3}{2}.$$

$$(4) \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x}.$$

因为  $x \rightarrow 0$  时,  $\tan x \sim x + \frac{x^3}{3} \Rightarrow \tan x - x \sim \frac{x^3}{3}, \tan x \sim x$ , 所

以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3/2}{x^2 \cdot x} = \frac{1}{3}.$$

例 18 已知  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax^2 + b}{x - 1} = 5$ , 求  $a, b$  的值.

解 由极限与无穷小量的关系, 得

$$\frac{x^3 + ax^2 + b}{x - 1} = 5 + \alpha(x),$$

其中

$$\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0.$$

$$\text{故} \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^3 + ax^2 + b = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)(5 + \alpha(x)) = 0.$$

$$\text{又} \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^3 + ax^2 + b = 1 + a + b \Rightarrow 1 + a + b = 0,$$

于是

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax^2 + b}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax^2 - (1+a)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3-1) + a(x^2-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x + 1 + ax + a = 2a + 3 = 5. \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad a = 1, \quad b = -1 - a = -2.$$

$$\text{例 19} \quad \text{求} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{x}{n} + \lambda \sin \frac{x}{n} \right)^n, \quad x \neq 0.$$

$$\text{解} \quad \text{令} \cos \frac{x}{n} + \lambda \sin \frac{x}{n} = 1 + \frac{x_n}{n}, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} x_n &= n \left( \cos \frac{x}{n} + \lambda \sin \frac{x}{n} - 1 \right) \\ &= \lambda x \frac{\sin(x/n)}{x/n} - x \frac{1 - \cos(x/n)}{x/n} \\ &= \lambda x \frac{x/n}{x/n} - x \frac{(x/n)^2/2}{x/n}. \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lambda x.$$

$$\text{又} \quad \left( \cos \frac{x}{n} + \lambda \sin \frac{x}{n} \right)^n = \left[ \left( 1 + \frac{x_n}{n} \right)^{n/x_n} \right]^{x_n},$$

$$\text{故} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{x}{n} + \lambda \sin \frac{x}{n} \right)^n = e^{\lambda x}.$$

**例 20** 设当  $x \rightarrow 0$  时,  $(1 + \alpha x^2)^{1/3} - 1$  与  $\cos x - 1$  是等价无穷小, 求常数  $\alpha$ .

**解** 因为当  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - \cos x \sim x^2/2$ ,  $(1 + \alpha x^2)^{1/3} - 1 \sim \alpha x^2/3$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \alpha x^2)^{1/3} - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x^2/3}{-x^2/2} = -2\alpha/3 = 1.$$

$$\text{从而} \quad \alpha = -3/2.$$

**例 21** 求下列极限:



$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sec x + \tan x)}{\sin x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{\tan x - \sin x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(a^{1/x} - a^{1/(x+1)}); \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x (e^{\sin x} - 1)^4}{\sin^2 x (1 - \cos x)}.$$

解 (1) 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1 + \sin x}{\cos x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x) - \ln \cos x}{\sin x}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin x} - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos^2 x}{\sin x}.$

因为当  $x \rightarrow 0$  时,  $\ln(1 + \sin x) \sim \sin x \sim x$ ,  $\ln \cos^2 x = \ln(1 - \sin^2 x) \sim -\sin^2 x \sim -x^2$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sec x + \tan x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x} = 1 - 0 = 1.$$

$$(2) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x} \frac{e^{\tan x - \sin x} - 1}{\tan x - \sin x}.$$

因为当  $x \rightarrow 0$  时,  $e^{\tan x - \sin x} - 1 \sim \tan x - \sin x$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{\tan x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x - \sin x} - 1}{\tan x - \sin x} = e^0 \cdot 1 = 1.$$

$$(3) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} a^{1/(x+1)} \frac{a^{1/x - 1/(x+1)} - 1}{(1/x)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} a^{1/(x+1)} \frac{a^{1/x(x+1)} - 1}{(1/x)^2}.$$

因为当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $\frac{1}{x^2} \sim \frac{1}{x(x+1)}$ ,  $a^{1/x(x+1)} - 1 \sim \frac{1}{x(x+1)} \ln a$   
 $\sim \frac{1}{x^2} \ln a$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(a^{1/x} - a^{1/(x+1)}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a^{1/(x+1)} \frac{(1/x^2) \ln a}{(1/x^2)}$$

$$= 1 \cdot \ln a = \ln a.$$

(4) 因为当  $x \rightarrow 0$  时,  $e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x$ ,  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x (e^{\sin x} - 1)^4}{\sin^2 x (1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \frac{x^4}{x^2 \cdot x^2/2} = 2.$$

例 22 设  $f, g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是两个函数, 且  $\forall x \in A, f(x) >$

0, 则称形如  $f(x)^{g(x)}$  的函数为幂指函数. 若  $\lim f(x) = 1, \lim g(x) = \infty$ , 则称极限  $\lim f(x)^{g(x)}$  属于  $1^\infty$  型不等式, 可以利用等式

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

转化为  $0 \cdot \infty$  型未定式  $g(x)\ln f(x)$  的极限问题.

(1) 设  $g_1(x) \sim g_2(x)$ , 证明: 若  $\lim f(x)^{g_1(x)}$  存在, 则

$$\lim f(x)^{g_2(x)} = \lim f(x)^{g_1(x)}.$$

(2) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0$ , 证明: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a > 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = a^b.$$

(3) 求下列极限:

$$1^\circ \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{1/x}; \quad 2^\circ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{1}{x} \right)^{x^2}.$$

证 (1) 若  $\lim f(x)^{g_1(x)}$  存在, 则  $\lim e^{g_1(x)\ln f(x)}$  存在, 即  $\lim g_1(x)\ln f(x)$  存在. 由等价无穷小代换得

$$\lim g_2(x)\ln f(x) = \lim g_1(x)\ln f(x),$$

所以  $\lim e^{g_2(x)\ln f(x)} = \lim e^{g_1(x)\ln f(x)},$

即  $\lim f(x)^{g_2(x)} = \lim f(x)^{g_1(x)}.$

(2) 令  $f(x)^{g(x)} = y$ , 则  $\ln y = g(x)\ln f(x)$ , 故有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln y = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\ln f(x),$$

即  $\ln(\lim y) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \lim_{x \rightarrow x_0} \ln f(x),$

从而  $\ln(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}) = b \ln a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = a^b.$

(3)  $1^\circ$  因为  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln(1 - \sin x)}$ , 而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{x} = -1,$$

故  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{1/x} = e^{-1}.$

$2^\circ$  因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{1}{x} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2 \ln \cos \frac{1}{x}},$  而

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \cos \frac{1}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left[ 1 + \left( \cos \frac{1}{x} - 1 \right) \right]}{1/x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x} - 1}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-(1/x^2) \cdot 1/2}{1/x^2} = -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \cos \frac{1}{x} \right)^{x^2} = e^{-1/2}.$$

## 第四节 连续函数

### 主要内容

1. 函数  $f$  在点  $x_0$  连续的三个等价定义:

(1) 函数  $f$  在  $U(x_0)$  有定义, 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

(2)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ , 其中  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ .

(3)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得当  $|x - x_0| < \delta$  时, 总有  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

2. 设函数  $f$  在  $U^+(x_0)$  (或  $U^-(x_0)$ ) 内有定义, 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \text{ (或 } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \text{)},$$

则称函数  $f$  在点  $x_0$  右连续 (或左连续).

函数  $f$  在点  $x_0$  连续的充要条件是: 函数  $f$  在点  $x_0$  左、右连续.

3. 若函数  $f$  在点  $x_0$  不连续, 则称  $x_0$  为  $f$  的间断点.

(1) 在  $x_0$  处  $f$  左、右极限都存在的间断点称为第一类间断点, 包括

1° 可去间断点 存在  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 但  $f$  在  $x_0$  无定义, 或  $f(x_0) \neq A$ .

2° 跳跃间断点 在  $x_0$  左、右极限存在, 但  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ .

(2) 在  $x_0$  处  $f$  左、右极限至少有一个不存在的间断点称为第二类间断点.

4. 若函数  $f$  在区间  $I$  上每一点都连续, 则称  $f$  为  $I$  上的连续函数.

#### 5. 连续函数的局部性质

(1) 局部有界性 若函数  $f$  在  $x_0$  连续, 则函数  $f$  在  $x_0$  的某邻域内有界.

(2) 局部保号性 若函数  $f$  在  $x_0$  连续, 且  $f(x_0) \neq 0$ , 则  $f$  在  $x_0$  的某邻域内与  $f(x_0)$  同号. 且  $\exists \gamma > 0$ , 使在  $U(x_0)$  内,  $|f(x)| > \gamma > 0$ .

(3) 四则运算 若函数  $f, g$  在点  $x_0$  都连续, 则  $f \pm g, f \cdot g, f/g$  ( $g(x_0) \neq 0$ ) 在  $x_0$  仍连续.

(4) 复合性 若函数  $f$  在点  $x_0$  连续,  $g$  在点  $u_0$  连续, 且  $u_0 = f(x_0)$ , 则复合函数  $f \circ g$  在  $x_0$  连续.

6. 有界性定理 若函数  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $f$  在  $[a, b]$  上有界.

7. 最值定理 若函数  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $f$  在  $[a, b]$  上取得最大值和最小值.

8. 介值性定理 若函数  $f$  在  $[a, b]$  上连续,  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , 且  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , 则  $f$  可取到介于  $f(x_1)$  与  $f(x_2)$  之间的每一个值.

若函数  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a)$  与  $f(b)$  异号, 则在  $(a, b)$  内至少存在一点  $x_0$ , 使  $f(x_0) = 0$ .

9. 反函数连续性定理 若函数  $f$  在  $[a, b]$  上严格单调增加(或单调减少)且连续, 则反函数  $f^{-1}$  在其相应定义域  $[f(a), f(b)]$  (或  $[f(b), f(a)]$ ) 上连续.

10. 设函数  $f$  定义在  $I$  上,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使对于一切  $x', x''$

$\in I$ , 只要  $|x' - x''| < \delta$ , 就有  $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ . 则称  $f$  在  $I$  上一致连续.

11. 一致连续性定理 若函数  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 则在  $f$  上一致连续.

## 疑 难 解 析

1. 为什么要研究连续函数?

答 连续函数有许多优点:

(1) 有广泛的应用. 自然界和科学技术中的许多问题可以用连续函数来描述.

(2) 有优良的局部性质. 当我们研究一点  $x_0$  附近(某邻域内)函数性质时, 连续函数的局部有界性与局部保号性会给研究以很大的便利.

(3) 便于计算函数的极限. 当函数连续时, 极限记号与函数记号可以交换; 即运算“ $f$ ”与“ $\lim$ ”可以交换顺序,  $\lim f(x) = f[\lim x]$ . 尤其在复合函数情形时效果更为显著.

(4) 闭区间上连续函数具有优良的整体性质, 如有界性、取最值性、介值性和一致连续性. 数学分析中很多问题的研究证明要应用这些性质来进行.

2. 在区间上函数  $f$  连续与一致连续有什么不同?

答 在区间上函数连续与一致连续有重大的差别. 从两者定义上可以看出: 对于  $f$  连续来说, 当  $\epsilon$  给定时, 对不同的  $x \in I$ , 相应的  $\delta$  不仅与  $\epsilon$  有关, 还与  $x$  有关; 而对于  $f$  一致连续情形, 当  $\epsilon$  给定时, 相应的  $\delta$  只与  $\epsilon$  有关而与  $x$  无关.

连续函数在区间  $I$  上的一致连续性是函数在  $I$  上整体变化情况的一种衡量. 如果连续函数的图像在每个局部都比较平缓, 即其陡势受到控制, 函数可能是一致连续, 所以可以通过图像对函数的一致连续性作一初步估计.

## 方法、技巧与典型例题分析

连续性和一致连续性概念是数学分析的主要理论基础,因此,利用连续性和一致连续性来证明命题,是检验对概念的理解程度好坏的方法.一般都采用直接证明的方法进行,有时也采用反证法进行.

### 一、连续函数概念的命题

例1 设函数  $f(x)$  对一切  $x_1, x_2 \in I$ , 满足等式  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ , 且  $f(x)$  在  $x = 0$  连续, 证明:  $f(x)$  在任意  $x \in I$  连续.

证 在等式  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$  中令  $x_2 = 0$ , 则  
$$f(x_1) = f(x_1) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

又由  $f(x)$  在  $x = 0$  的连续性, 有  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\Delta x) = f(0) = 0$ . 而由所给等式

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0) + f(\Delta x) - f(x_0) = f(\Delta x),$$
取  $\Delta x \rightarrow 0$  的极限, 即得

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\Delta x) = 0,$$

所以,  $f(x)$  在任意点  $x_0 \in I$  连续.

例2 设  $f(x)$  在  $x = x_0$  连续, 且  $f(x_0) > 0$ , 证明:  $\exists \delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时,  $f(x) > 0$ .

证 取  $\varepsilon = f(x_0) > 0$ , 则由于  $f(x)$  在  $x = x_0$  连续,  $\exists \delta > 0$ , 使得当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = f(x_0)$ . 从而

$$f(x) > f(x_0) - f(x_0) = 0.$$

例3 设函数  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 证明:

(1) 若对任何有理数  $r \in [a, b]$ , 有  $f(r) = 0$ , 则在  $[a, b]$  上,  $f(x) \equiv 0$ .

(2) 若对任何有理数  $r_1, r_2 \in [a, b]$ ,  $r_1 < r_2$ , 有  $f(r_1) < f(r_2)$ ,

则  $f$  在  $[a, b]$  上严格递增.

证 (1) 对任何无理数  $x_0 \in [a, b]$ , 取有理点列  $\{r_n\} \subset [a, b]$ , 使  $r_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow +\infty)$ , 则

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n) = 0.$$

由  $x_0$  的任意性和  $f(r) = 0$  知,  $f(x) \equiv 0$ .

(2) 对任意  $x_1, x_2 \in (a, b)$ ,  $x_1 < x_2$ , 取有理数  $r_1, r_2 \in (x_1, x_2)$ ,  $r_1 < r_2$ , 则由  $f$  的连续性知, 对  $\varepsilon = \frac{1}{2}[f(r_2) - f(r_1)] > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  (可设  $\delta = \min\{r_1 - x_1, x_2 - r_2\}$ ), 使对于  $r'_1 \in (x_1, x_1 + \delta)$  及  $r'_2 \in (x_2 - \delta, x_2)$ , 且  $r'_1, r'_2$  为有理数, 有

$$f(x_1) < f(r'_1) + \varepsilon, \quad f(x_2) > f(r'_2) - \varepsilon.$$

因为  $r'_1 < r_1 < r_2 < r'_2$ , 故由  $f$  在有理点上的严格递增和上面给出的不等式, 有

$$f(x_1) < f(r'_1) + \varepsilon < f(r_1) + \varepsilon = f(r_2) - \varepsilon < f(r'_2) - \varepsilon < f(x_2),$$

由  $x_1 < x_2$  和  $x_1, x_2$  的任意性知,  $f$  在  $[a, b]$  上严格递增.

例 4 证明: 若函数  $f$  和  $g$  是连续的, 则函数  $\varphi = \min\{f, g\}$  和  $\psi = \max\{f, g\}$  也是连续的.

证 (1)  $\forall x_0 \in I$ , 若  $f(x_0) \neq g(x_0)$ , 不妨设  $f(x_0) > g(x_0)$ , 由  $f$  和  $g$  的连续性得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = f(x_0) - g(x_0) > 0,$$

即  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  当  $|x - x_0| < \delta$  时, 总有

$$f(x) - g(x) > 0, \quad \text{即} \quad f(x) > g(x).$$

所以, 当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有

$$\varphi(x) = \min\{f(x), g(x)\} = g(x)$$

$$\text{和} \quad |\varphi(x) - \varphi(x_0)| = |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon,$$

$$\text{即} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0).$$

所以, 当  $f(x_0) \neq g(x_0)$  时,  $\varphi(x)$  在  $x_0$  连续.

若  $f(x_0) = g(x_0)$ , 则  $\varphi(x_0) = f(x_0) = g(x_0)$ , 由  $f$  和  $g$  的连

续性知,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时,

$$|f(x) - \varphi(x_0)| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

与  $|g(x) - \varphi(x_0)| = |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$

同时成立, 于是  $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$  成立. 所以  $f(x_0) = g(x_0)$  时,  $\varphi(x)$  在  $x_0$  也连续.

由  $x_0$  的任意性知,  $\varphi = \min\{f, g\}$  是连续函数.

(2) 类似可证. 请读者一试.

例 5 区间  $(a, b)$  内单调函数的不连续点必为第一类间断点.

证 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  内单调增加(单调减少可类似证明). 任取  $x_0 \in (a, b)$ , 则集合  $\{f(x) | x \in (a, x_0)\}$  有上界, 且为上确界, 记为  $\alpha = \sup\{f(x) | x \in (a, x_0)\}$ . 对一切  $x \in (a, x_0)$ , 有  $f(x) \leq \alpha$ .

而  $\forall \varepsilon > 0, \exists x' \in (a, x_0)$ , 使得  $f(x') > \alpha - \varepsilon$  成立. 取  $\delta = x_0 - x' > 0$ , 则当  $-\delta > x - x_0 > 0$  时, 有  $x' < x < x_0$ , 于是, 有

$$-\varepsilon < f(x') - \alpha \leq f(x) - \alpha \leq 0.$$

即

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \alpha.$$

类似可证  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \beta$ , 其中

$$\beta = \inf\{f(x) | x \in (x_0, b)\}.$$

以上两式说明: 若  $x_0$  是单调函数在  $(a, b)$  内的间断点, 必为第一类间断点中的跳跃间断点.

例 6 设函数  $f(x)$  在  $x = 0$  连续, 且  $f(0) = 0$ , 已知  $|g(x)| \leq |f(x)|$ , 证明: 函数  $g(x)$  在  $x = 0$  也连续.

证 因为  $|g(x)| \leq |f(x)|$ , 所以  $|g(0)| \leq |f(0)| = 0$ , 即  $g(0) = 0$ . 又  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ , 即  $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0$ , 于是, 有

$$0 \leq |g(x)| \leq |f(x)| \leq 0 \quad (x \rightarrow 0).$$

由迫敛性知,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = g(0)$ , 所以  $g(x)$  在  $x = 0$  连续.

例 7 设函数  $f$  在  $(a, b)$  内每一点处的左、右极限都存在, 又  $\forall x, y \in (a, b)$ , 有



$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x) + f(y)],$$

证明:  $f$  在  $(a, b)$  内连续.

证  $\forall x_0 \in (a, b)$ , 记  $f(x_0^+) = A^+$ ,  $f(x_0^-) = A^-$ . 以下证明  $A^+ = A^- = f(x_0)$ .

在不等式中令  $x = x_0$ , 分别取  $y \rightarrow x_0^+$  与  $y \rightarrow x_0^-$  时的极限, 得

$$\begin{cases} A^+ \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}A^+, \\ A^- \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}A^-, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^+ \leq f(x_0), \\ A^- \leq f(x_0). \end{cases}$$

在不等式中又令  $x = x_0 + h$ ,  $y = x_0 - h$ , 取  $h \rightarrow 0$  时的极限, 得

$$f(x_0) \leq \frac{1}{2}(A^+ + A^-).$$

于是  $A^+ = A^- = f(x_0)$ . 由  $x_0$  的任意性知,  $f(x)$  在  $(a, b)$  内连续.

题给不等式是  $(a, b)$  内  $f$  为凸函数的条件, 因此本例又说明: 对于凸函数  $f$ , 只要在  $(a, b)$  内每一点存在左、右极限, 则必为连续函数.

**例 8** 证明: 若  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  存在, 则  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内必有界.

证 令  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 则  $\forall \epsilon > 0, \exists X > 0$ , 只要  $|x| > X$ , 就有  $|f(x) - A| < \epsilon$ , 也就是  $A - \epsilon < f(x) < A + \epsilon$ .

由于  $f(x)$  在  $[-X, X]$  上连续, 则由有界性定理,  $\exists M$ , 使  $|f(x)| \leq M$ . 因而若取  $N = \max\{M, |A - \epsilon|, |A + \epsilon|\}$ , 一定有  $|f(x)| \leq N, x \in (-\infty, +\infty)$ .

**例 9** 设  $f(x)$  是定义在  $(-\infty, +\infty)$  上的实函数, 且满足:  $f(a) < c < f(b)$ , 则在  $a, b$  间存在一个  $x$ , 使  $f(x) = c$ , 且当  $r$  为有理数时, 满足  $f(x) = r$  的  $x$  组成一个闭集. 证明:  $f$  是连续函数.

证 用反证法. 若  $f(x)$  在  $x_0 \in (-\infty, +\infty)$  上不连续, 则

$\exists \varepsilon_0$  及点列  $\{x_n\}, x_n \rightarrow x_0$ , 使

$$|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon_0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

即  $f(x_n) < f(x_0) - \varepsilon$  或  $f(x_n) > f(x_0) + \varepsilon$ .

若有无穷多个点  $\{x_{n_i}\}$ , 使  $f(x_{n_i}) < f(x_0) - \varepsilon_0$ , 则  $\exists$  有理数  $r_i$ , 使

$$f(x_{n_i}) < r_i < f(x_0) \quad (i = 1, 2, \dots).$$

由题设知,  $\exists \xi_i$ , 使  $\xi_i$  在  $x_0$  与  $x_{n_i}$  之间, 有  $r_i = f(\xi_i)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), 而  $\{\xi_i\}$  为一个闭集. 故  $\lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i = x_0 \in \{\xi_i\}$ . 从而  $f(x_0) = r_i$ , 推出矛盾.

对于若有无穷多个点  $\{x_{n_j}\}$ , 使  $f(x_{n_j}) > f(x_0) + \varepsilon$  的情况, 可以用类似方法推出矛盾.

综上所述知,  $f(x)$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的连续函数.

**例 10** 设  $f$  是不为常数的连续周期函数, 证明:  $f$  必有最小正周期.

**证** 设  $f$  的正周期的集合为  $T = \{t | t \text{ 为 } f \text{ 正周期}\}$ , 显然  $\inf T = t_0$  (因为  $T$  有下界 0).

设  $t_0 > 0$ , 根据确界的性质, 存在  $\{t_n\} \subset T$ , 使  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0$ . 则由  $f$  的连续性,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 有

$$f(x + t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x + t_n) = f(x),$$

所以,  $t_0$  是  $f$  的周期.

用反证法证  $t_0 \neq 0$ . 若  $t_0 = 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$ . 即  $\forall x \in \mathbf{R}, \exists \{x_n\} \rightarrow x$  ( $x_n = k_n t_n + r_n, n = 1, 2, \dots$ . 其中  $k_n$  为整数,  $0 \leq r_n \leq t_n$ ). 于是, 由  $f$  的连续性

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(k_n t_n) = f(0),$$

即  $f(x) \equiv f(0)$ , 与假设矛盾, 故  $t_0 > 0$ .

由于  $t_0$  是  $f$  的正周期下界, 且  $t_0 > 0$ , 所以  $t_0$  是  $f$  最小正周期.

**例 11** 设  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内有定义, 且函数  $e^x f(x)$  与  $e^{-f(x)}$  在  $(0, 1)$  内都是单调不减的. 证明:  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内连续.

证 先证  $\exists x_0 \in (0, 1)$ , 左、右极限存在, 再证它们相等.

$\forall x_0 \in (0, 1)$ , 因  $e^{-f(x)}$  单调不减, 故  $x > x_0$  时,  $e^{-f(x)} \geq e^{-f(x_0)} \Rightarrow e^{f(x_0)} \geq e^{f(x)}$ ,  $f(x_0) \geq f(x)$ , 即  $f(x)$  单调递减. 所以, 对于  $x_0 \in (0, 1)$ ,  $f(x_0 + 0)$ ,  $f(x_0 - 0)$  都存在.

又由  $e^x f(x)$  单调不减知: 当  $x > x_0$ ,  $e^x f(x) \geq e^{x_0} f(x_0)$ , 令  $x \rightarrow x_0^+$ , 则  $e^x f(x_0 + 0) \geq e^{x_0} f(x_0) \Rightarrow f(x_0 + 0) \geq f(x_0)$ . 在前段中, 令  $x \rightarrow x_0^+$ , 得  $f(x_0) \geq f(x_0 + 0)$ , 故有  $f(x_0) = f(x_0 + 0)$ . 类似可证  $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ . 从而知  $f(x)$  在  $x_0$  连续. 由  $x_0$  的任意性, 确认  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内连续.

例 12 证明: 对于黎曼函数

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{当 } x = \frac{p}{q} \text{ 为既约分数, } q > 0, \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数及零, } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$R(x)$  在无理点上连续, 在有理点上间断.

证 任取  $x_0 \in (0, 1)$ , 则  $\forall \epsilon > 0$ , 由无理点的稠密性, 只有有限个正整数  $q \leq \frac{1}{\epsilon}$ . 即在  $(0, 1)$  中, 只有有限个有理点  $\frac{p}{q}$ , 使  $R\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} \geq \epsilon$ . 于是,  $\exists \delta > 0$ , 使在  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  中没有有理点  $x (x \neq x_0)$ , 出现  $R(x) \geq \epsilon$ . 从而, 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 恒有  $|R(x)| < \epsilon$ , 即  $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0$ .

若  $x_0$  是无理点, 则由  $R(x_0) = 0$  知,  $R(x)$  在  $x_0$  连续; 若  $x_0$  是有理点, 则由  $R(x_0) = \frac{1}{q} \neq 0$  知,  $R(x)$  在  $x_0$  间断.

例 13 设  $f(x) \forall x \in (-\infty, +\infty)$ , 有  $f(x^2) = f(x)$ , 且  $f(x)$  在  $x = 0$  和  $x = 1$  连续, 证明:  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  为常数.

证 当  $x > 0$  时, 因为  $f(x^2) = f(x)$ , 所以

$$f(x) = f(x^{1/2}) = f(x^{1/4}) = \cdots = f(x^{1/2^n}) = \cdots,$$

故  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{1/2^n}) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/2^n}) = f(1).$

当  $x < 0$  时, 可得  $f(x) = f(x^2) = f(1)$  (此时  $x^2 > 0$ ).

当  $x = 0$  时,  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(1)$ .

综上所述知,  $f(x) \equiv f(1)$ .

**例 14** 确定  $a, b$  的值, 使  $f(x) = \frac{e^x - b}{(x - a)(x - 1)}$  有无穷间断点  $x = 0$  和可去间断点  $x = 1$ .

**解** 要  $x = 0$  为无穷间断点, 应有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - a)(x - 1)}{e^x - b} = \frac{a}{1 - b} = 0.$$

故当  $a = 0, b \neq 1$  时,  $x = 0$  为无穷间断点.

要  $x = 1$  为可去间断点, 应有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - b}{(x - a)(x - 1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e(e^{x-1} - b/e)}{(x - a)(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e}{x - a} = \frac{e}{1 - a}, \end{aligned}$$

即 
$$e^{x-1} - \frac{b}{e} \sim x - 1 \Rightarrow \frac{b}{e} = 1 \Rightarrow b = e.$$

所以, 应有  $a = 0, b = e$ .

**例 15** 讨论下面函数的连续性:

$$f(x) = \begin{cases} 1/(1 - e^{x/(x-1)}), & x \neq 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

若有间断点, 指出其类型.

**解** 在  $x = 0$  与  $x = 1$ ,  $f(x)$  无定义, 所以  $x = 0$  和  $x = 1$  是间断点. 在其它点  $f(x)$  连续. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 1/(1 - e^{x/(x-1)}) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} 1/(1 - e^{x/(x-1)}) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 1/(1 - e^{x/(x-1)}) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} 1/(1 - e^{x/(x-1)}) = -\infty.$$

所以,  $x = 1$  是第一类间断点(跳跃间断点),  $x = 0$  是第二类间断点(无穷间断点).

**例 16** 已知  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2 + 1}{x + 1} - (ax + b) \right] = 0$ , 求  $a, b$  的值.

解 因为

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + 1}{x + 1} - (ax + b) = \frac{x^2 + 1 - (ax + b)(x + 1)}{x + 1} \\ &= \frac{(1 - a)x^2 - (a + b)x + 1 - b}{x + 1}, \end{aligned}$$

而  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - a)x^2 - (a + b)x + 1 - b}{x + 1} = 0,$

所以,必有  $1 - a = 0$  (否则  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ )  $\Rightarrow a = 1$ . 又

$$a + b = 0 \text{ (否则 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -(a + b) \neq 0) \Rightarrow b = -a = -1.$$

综上所述知,要使等式成立,必须使  $a = 1, b = -1$ .

由于  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - (ax + b)] = 0$  的几何意义是:直线  $y = ax + b$  是函数  $g(x)$  曲线的斜渐近线. 故此例说明,函数  $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$  以  $y = x - 1$  为斜渐近线.

## 二、闭区间上的连续函数

例 17 证明:若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上每个函数值恰好取得两次,则函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上不连续.

证 用反证法和闭区间上连续函数的介值定理证明. 设  $f$  在  $[a, b]$  上连续,则有惟一的  $c \in [a, b]$ ,使  $f(a) = f(c)$ . 为简单计,设  $c = b$ ,则  $f(a) = f(b)$ .

$\forall x \in (a, b)$ , 有  $f(x) < f(a)$  或  $f(x) > f(a)$ . 取  $f(x) > f(a)$  ( $f(x) < f(a)$  类似可证), 则  $f(a) = f(b)$  是  $f$  在  $[a, b]$  上的最小值  $m$ . 由  $f$  的连续性,  $f$  在  $[a, b]$  必有最大值  $M$ , 依题设有  $x, y \in [a, b]$ , 且  $x < y$ , 使  $f(x) = f(y) = M$  (见图 2.2).

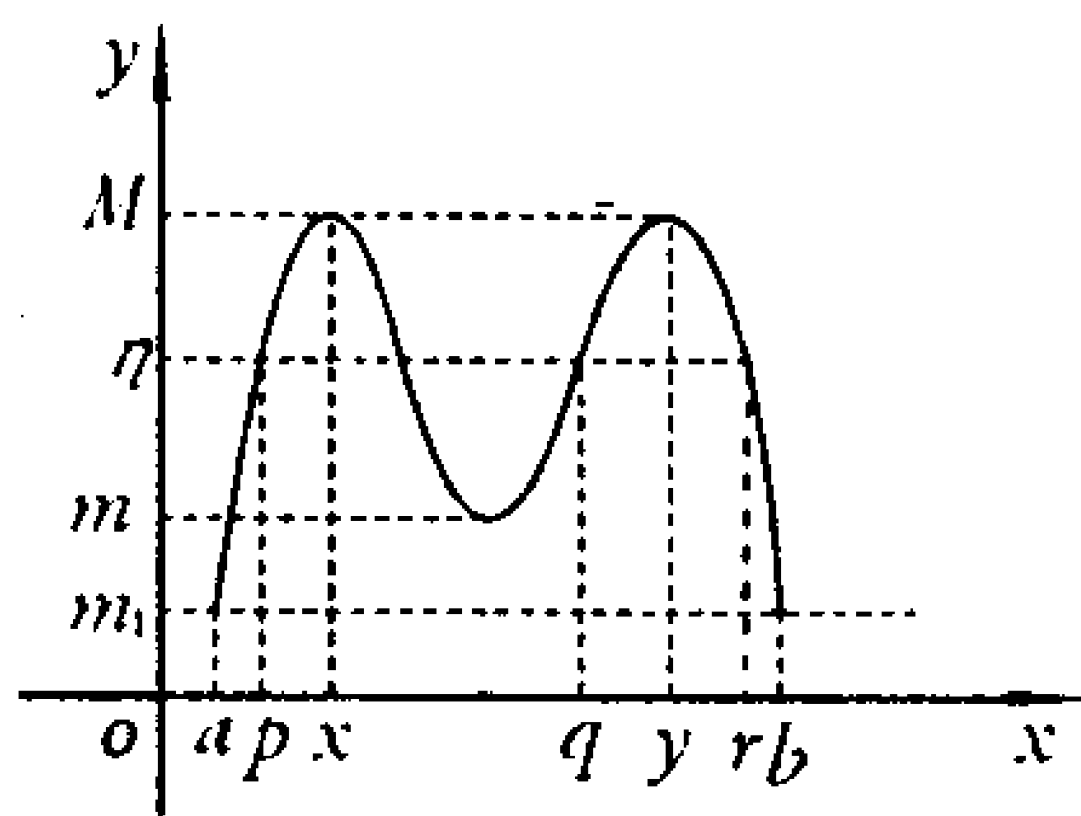


图 2.2

而  $f$  在  $[x, y]$  上连续,故在  $(x, y)$  内  $f$  有最小值  $m_1$ , 使  $m < m_1 < M$ . 则  $\forall \eta \in [m_1, M]$ , 依连续函数的介值定理, 在  $[a, x]$ ,  $[x, y]$ ,  $[y, b]$  内至少各有一点  $p, q, r$  存在, 使

$$f(p) = f(q) = f(r) = \eta.$$

推出与题设相矛盾. 故可确定,  $f$  在  $[a, b]$  上不是连续函数.

**例 18** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $a < c < d < b$ , 证明: 对任意正数  $p$  和  $q$ , 至少有一  $\xi \in [c, d]$ , 使

$$pf(c) + qf(d) = (p + q)f(\xi).$$

**证** 因  $[c, d] \subset [a, b]$ , 所以  $f$  在  $[c, d]$  上连续, 必在  $[c, d]$  上有最大值  $M$  与最小值  $m$ , 使

$$m \leq f(c) \leq M, \quad m \leq f(d) \leq M.$$

又因  $p > 0, q > 0$ , 所以

$$pm \leq pf(c) \leq pM, \quad qm \leq qf(d) \leq qM,$$

得  $(p + q)m \leq pf(c) + qf(d) \leq (p + q)M,$

即  $m \leq \frac{pf(c) + qf(d)}{p + q} \leq M.$

于是, 依闭区间上连续函数的介值定理, 在  $[c, d]$  上至少有一点  $\xi$ , 使

$$f(\xi) = \frac{pf(c) + qf(d)}{p + q}.$$

从而有  $pf(c) + qf(d) = (p + q)f(\xi).$

**例 19** 设函数  $f(x)$  在  $[0, 2a]$  上连续, 且  $f(0) = f(2a)$ , 证明: 在  $[0, a]$  上至少存在一点  $\xi$ , 使  $f(\xi) = f(\xi + a).$

**证** 令  $F(x) = f(x) - f(x + a)$ , 则由  $f(x)$  在  $[0, 2a]$  上连续知,  $f(x + a)$  在  $[0, a]$  上连续, 所以  $F(x)$  在  $[0, a]$  上连续. 由于

$$F(0) = f(0) - f(a),$$

$$F(a) = f(a) - f(2a) = -[f(0) - f(a)] = -F(0),$$

故若  $f(0) - f(a) = 0$ , 有  $f(0) = f(a) = f(2a)$ , 即当  $\xi = a$  时, 有  $f(\xi) = f(\xi + a)$ ; 若  $f(0) - f(a) \neq 0$ , 有  $F(0)F(a) < 0$ , 由零点定理, 至少有一点  $\xi \in (0, a)$ , 使  $F(\xi) = 0$ , 即  $f(\xi) = f(\xi + a).$

综上所述知, 在  $[0, a]$  上至少有一点  $\xi$ , 使  $f(\xi) = f(\xi + a).$

**例 20** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且无零点, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上恒正(或恒负).

**证** 用反证法. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上不恒正(或不恒负), 可设

$f(x_1) < 0, f(x_2) > 0, x_1, x_2 \in [a, b]$  且  $x_1 < x_2$ . 由闭区间上连续函数的零点定理, 至少有一点  $\xi \in (x_1, x_2)$ , 使  $f(\xi) = 0$ . 与题设  $f(x)$  无零点矛盾. 故  $f(x)$  在  $[a, b]$  上必恒正(或恒负).

**例 21** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且是一一对应的, 证明:

(1) 当  $f(a) < f(b)$  时,  $f(x)$  严格单调增加;

(2) 当  $f(a) > f(b)$  时,  $f(x)$  严格单调减少.

**证** (1) 用反证法. 设  $f(x)$  不严格单调增加. 则  $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ , 且  $x_1 < x_2$ , 而  $f(x_1) \geq f(x_2)$ . 因函数是一一对应的, 故必有  $f(x_1) > f(x_2)$ .

若  $f(x_2) > f(a)$ , 依闭区间上连续函数的介值定理,  $\exists \xi \in (a, x_1)$ , 使得  $f(\xi) = f(x_2)$  ( $\xi < x_1 < x_2$ ). 这与函数  $f(x)$  是一一对应的矛盾.

若  $f(x_2) < f(a)$ , 同样知  $\exists \eta \in (x_2, b)$ , 使得  $f(\eta) = f(a)$  ( $\eta > x_2 \geq a$ ). 这也与函数  $f(x)$  是一一对应的矛盾.

综上所述知, 此时  $f(x)$  严格单调增加.

(2) 令  $g(x) = -f(x)$ , 则  $g(a) < g(b)$ . 由题(1)知  $g(x)$  严格单调增加. 故  $f(x)$  严格单调减少.

**例 22** 设  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  为连续函数,  $f(0) = 0, f(1) = 1, f[f(x)] = x$ . 证明:  $f(x) = x$ .

**证** 因为  $\forall x_1, x_2 \in [0, 1]$ , 若  $f(x_1) = f(x_2)$ , 则由  $f[f(x)] = x$  知

$$x_1 = f[f(x_1)] = f[f(x_2)] = x_2.$$

所以,  $f$  是一一对应的. 现证明  $f$  是严格单调的, 用反证法. 设  $f$  不严格单调, 则必  $\exists x_1 < x_2 < x_3$ , 使得  $f(x_1) < f(x_2)$ , 但  $f(x_2) > f(x_3)$  (或  $f(x_1) > f(x_2), f(x_2) < f(x_3)$ ) 下面讨论  $f(x_1) < f(x_2), f(x_2) > f(x_3)$  的情形(括号内情形类似可证).

任取一数  $c$ , 使  $\max\{f(x_1), f(x_3)\} < c < f(x_2)$ , 则由闭区间上的介值定理知:  $\exists \xi_1 \in (x_1, x_2)$  和  $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ , 使  $f(\xi_1) = c = f(\xi_2)$ . 这与  $f$  的一一对应性矛盾, 故  $f$  是严格单调的.

因为  $\forall x \in [0, 1]$ , 因此要么  $f(x) \geq x$ , 因此要么  $f(x) \leq x$ . 由于  $f(x)$  严格单调, 且  $f(0) = 0, f(1) = 1$ , 所以  $f(x)$  是严格单调增加的. 因此, 当  $f(x) \geq x$  时, 有

$$x = f[f(x)] \geq f(x);$$

当  $f(x) \leq x$  时, 有

$$x = f[f(x)] \leq f(x).$$

故总有  $f(x) = x$ .

**例 23** 设函数  $f_1(x)$  与  $f_2(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f_1(a) < f_2(a), f_1(b) > f_2(b)$ , 证明: 在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使  $f_1(\xi) = f_2(\xi)$ .

**证** 引入辅助函数  $F(x) = f_1(x) - f_2(x)$ , 则由题设条件知:  $F(a) < 0, F(b) > 0, F(x)$  在  $[a, b]$  上连续. 依闭区间上连续函数的零点定理, 在  $(a, b)$  内至少有一点  $\xi$ , 使  $F(\xi) = 0$ , 即  $f_1(\xi) = f_2(\xi)$ .

**例 24** 证明: 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$ , 则在  $[x_1, x_n]$  上必有一点  $\xi$ , 使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

**证** 因为  $f(x)$  在  $[x_1, x_n]$  上连续, 所以  $f(x)$  在  $[x_1, x_n]$  上有最大值  $M$  和最小值  $m$ , 故对  $x_i$  有

$$m \leq f(x_i) \leq M \quad (x_i \in [x_1, x_n], i = 1, 2, \cdots, n).$$

于是  $nm \leq f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leq nM$ ,

即  $m \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \leq M$ .

由闭区间上连续函数的介值定理知, 存在  $\xi \in [x_1, x_n]$ , 使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}, \quad \xi \in [a, b].$$

**类题** 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  内连续, 且  $x_i \in (a, b), i = 1, 2, \cdots, n$ , 则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使



$$f(\xi) = \frac{2[f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + nf(x_n)]}{n(n+1)}.$$

证 这时, 因为不知  $x_i$  的大小, 可取区间  $[c, d]$ , 其中

$$c = \min\{x_i\}, \quad d = \max\{x_i\}.$$

则  $f(x)$  在  $[c, d]$  内连续且有最大值  $M$  和最小值  $m$ . 仿效例 24 中的做法, 得

$$\frac{n(n+1)}{2}m \leq f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + nf(x_n) \leq \frac{n(n+1)}{2}M,$$

即 
$$m \leq \frac{2[f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + nf(x_n)]}{n(n+1)} \leq M.$$

依介值定理即得, 至少有一点  $\xi \in [c, d] \subset (a, b)$ , 使

$$f(\xi) = \frac{2[f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + nf(x_n)]}{n(n+1)}.$$

例 25 设  $f(x)$  在  $[0, n]$  上连续,  $f(0) = f(n)$  ( $n \in \mathbf{N}$ ), 证明: 在  $(0, n)$  内至少有一点  $\xi$ , 使  $f(\xi+1) = f(\xi)$ .

证 作辅助函数  $F(x) = f(x+1) - f(x)$ , 则  $F(x)$  在  $[0, n-1]$  上连续, 且

$$F(i) = f(i+1) - f(i) \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1),$$

于是  $F(0) + F(1) + \cdots + F(n-1) = f(n) - f(0) = 0$ .

记  $F(x)$  在  $[0, n-1]$  上的最大值为  $M$ , 最小值为  $m$ , 则由例 24 知,  $m \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(i) \leq M$ . 于是, 由闭区间上连续函数的介值定理知, 在  $(0, n-1)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使

$$F(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(i) = 0,$$

即  $f(\xi+1) = f(\xi), \xi \in (a, b)$ .

例 26 设函数  $f$  在  $[a, b]$  上连续,  $\forall x \in [a, b]$ , 记  $M(x) = \sup_{a \leq t \leq x} f(t)$ , 证明:  $M(x)$  在  $[a, b]$  上连续.

证 任取  $x_0 \in (a, b)$ , 则  $\forall x \in (a, x_0)$ , 有

$$f(x) \leq \sup_{a \leq t \leq x} f(t) = M(x) \leq M(x_0 - 0) \quad (\text{因为 } M(x) \text{ 递增})$$

$$\Rightarrow M(x_0) = \sup_{a \leq t \leq x} f(t) \leq M(x_0 - 0),$$

故知

$$M(x_0 - 0) = M(x_0).$$

又,由  $f$  在  $x_0$  的连续性,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h \in (0, \delta)$  以及  $x \in (x_0, x_0 + h)$ , 有

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon \leq M(x_0) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in (x_0, x_0 + h)} f(x) \leq M(x_0) + \varepsilon,$$

从而得  $M(x_0 + h) = \sup_{a \leq x \leq x_0 + h} f(x)$

$$= \max\{M(x_0), \sup_{x \in (x_0, x_0 + h)} f(x)\} \leq M(x_0) + \varepsilon.$$

令  $h \rightarrow 0^+$ , 由  $\varepsilon$  的任意性, 即得

$$M(x_0 + 0) \leq M(x_0) \Rightarrow M(x_0 + 0) = M(x_0).$$

所以,  $M(x)$  在  $x_0$  连续, 即  $M(x)$  在  $[a, b]$  连续.

类似可证以下命题: 若  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $m(x) = \min_{a \leq t \leq x} \{f(t)\}$  和  $M(x) = \max_{a \leq t \leq x} \{f(t)\}$  在  $[a, b]$  上连续.

**例 27** 定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f$  满足:  $f$  在  $x = 0$  连续, 且对  $x, y \in \mathbf{R}$  有  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ . 证明: (1)  $f$  在  $\mathbf{R}$  上连续; (2)  $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = xf(1)$ .

**证** (1) 令  $x = y = 0$ , 则知  $f(0) = 0$ .  $\forall x_0 \in \mathbf{R}$ , 由  $f(x) = f(x - x_0) + f(x_0)$  及  $f(x)$  在  $x = 0$  的连续性得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x - x_0) + f(x_0)] = f(0) + f(x_0) = f(x_0),$$

所以,  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上连续.

(2) 以  $y = -x$  代入, 得  $f(x) = f(-x)$ , 即  $f$  为奇函数. 对正整数  $p, q$ , 反复运用等式  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ , 得

$$f(p) = pf(1), \quad f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q}f(1).$$

由此结果及  $f$  为奇函数知, 对任何有理数  $r = \frac{p}{q}$  ( $q \neq 0$ ), 有

$$f(r) = rf(1).$$

因此,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 取有理数列  $\{r_n\}, r_n \rightarrow x$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 可由  $f$  的连

续性得

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n f(1) = x f(1).$$

### 三、一致连续性问题

例 28 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  内一致连续, 证明:

(1)  $\exists \delta > 0$ , 使  $\forall x_0$ , 当  $x \in (a, b) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  时,  
 $|f(x)| \leq |f(x_0)| + 1$ ;

(2)  $f(x)$  在  $(a, b)$  内有界.

证 (1) 因为  $f(x)$  一致连续, 故对  $\varepsilon = 1 > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 当  $x \in (a, b) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < 1 \Rightarrow |f(x)| \leq |f(x_0)| + 1.$$

(2) 利用题(1)中的  $\delta$ , 把  $(a, b)$  分为  $n$  个小区间, 分点为  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ , 使

$$\max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}) < \delta.$$

取  $M = \max_{1 \leq k \leq n-1} \{f(x_k) + 1\}$ ,  $\forall x \in (a, b)$ ,

$x$  必落在其中一个小区间上. 则依题(1), 有

$$|f(x) - f(x_k)| < 1 \quad (1 \leq k \leq n-1),$$

或  $|f(x) - f(x_{k-1})| < 1 \quad (2 \leq k \leq n).$

故  $|f(x)| \leq M.$

例 29 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上连续, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 证明:  
 $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上一致连续.

证 由极限存在知,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists X > 0$ , 当  $x > X$  时, 有

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

故  $\forall x', x'' \in [a, +\infty)$ , 当  $x', x''$  均  $> X$  时, 有

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

由于  $f(x)$  在  $[a, X+1]$  上连续, 必在  $[a, X+1]$  上一致连续.  
即  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_0 > 0$ , 当  $|x_2 - x_1| < \delta_0$  且  $x_1, x_2 \in [a, X+1]$  时,  
有  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$

设  $\delta = \min\{\delta_0, 1\}$ , 则对于任意两个  $x_1$  和  $x_2$ , 当  $|x_1 - x_2| < \delta$  时, 有三种情形.

(1)  $x_1, x_2$  均  $\in [X, +\infty)$ , 则由第一个不等式知

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

(2)  $x_1 \in [X, +\infty), x_2 \in [a, X]$  (或  $x_1, x_2$  所在区间互换), 由  $|x_1 - x_2| < \delta \leq 1$  知

$$x_1 \in [a, X+1], \quad x_2 \in [a, X+1],$$

因此

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

(3)  $x_1 \in [a, X], x_2 \in [a, X]$ , 由闭区间上连续知

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

综上所述知,  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 只要  $|x_1 - x_2| < \delta$ , 就有  $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ , 所以  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上一致连续.

**例 30** 函数  $f(x)$  在区间  $I$  上一致连续的充要条件是:  
 $\forall \{x_n\}, \{y_n\} \in I$ , 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$  时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n) - f(y_n)] = 0.$$

**证 必要性** 用定义证明. 因为  $f(x)$  一致连续, 故  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $x_n, y_n \in I$  时, 有

$$|x_n - y_n| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon.$$

在已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$  时, 对于  $\delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N$ , 必有  $|x_n - y_n| < \delta$ , 因而  $|f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon$ . 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n) - f(y_n)] = 0.$$

**充分性** 用反证法. 设  $f(x)$  在  $I$  上不一致连续, 则有  $\epsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x', x'' \in I$ , 由

$$|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| > \epsilon_0.$$

取  $\delta = \frac{1}{n} (n \in \mathbb{N}), \exists x_n, y_n \in I$ , 由

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0.$$

这显然与  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$  时, 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0$  矛盾.

所以  $f(x)$  在  $I$  上必然一致连续.

**例 31** 设  $f$  在  $\mathbf{R}$  上一致连续, 则存在正数  $A, B$ , 使  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 有  $|f(x)| \leq A|x| + B$ .

**证** 由  $f$  在  $\mathbf{R}$  上一致连续知, 对  $\varepsilon = 1, \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in \mathbf{R}$ , 若  $|x' - x''| \leq \delta$ , 则有  $|f(x') - f(x'')| < 1$ .

又  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 有  $x = n\delta + x_0, n \in \mathbf{Z}, x_0 \in (-\delta, \delta)$ . 由  $f$  的连续性可知,  $f$  在  $[-\delta, \delta]$  上有界. 即  $\forall x \in [-\delta, \delta]$ , 有  $|f(x)| \leq M$ . 从而

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \sum_{k=1}^n [f(k\delta + x_0) - f((k-1)\delta + x_0)] + f(x_0) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |f(k\delta + x_0) - f((k-1)\delta + x_0)| + |f(x_0)| \\ &\leq |n| + M = \frac{1}{\delta} |x - x_0| + M \\ &\leq \frac{1}{\delta} |x| + \frac{1}{\delta} |x_0| + M \leq \frac{1}{\delta} |x| + M + 1. \end{aligned}$$

令  $\frac{1}{\delta} = A, M + 1 = B$ , 即得  $|f(x)| \leq A|x| + B$ .

**例 32** 证明: 在区间  $(a, b)$  内的有限个一致连续函数的和与乘积在  $(a, b)$  内仍然一致连续.

**证** 只证两个函数的和与乘积情形, 可将其结论推广到有限个函数的和与乘积情形.

(1) 设  $f(x), g(x)$  都在  $(a, b)$  内一致连续.  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$ , 使对任何  $x', x'' \in (a, b)$ , 当  $|x' - x''| < \delta_1$  时, 就有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$ , 使对任何  $x', x'' \in (a, b)$ , 当  $|x' - x''| < \delta_2$  时, 就有  $|g(x') - g(x'')| < \varepsilon$ . 因此, 若令  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 则当  $|x' - x''| < \delta$  时, 恒有

$$|[f(x') + g(x')] - [f(x'') + g(x'')]|$$

$$\leq |f(x') - f(x'')| + |g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

即  $f(x) + g(x)$  在  $(a, b)$  内一致连续.

(2) 设  $f(x), g(x)$  在  $(a, b)$  内一致连续, 由例 26 结论 (2),  $f(x), g(x)$  在  $(a, b)$  上有界, 即

$$|f(x)| \leq M, \quad |g(x)| \leq L \quad (L > 0, M > 0).$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 对于任何  $x', x'' \in (a, b)$ , 当  $|x' - x''| < \delta$  时,

就有  $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2M}, |g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2L}$ , 所以

$$\begin{aligned} & |f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| \\ &= |[f(x') - f(x'')]g(x') + f(x'')[g(x') - g(x'')]| \\ &< \frac{\varepsilon}{2M}M + \frac{\varepsilon}{2L}L = \varepsilon. \end{aligned}$$

因而  $f(x)g(x)$  在  $(a, b)$  内一致连续.

**例 33** 证明:  $f(x) = x^\alpha$  在  $[0, +\infty)$  上当  $0 < \alpha \leq 1$  时一致连续, 当  $\alpha > 1$  时不一致连续.

**证** 当  $0 < \alpha \leq 1$  时, 因为  $\forall x \in [0, 1]$ , 有不等式

$$(1-x)^\alpha + x^\alpha \geq (1-x) + x = 1,$$

得  $1 - x^\alpha \leq (1-x)^\alpha$ , 由此知:  $\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$  且  $x_1 > x_2$ , 有

$$x_1^\alpha - x_2^\alpha = x_1^\alpha \left[ 1 - \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^\alpha \right] \leq x_1^\alpha \left( 1 - \frac{x_2}{x_1} \right)^\alpha = (x_1 - x_2)^\alpha.$$

从而知此时  $f(x) = x^\alpha$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续.

当  $\alpha > 1$  时, 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+\eta)^\alpha - x^\alpha] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \left( 1 + \frac{\eta}{x} \right)^\alpha - 1 \right] \\ &= \eta \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \eta \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{\ln(1+t)} = \eta \alpha \left( t = \frac{\eta}{x} \right), \end{aligned}$$

所以, 当  $\alpha > 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+\eta)^\alpha - x^\alpha] = +\infty$ .

故  $\forall \delta > 0$ , 取充分大的  $x_1$  及  $x_2 = x_1 + \eta, 0 < \eta < \delta$ , 有

$$|x_1^\alpha - x_2^\alpha| > 1 = \varepsilon_0.$$

因而  $f(x) = x^\alpha$  在  $[0, +\infty)$  上不一致连续.

**例 34** 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上一致连续,  $\varphi(x)$  在  $[a, +\infty)$

上连续,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \varphi(x)] = 0$ . 证明:  $\varphi(x)$  在  $[a, +\infty)$  上一致连续.

证 (1) 由题设极限存在知:  $\forall \varepsilon > 0, \exists X > a$ , 当  $x > X$  时,  $|f(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ . 又由  $f(x)$  一致连续得:  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$ , 当  $|x' - x''| < \delta_1$  时,  $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}$ . 因而  $\forall x', x'' > X$ , 且  $|x' - x''| < \delta_1$ , 有

$$\begin{aligned} |\varphi(x') - \varphi(x'')| &\leq |\varphi(x') - f(x')| + |f(x') - f(x'')| \\ &\quad + |f(x'') - \varphi(x'')| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(2) 由康托尔(Cantor)定理(一致连续性)知,  $\varphi(x)$  在  $[a, X+1]$  上一致连续, 所以对此  $\varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$ , 当  $x', x'' \in [a, X+1]$  且  $|x' - x''| < \delta_2$  时, 有  $|\varphi(x') - \varphi(x'')| < \varepsilon$ .

(3) 于是, 取  $\delta = \min\{1, \delta_1, \delta_2\}$ , 则当  $x', x'' \in [a, +\infty)$  且  $|x' - x''| < \delta$  时, 有  $|\varphi(x') - \varphi(x'')| < \varepsilon$ . 即  $\varphi(x)$  在  $[a, +\infty)$  上一致收敛.

从例 1 至例 32, 我们讨论了函数的连续性, 闭区间上连续函数的性质和一致连续性问题. 在这里, 我们领会到: (1) 要善于准确地使用概念, 从定义、性质出发进行论证; (2) 要会构造合适的辅助函数, 利用辅助函数进行论证; (3) 要恰当地使用反证法, 利用已知条件推出矛盾, 证明命题.

最后证一个关于连续概念的应用题.

例 35 证明: 若函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上连续,  $\forall x, y \in \mathbf{R}$ , 有

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \quad 0 < k < 1,$$

则  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上有惟一的不动点  $a$ , 即  $f(a) = a$ .

证 符合题设条件的  $f$  称为压缩映射.

任取  $x_0 \in \mathbf{R}$ , 令  $x_n = f(x_{n-1})$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 构造一个迭代数列  $\{x_n\}$ . 因为

$$\begin{aligned}
|x_n - x_{n-1}| &= |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| \\
&\leq k|x_{n-1} - x_{n-2}| = k|f(x_{n-2}) - f(x_{n-3})| \\
&\leq k^2|x_{n-2} - x_{n-3}| \leq \cdots \leq k^n|x_1 - x_0|.
\end{aligned}$$

所以,  $\forall n, p \in \mathbf{N}$ , 有

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\leq (k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + \cdots + k^n)|x_1 - x_0| \\
&= \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|,
\end{aligned}$$

因为  $k < 1$ , 所以  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$ , 当  $n > N$  时, 恒有

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|.$$

由柯西收敛原理, 数列  $\{x_n\}$  收敛, 设  $x_n \rightarrow a$ .

对  $x_n = f(x_{n-1})$  两边取极限, 即得  $a = f(a)$ , 所以  $a$  是  $f$  的一个不动点, 即  $a$  是  $x = f(x)$  的一个根.

再证不动点的惟一性. 设另有不动点为  $b$ , 即  $b = f(b)$ , 则

$$|b - a| = |f(b) - f(a)| \leq k|b - a|,$$

知  $k \geq 1$ , 这与已知条件矛盾. 故不动点惟一.



## 第三章 导数与微分

### 第一节 导数概念与求导法则

#### 主要内容

1. 设函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  的某个邻域内有定义, 若极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  存在, 则称  $f(x)$  在  $x_0$  可导, 其极限值称为  $f(x)$

在  $x_0$  的导数, 记作  $f'(x_0)$ ,  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ .

若  $f(x)$  在  $x_0$  的右极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  存在, 则极限值称为  $f(x)$  在  $x_0$  的右导数, 记作  $f'_+(x_0)$ .

若  $f(x)$  在  $x_0$  的左极限  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  存在, 则极限值称为  $f(x)$  在  $x_0$  的左导数, 记作  $f'_-(x_0)$ .

2. 若  $f(x)$  在  $x_0$  的某邻域内有定义, 则

$$f'(x_0) \text{ 存在} \iff f'_+(x_0), f'_-(x_0) \text{ 存在,}$$

且

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

3. 若  $f(x)$  在  $x_0$  可导, 则  $f$  在  $x_0$  连续, 反之不一定成立. 如  $y = |x|$  在  $x = 0$  连续, 但不可导.

4. 若函数  $f(x)$  在区间  $I$  上每一点都可导, 则称  $f$  为  $I$  上的可导函数.  $f'(x)$  称为  $f$  在  $I$  上的导函数, 简称导数, 记作  $f', y', \frac{dy}{dx}$ ,

$$\frac{df}{dx}.$$

5. 基本求导法则有

$$(1) (u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$(2) (uv)' = u'v + uv', (cu)' = cu' \quad (c \text{ 为常数});$$

$$(3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2};$$

$$(4) \text{反函数的导数: } \frac{dy}{dx} = 1 / \frac{dx}{dy};$$

$$(5) \text{复合函数的导数: 若 } y = f(u), u = \varphi(x), \text{ 则 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

### 疑难解析

1. 怎样认识函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的导数  $f'(x_0)$  的几何意义?

答 函数  $f$  在点  $x_0$  的导数  $f'(x_0)$  的几何意义是曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_0, y_0)$  切线的斜率. 因此, 曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_0, y_0)$  的切线方程与法线方程分别为

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

要正确认识切线与导数的关系. 即若  $y = f(x)$  在  $x_0$  可导, 则曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_0, y_0)$  存在切线; 但  $f(x)$  在  $x_0$  不可导时, 曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_0, y_0)$  也可能存在切线, 但这时切线必垂直于  $x$  轴. 反之, 若曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_0, y_0)$  不存在切线, 则  $f(x)$  在  $x_0$  一定不可导.

2. 在哪些情形下函数  $f(x)$  在  $x_0$  连续但不可导?

答 函数  $f(x)$  在  $x_0$  连续是  $f(x)$  在  $x_0$  可导的必要条件, 但不是充分条件.  $f(x)$  在  $x_0$  连续但不可导有以下几种情形:

(1) 左、右导数存在但不相等, 即  $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ .

(2) 左、右导数至少有一个不存在. 如

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \text{有 } f'_+(0) \text{ 不存在,} \\ 0, & x \leq 0, \text{有 } f'_-(0) = 0. \end{cases}$$

所以在  $x = 0$  不可导.

(3) 左、右导数至少有一个为  $\infty$ . 如  $y = \sqrt[3]{x}$  在  $x_0 = 0$  的左、右导数均为  $+\infty$ , 所以在  $x = 0$  不可导.

3. 怎样理解  $f'_+(x_0)$  和  $f'(x_0 + 0)$  的区别?

答  $f'_+(x_0)$  表示  $f(x)$  在点  $x_0$  的右导数, 即

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

而  $f'(x_0 + 0)$  表示导函数  $f'(x)$  在点  $x_0$  的右极限, 即

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x),$$

也表示  $f'(x)$  在  $x_0$  右连续.

它们两个不一定同时存在. 如

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1+x}{1-x}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

因为  $x \neq 1$  时,  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \frac{1}{2}$ . 而

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(2+\Delta x) - 0}{\Delta x} = -\infty. \end{aligned}$$

当  $f(x)$  在  $[x_0, x_0 + \delta]$  上连续, 且在  $(x_0, x_0 + \delta)$  可导,  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = A$  时, 函数  $f(x)$  在  $x_0$  的右导数存在, 且

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = A = f'(x_0 + 0).$$

## 方法、技巧与典型例题分析

### 一、导数概念的命题

关于导数概念的命题,主要是证明题与讨论题.解这些题目时,必须正确运用导数、连续以及极限的有关概念,从定义出发进行论证与分析,也可以利用有关法则和性质来简化过程,使证明更加简洁.

**例 1** 证明:偶函数的导数是奇函数,奇函数的导数是偶函数.

**证** 用定义证明.设  $f(x) = f(-x)$ , 且  $f(x)$  可导, 则

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-x + \Delta x) - f(-x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f[-(x - \Delta x)] - f(-x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} - \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{-\Delta x} = -f'(x). \end{aligned}$$

所以,偶函数的导数是奇函数.

用复合函数求导法则证明.设  $f(x) = f(-x)$ , 且  $f(x)$  可导, 则对等式两边求导, 得

$$[f(-x)]' = f'(-x) \cdot (-x)' = -f'(-x) = f'(x).$$

所以,偶函数的导数为奇函数.

类似可证奇函数的导数是偶函数.

**例 2** 证明:若  $f(x) = \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x$ , 则  $f''(0) = 0$ .

**证** 因为  $f(x)$  是奇函数, 所以  $f'(x)$  是偶函数,  $f''(x)$  是奇函数. 由于  $f''(x)$  曲线关于原点对称, 则由  $f''(x)$  的连续性知,  $f''(0) = 0$ .

**例 3** 证明:周期函数的导数仍是周期函数, 且周期不变.

**证** 设  $f(x+T) = f(x)$ , 且  $f(x)$  可导, 对等式两边求导得,  $f'(x+T) = f'(x)$ . 故  $f'(x)$  仍为周期函数, 且周期不变

例 4 设  $\varphi(x)$  在点  $x = a$  连续, 问: 下列函数在  $x = a$  是否可导? (1)  $f(x) = (x - a)\varphi(x)$ ; (2)  $g(x) = |x - a|\varphi(x)$ .

解 因为  $\varphi(x)$  在  $x = a$  连续, 则  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(a + \Delta x) = \varphi(a)$ .

$$\begin{aligned} (1) \text{ 由 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a + \Delta x - a)\varphi(a + \Delta x) - (a - a)\varphi(a)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \varphi(a + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(a + \Delta x) = \varphi(a) \end{aligned}$$

知,  $f(x)$  在  $x = a$  可导, 且  $f'(a) = \varphi(a)$ .

$$\begin{aligned} (2) \text{ 由 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|a + \Delta x - a|\varphi(a + \Delta x) - |a - a|\varphi(a)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|\varphi(a + \Delta x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

知,  $g'_-(a) = -\varphi(a)$ ,  $g'_+(a) = \varphi(a)$ . 则当  $\varphi(a) = 0$  时,  $g(x)$  在  $x = a$  可导, 且  $g'(a) = 0$ ; 当  $\varphi(a) \neq 0$  时,  $g'_+(a) \neq g'_-(a)$ ,  $g(x)$  在  $x = a$  不可导.

例 5 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  有定义, 在  $x = 0$  连续, 且  $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$ , 有  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ .

(1) 证明  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续;

(2) 设  $f'(0) = a$  (常数), 证明  $f(x) = ax$ .

证 (1) 由题给等式, 令  $x_1 = x_2 = 0$ , 得  $f(0) = f(0) + f(0)$ . 于是  $f(0) = 0$ .

又  $\forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$ , 有

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0) + f(\Delta x) - f(x_0)] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\Delta x) = f(0) = 0. \end{aligned}$$

所以由  $x_0$  的任意性知:  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续.

(2) 又  $\forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$ , 依导数定义有

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = f'(0) = a. \end{aligned}$$

所以由  $x_0$  的任意性知:  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可导, 且  $f'(x) = a$ . 从而  $f(x) = ax + b$ , 而  $f(0) = 0$ , 故  $b = 0$ , 即  $f(x) = ax$ .

**例 6** 证明: 黎曼函数

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{当 } x = \frac{p}{q} (q > 0) \text{ 为既约分数,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

在  $[0, 1]$  上处处不可微.

**证** 由第三章第四节例 4 知,  $R(x)$  在有理点间断, 所以  $R(x)$  在有理点不可微.

设  $x_0 \in (0, 1)$  为任一无理点列, 当取无理点列  $\{x_n\} \rightarrow x_0$ , 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(x_n) - R(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{x_n - x_0} = 0.$$

再取一有理点列  $\{x'_n\} \rightarrow x_0$  (其中  $x_0 = 0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$  为无理数,  $x'_n = 0.a_1\cdots a_n$  为有理数), 显然  $a_i (i = 1, 2, \cdots)$  有无穷多项不为零. 记第一个不为零的下标为  $N$ , 于是当  $n > N$  时, 有

$$R(x'_n) = R(0.a_1\cdots a_n) > 1/10^n,$$

从而 
$$\left| \frac{R(x'_n) - R(x_0)}{x_n - x_0} \right| = \frac{R(0.a_1\cdots a_n)}{0.0\cdots 0 a_{n+1}} \geq 1.$$

得 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(x'_n) - R(x_0)}{x_n - x_0} \neq 0.$$

所以, 可以确定  $R(x)$  在无理点也不可微, 即  $R(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上处处不可微.

**例 7** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $f(a) = f(b)$ , 且在  $(a, b)$  内有连续的右导数

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

证明:存在  $\xi \in (a, b)$ , 使  $f'_+(\xi) = 0$ .

证 若  $f(x) \equiv$  常数, 则结论显然成立.

设  $f(x) \not\equiv$  常数. 由  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 必在  $[a, b]$  上有最大值  $M$  和最小值  $m$ , 则  $M$  与  $m$  至少有一个在  $(a, b)$  内取得. 设  $\eta \in (a, b)$ ,  $f(\eta) = M$  ( $f(\eta) = m$  可类似讨论), 于是

$$f'_+(\eta) = \lim_{x \rightarrow \eta^+} \frac{f(x) - f(\eta)}{x - \eta} \leq 0 \quad (\text{见单调性的判别}).$$

在  $[a, \eta)$  内任取一点  $c$ , 由  $f$  在  $[c, \eta]$  上连续, 故  $f$  在  $[c, \eta]$  上也有一点  $\eta_1$  达到最小值, 使

$$f'_+(\eta_1) = \lim_{x \rightarrow \eta_1^+} \frac{f(x) - f(\eta_1)}{x - \eta_1} \geq 0 \quad (a < \eta_1 < \eta).$$

由  $f'_+(\eta) \leq 0, f'_+(\eta_1) \geq 0, \eta, \eta_1 \in (a, b)$  知,  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使  $f'_+(\xi) = 0$ .

例 8 设  $f$  在  $(0, +\infty)$  上有定义, 且  $\forall x, y \in (0, +\infty)$ , 都有  $f(xy) = f(x) + f(y)$ . 已知  $f'(1)$  存在, 求  $f'(x)$ .

解 在题给等式中令  $y = 1$ , 得  $f(1) = 0$ .

再令  $y = 1 + \Delta x, 0 < |\Delta x| < 1$ , 得  $xy = x + x\Delta x$ , 故

$$x \frac{f(x + x\Delta x) - f(x)}{x\Delta x} = \frac{f(1 + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}.$$

上式两边取  $\Delta x \rightarrow 0$  的极限, 得  $xf'(x) = f'(1)$ , 即

$$f'(x) = -\frac{f'(1)}{x}.$$

例 9 设函数  $f(x)$  在  $x = 0$  连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 证明:  $f(x)$  在  $x = 0$  可导.

证 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ , 所以

$$f(0) = 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0),$$

即  $f'(0)$  存在, 所以  $f(x)$  在  $x=0$  可导.

**例 10** 设  $f(x)$  在  $x=x_0$  可微,  $\alpha_n < x_0 < \beta_n, n=1,2,\dots$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = x_0$ , 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x_0).$$

**证** 因为

$$\begin{aligned} \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} &= \frac{f(\beta_n) - f(x_0) + f(x_0) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \\ &= \frac{\beta_n - x_0}{\beta_n - \alpha_n} \cdot \frac{f(\beta_n) - f(x_0)}{\beta_n - x_0} - \frac{\alpha_n - x_0}{\beta_n - \alpha_n} \cdot \frac{f(\alpha_n) - f(x_0)}{\alpha_n - x_0}, \end{aligned}$$

记  $\frac{\beta_n - x_0}{\beta_n - \alpha_n} = \lambda_n$ , 则  $\frac{x_0 - \alpha_n}{\beta_n - \alpha_n} = 1 - \lambda_n$  且  $0 < \lambda_n, 1 - \lambda_n < 1$ , 则

$$\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = \lambda_n \frac{f(\beta_n) - f(x_0)}{\beta_n - x_0} + (1 - \lambda_n) \frac{f(\alpha_n) - f(x_0)}{\alpha_n - x_0}.$$

由  $f'(x_0) = \lambda_n f'(x_0) + (1 - \lambda_n) f'(x_0)$  得

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} - f'(x_0) \right| \\ &\leq \lambda_n \left| \frac{f(\beta_n) - f(x_0)}{\beta_n - x_0} - f'(x_0) \right| + (1 - \lambda_n) \left| \frac{f(\alpha_n) - f(x_0)}{\alpha_n - x_0} - f'(x_0) \right| \\ &\rightarrow 0 \quad (\text{当 } n \rightarrow +\infty \text{ 时}), \end{aligned}$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x_0).$

本例运用了组合的技巧, 这在证明过程可以使问题简单化, 往往可以直接得出结论.

**例 11** 设  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  是任一函数,  $x_0 \in I$ , 证明:  $f(x)$  在  $x_0$  可导  $\Leftrightarrow$  存在一个函数  $\varphi: I \rightarrow \mathbf{R}$ , 使

$$(1) \quad \forall x \in I, f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0);$$

(2)  $\varphi$  在  $x_0$  连续.

此时,  $f'(x_0) = \varphi(x_0).$

**证** 必要性 若  $f(x)$  在  $x_0$  可导, 则



$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在. 令 
$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0, \\ f'(x_0), & x = x_0, \end{cases}$$

于是, 当  $x \neq x_0$  时,  $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$ ; 显然, 当  $x = x_0$  时上式也成立, 且  $f'(x_0) = \varphi(x_0)$ .

**充分性** 若  $\forall x \in I$ , 有  $\varphi(x)$ , 使得

$$f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0),$$

且  $\varphi(x)$  在  $x_0$  连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0).$$

故  $f(x)$  在点  $x_0$  可导, 且  $f'(x_0) = \varphi(x_0)$ .

**例 12** 若函数  $f(x)$  在  $x_0$  满足李卜希兹(Lipshitz) 条件

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|^\alpha \quad (M \text{ 为常数}),$$

则  $f(x)$  在  $x_0$  可导; 若  $\alpha = 1$ , 则  $f'(x_0)$  可能不存在.

**证** 若  $\alpha > 1$ , 则由  $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq M|x - x_0|^{\alpha-1}$ , 得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = 0.$$

因而 
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = 0.$$

若  $\alpha = 1$ , 设  $f(x) = |x|$ ,  $x_0 = 0$ , 知  $f(x)$  在  $x = 0$  不可导. 但此时仍有  $|f(x) - f(0)| = |x| \leq 2|x - 0|^\alpha$  成立.

## 二、求导法则的运用

**例 13** 设  $g(0) = g'(0) = 0$ , 而

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

求  $f'(0)$ .

解 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = 0$ , 故

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) \sin \frac{1}{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \quad (\text{零乘以有界量}) = 0. \end{aligned}$$

例 14 设  $g(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 有

$$f(x) = \cos g(x), \quad f'(x) = \sin g(x),$$

证明: 对满足  $g(x) \neq n\pi$  的一切  $x$ ,  $g(x)$  可导, 且  $g'(x) = 1$ .

证 设  $g(x_0) \neq n\pi$ , 则由  $g(x)$  的连续性,  $\exists \delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时,  $g(x) \neq n\pi$ . 于是有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{g(x) - g(x_0)}{\cos g(x) - \cos g(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] \\ &= -\frac{1}{\sin g(x_0)} \cdot \sin g(x_0) = -1. \end{aligned}$$

即  $g(x)$  在不等于  $n\pi$  的一切  $x$  点可导, 且  $g'(x) = -1$ .

例 15 已知  $f'(a)$  存在,  $f(a) \neq 0$ , 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right]^n, \quad n \text{ 为正整数.}$$

解 化为重要极限形式

$$\text{原式} = \left[ 1 + \left( \frac{f(a + 1/n)}{f(a)} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{\left[ \frac{f(a + 1/n)}{f(a)} - 1 \right]} \cdot \frac{f(a + 1/n) - f(a)}{f(a) \cdot 1/n}}.$$

因为  $\left[ \frac{f(a + 1/n)}{f(a)} - 1 \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , 而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a + 1/n) - f(a)}{f(a) \cdot 1/n} = \frac{f'(a)}{f(a)},$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{f(a + 1/n)}{f(a)} \right]^n = e^{f'(a)/f(a)}.$

当函数是幂指函数、若干个因式的积、商或由根式组成时, 求导运算常用对数求导法. 其具体步骤是:

(1) 对  $y = f(x)$  两边取绝对值后,再取自然对数;

(2) 将得到的等式两边分别对自变量求导;

(3) 从求导后等式中解出  $y'$ .

在对  $y = f(x)$  取对数后,两边对自变量  $x$  求导时,把  $y$  看作复合函数中的中间变量.其优点是,可以把积化为和,商化为差,幂指函数化为乘积,从而使求导运算变简单.

例 16 求下列函数的导数:

$$(1) y = x^{x^x}; \quad (2) y = \sqrt{\frac{(x+1)(x^2+2)}{x^3+3}};$$

$$(3) y = \sqrt{x \sin x} \sqrt{1 - e^x}.$$

解 (1) 取对数,得  $\ln y = x^x \ln x$ , 所以

$$y'/y = (x^x)' \ln x + x^x \cdot 1/x \Rightarrow y' = (x^x)' y \ln x + y \cdot x^{x-1}.$$

对  $y_1 = x^x$  取对数,得  $\ln y_1 = x \ln x$ , 所以

$$y'_1/y_1 = \ln x + 1 \Rightarrow y'_1 = (x^x)' = x^x(1 + \ln x).$$

$$\text{故 } y' = x^{x^x} [x^x (\ln x + \ln^2 x + 1/x)].$$

(2) 取对数,得

$$\ln y = \frac{1}{2} [\ln(1+x) + \ln(2+x^2) - \ln(3+x^3)]$$

$$\text{所以 } \frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2+2} - \frac{3x^2}{x^3+3} \right].$$

$$\text{故 } y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(x+1)(x^2+2)}{x^3+3}} \cdot \left[ \frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2+2} - \frac{3x^2}{x^3+3} \right].$$

(3) 取对数,得

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln \sin x + \frac{1}{4} \ln(1 - e^x),$$

$$\text{所以 } \frac{y'}{y} = \frac{1}{2x} + \frac{\cos x}{2 \sin x} + \frac{-e^x}{4(1 - e^x)}.$$

$$\text{故 } y' = \sqrt{x \sin x} \sqrt{1 - e^x} \cdot \left[ \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \cot x - \frac{e^x}{4(1 - e^x)} \right].$$

例 17 设函数  $f(u)$  一阶可导, 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[ f\left(t + \frac{x}{a}\right) - f\left(t - \frac{x}{a}\right) \right],$$

$a \neq 0, a, t$  与  $x$  无关.

解 将原式变形为导数定义形式即得.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{f\left(t + \frac{x}{a}\right) - f(t)}{\frac{x}{a}} + \frac{f\left(t - \frac{x}{a}\right) - f(t)}{\left(-\frac{x}{a}\right)} \right] \\ &= \frac{1}{a} [f'(t) + f'(t)] = \frac{2}{a} f'(t). \end{aligned}$$

例 18 设  $f(x), g(x)$  可导, 求下列函数的导数:

- (1)  $y = f(x^2)$ ; (2)  $y = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$ ;  
 (3)  $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$ ; (4)  $y = f(e^x)e^{g(x)}$ .

解 本题的函数都是复合函数, 因此要用复合函数求导法则. 函数又都是抽象函数, 所以对中间变量的导数仍可用抽象函数表示.

$$(1) y' = f'(x^2) \cdot 2x = 2xf'(x^2).$$

$$\begin{aligned} (2) y' &= \frac{2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x)}{2\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}} \\ &= \frac{f(x)f'(x) + g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) y' &= f'(\sin^2 x) \cdot 2\sin x \cos x + f'(\cos^2 x) \cdot 2\cos x (-\sin x) \\ &= \sin 2x [f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) y' &= f'(e^x) \cdot e^x \cdot e^{g(x)} + f(e^x) \cdot e^{g(x)} \cdot g'(x) \\ &= e^{g(x)} [e^x f'(e^x) + f(e^x) g'(x)]. \end{aligned}$$

例 19 设  $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$ , 其中  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  是常数, 且  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 有  $|f(x)| \leq |\sin x|$ . 证明:

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1.$$

证 用导数定义证明. 显然,  $f(0) = 0, f'(0) = (a_1 \cos x + 2a_2 \cos x + \cdots + na_n \cos x)|_{x=0} = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$ . 故只需证

$|f'(0)| \leq 1$ . 由定义, 有

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}.$$

由于  $|f(x)| \leq |\sin x|$ , 所以  $\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right|$ . 于是

$$\begin{aligned} |f'(0)| &= \left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \\ &= \left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right| = 1. \end{aligned}$$

故  $|f'(0)| \leq 1$ , 从而  $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$ .

**例 20** 设  $f(x)$  在  $x_0$  可导, 求

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x^4) - f(x_0)}{1 - \cos(\Delta x^2)}.$$

**解** 利用等价无穷小代换与导数定义, 有

$$\text{原式} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x^4) - f(x_0)}{\Delta x^4/2} = \frac{1}{2} f'(x_0).$$

**例 21** 设  $f(x)$  满足  $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x}$ , 求  $f'(x)$ .

**解** 利用变量代换与解方程组法. 等式两边对  $x$  求导, 得

$$f'(x) + 2f'\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3}{x^2}. \quad (1)$$

将  $x$  代换成  $\frac{1}{x}$ , 得  $f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = 3x$ . 两边对  $x$  求导, 得

$$-\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) + 2f'(x) = 3, \quad (2)$$

②  $\times 2 -$  ①, 消去  $\frac{1}{x}$  因式, 即得

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2}.$$

**例 22** 求函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{e}, & |x| > 1 \end{cases}$  的导数.

**解** 显然,  $f(x)$  在各段上是连续的, 可用求导法则直接求

出. 但在分段函数的分界点上, 导数必须用定义求出. 因此, 有

$$f'(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2}(1-x^2), & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1/e - 1/e}{x - 1} = 0,$$

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 e^{-x^2} - 1/e}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 e^{1-x^2} - 1}{e(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 e^{1-x^2} - x^2 + x^2 - 1}{e(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (1+x) \frac{x^2(e^{1-x^2} - 1)}{e(1-x^2)} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{e}. \end{aligned}$$

由于  $x \rightarrow 1^-$  时,  $e^{1-x^2} - 1 \sim x^2$ , 所以

$$f'_-(1) = -\frac{2}{e} + \frac{2}{e} = 0 \Rightarrow f'(1) = 0.$$

而  $f(x)$  是偶函数, 故  $f'(-1) = f'(1) = 0$ . 于是

$$f'(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2}(1-x^2), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

**例 23** 设  $f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 e^{p(x-1)} + ax + b}{1 + e^{p(x-1)}}$  ( $p$  为不等于零的常数), 问  $a, b$  为何值时,  $f(x)$  连续且可导.

**解** 去掉极限符号, 就有

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 1, \\ \frac{1}{2}(1+a+b), & x = 1, \\ ax+b, & x < 1. \end{cases}$$

若  $f_-(1) = f_+(1) = f(1)$ , 则  $f(x)$  在  $x=1$  处连续, 即

$$a+b=1 = \frac{1}{2}(1+a+b).$$

可知, 当  $a+b=1$  时,  $f(x)$  在  $x=1$  处连续.

$$\text{又} \quad f'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 1, \\ a, & x < 1. \end{cases}$$

若  $f'_+(1) = f'_-(1)$ , 则  $f(x)$  在  $x = 1$  可导, 即

$$2 = a \Rightarrow b = -1.$$

所以, 当  $a = 2, b = -1$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续而且可导.

#### 例 24 利用恒等式

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin(x/2^n)}$$

求出表示和式

$$S_n = \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \tan \frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n}$$

的公式.

解 恒等式两边取对数, 得

$$\ln \left[ \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right] = \ln |\sin x| - \ln \left| 2^n \sin \frac{x}{2^n} \right|.$$

两边同时对  $x$  求导, 得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{-\sin(x/2)}{\cos(x/2)} + \frac{1}{4} \frac{-\sin(x/4)}{\cos(x/4)} + \cdots + \frac{1}{2^n} \frac{-\sin(x/2^n)}{\cos(x/2^n)} \\ &= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos(x/2^n)}{2^n \sin(x/2^n)}. \end{aligned}$$

$$\text{即} - \left( \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \tan \frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n} \right) = \cot x - \frac{1}{2^n} \cot \frac{x}{2^n},$$

$$\text{于是} \quad S_n = \frac{1}{2^n} \cot \frac{x}{2^n} - \cot x.$$

由上述例题可以看出, 运用求导法则不仅可以求导数和导函数, 还可以求极限, 证明等式与不等式. 并且还可以利用导数求连续曲线的切线方程、法线方程和验证几何命题.

例 25 确定  $a, b, c, d$  的值, 使曲线  $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + d$  与  $y = 11x - 5$  在点  $(1, 6)$  相切, 经过点  $(-1, 8)$ , 并在点  $(0, 3)$  有水平的切线.

解 依题意,曲线在点(1,6)与(0,3)有切线,得

$$(ax^4 + bx^3 + cx^2 + d)' \Big|_{x=1} = (11x - 5)' \Big|_{x=1},$$

$$(ax^4 + bx^3 + cx^2 + d)' \Big|_{x=0} = 0,$$

又曲线经过点(1,6),(-1,8),(0,3),有

$$a + b + c + d = 6, a - b + c + d = 8, d = 3.$$

综上所述,得方程组

$$\begin{cases} d = 3, \\ a + b + c + d = 6, \\ a - b + c + d = 8, \\ 4a + 3b + 2c = 11, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a = 3, \\ b = -1, \\ c = 1, \\ d = 3. \end{cases}$$

例 26 函数  $f(x) = (x^2 - x - 2)|x^3 - x|$ , 求在定义域内的不可导点.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad f(x) &= (x^2 - x - 2)|(x + 1)(x - 1)x| \\ &= (x - 2)|x||x - 1|[(x + 1)|x + 1|]. \end{aligned}$$

因为  $f_1(x) = (x + 1)|x + 1|$  在  $x = -1$  可导,  $f'_1(-1) = 2$ ;  $|x|$  在  $x = 0$  不可导,  $|x - 1|$  在  $x = 1$  不可导, 所以  $f(x)$  在定义域上除  $x = 0, x = 1$  两点外均可导.

例 27 设周期  $T = 4$  的函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内可导, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1 - x)}{2x} = -1.$$

求曲线  $y = f(x)$  在点  $(5, f(5))$  处切线的斜率.

$$\text{解} \quad y = f(x) \text{ 曲线在 } x = 5 \text{ 处切线斜率 } f'(5) = f'(1).$$

$$\begin{aligned} \text{由} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1 - x)}{2x} \\ = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 - x) - f(1)}{-x} = \frac{1}{2} f'(1) = 1, \end{aligned}$$

$$\text{得} \quad f'(1) = f'(5) = -2.$$

注意 这里用了例 3 的结论. 周期函数的导数仍为周期函



数,且周期不变.

**例 28** 验证函数  $f(x) = \arctan \frac{x+a}{1-ax}$  与  $g(x) = \arctan x$  在  $ax > 1$  和  $ax < 1$  内有相同的导函数,并求  $f(x)$  与  $g(x)$  的关系式.

**解** 在  $ax > 1$  和  $ax < 1$  内,有

$$f'(x) = 1 / \left[ 1 + \left( \frac{x+a}{1-ax} \right)^2 \right] \cdot \frac{1-ax + a(x+a)}{(1-ax)^2} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

所以  $f'(x) = g'(x) \Rightarrow f(x) - g(x) = c.$

当  $ax < 1$  时,设  $f(x) - g(x) = c_1$ ;

当  $ax > 1$  时,设  $f(x) - g(x) = c_2.$

设  $a > 0$  ( $a < 0$  类似讨论),在  $ax < 1$  时,令  $x \rightarrow -\infty$ ,得

$$-\arctan \frac{1}{a} + \frac{\pi}{2} = c_1 \Rightarrow c_1 = \arctan a.$$

在  $ax > 1$  时,令  $x \rightarrow +\infty$ ,得

$$-\arctan \frac{1}{a} - \frac{\pi}{2} = c_2 \Rightarrow c_2 = \arctan a - \pi.$$

因此,  $f(x)$  与  $g(x)$  有关系式

$$\arctan \frac{x+a}{1-ax} - \arctan x = \begin{cases} \arctan a, & ax < 1, \\ \arctan a - \pi, & ax > 1. \end{cases}$$

**例 29** 设  $f(x)$  是周期  $T = 5$  的连续函数,它在  $x = 0$  的某邻域内满足关系式

$$f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x) = 8x + \alpha(x),$$

其中  $\alpha(x)$  当  $x \rightarrow 0$  时是  $x$  的高阶无穷小,且  $f(x)$  在  $x = 1$  可导.求曲线  $y = f(x)$  在点  $(6, f(6))$  处的切线方程.

**解** 对关系式两边取  $x \rightarrow 0$  时的极限,得

$$f(1) - 3f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 0.$$

又 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{8x}{\sin x} + \frac{\alpha(x)}{x} \frac{x}{\sin x} \right) = 8.$$

即  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin x) - f(1)}{\sin x - \sin 0} + 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 - \sin x) - f(1)}{(-\sin x + \sin 0)}$   
 $= f'(1) + 3f'(1) = 8 \Rightarrow f'(1) = 2.$

因为周期函数的导数仍为周期函数,且  $T$  不变,所以

$$f'(6) = f'(1) = 2.$$

由  $f(6) = f(1) = 0, f'(6) = 2$ , 得切线方程

$$y = 2(x - 6) \quad \text{即} \quad 2x - y - 12 = 0.$$

例 30 求下列函数的导数:

(1)  $f(x) = [x]\sin\pi x$ ; (2)  $f(x) = x \left| \cos \frac{\pi}{x} \right|, f(0) = 0$ ;

(3)  $f(x) = \sqrt{\sin x^2}.$

解 (1) 当  $x$  不为整数时,  $f'_-(x) = f'_+(x) = \pi[x]\cos\pi x.$

当  $x$  为整数时, 由导数定义有

$$\begin{aligned} f'_+(k) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{[k + \Delta x]\sin\pi(k + \Delta x) - 0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{k\sin(\pi\Delta x) \cdot \cos k\pi}{\Delta x} = k\pi(-1)^k. \end{aligned}$$

类似可得  $f'_-(k) = \pi(k-1)(-1)^k.$

(2) 当  $x \neq \frac{2}{2k+1}$  ( $k$  为整数) 时, 有

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \left| \cos \frac{\pi}{x} \right| + \frac{\pi}{x} \cdot \frac{|\cos(\pi/x)|}{\cos(\pi/x)} \cdot \sin \frac{\pi}{x}.$$

当  $x = \frac{2}{2k+1}$  时, 由导数定义有

$$f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right) = -\frac{2k+1}{2}\pi, \quad f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right) = \frac{2k+1}{2}\pi,$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\Delta x} \left[ \Delta x \left| \cos \frac{\pi}{\Delta x} \right| \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \left| \cos \frac{\pi}{\Delta x} \right|,$$

所以,  $f'_-(0)$  不存在. 类似地,  $f'_+(0)$  也不存在.

(3) 当  $x = \sqrt{2k\pi}, k = 0$  时, 有

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sin(\Delta x)^2}}{\Delta x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\sqrt{\sin(\Delta x)^2}}{\Delta x} = -1.$$

当  $x = \sqrt{2k\pi}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  时, 有

$$\begin{aligned} f'_+(\sqrt{2k\pi}) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sin(\sqrt{2k\pi} + \Delta x)^2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{\sin[2\Delta x \sqrt{2k\pi} + (\Delta x)^2]}{2\Delta x \sqrt{2k\pi} + (\Delta x)^2}} \cdot \sqrt{\frac{2\sqrt{2k\pi}}{\Delta x} + 1} \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

类似可得  $f'_-(\sqrt{2k\pi}) = -\infty$ ,  $k = 1, 2, \dots$  (也可由奇偶性得),

$$f'_+(\sqrt{(2k+1)\pi}) = +\infty, f'_-(\sqrt{(2k+1)\pi}) = -\infty.$$

当  $\sqrt{2k\pi} < |x| < \sqrt{(2k+1)\pi}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  时, 函数有意义, 由求导法则, 得

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{x \cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}.$$

**例 31** 设  $f(x)$  可导,  $f'(0) = 1$ ,  $y = f(x^2 + \sin^2 x) + f(\arctan x)$ , 求  $y'(0)$ .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= f'(x^2 + \sin^2 x) \cdot (2x + \sin 2x) \\ &\quad + f'(\arctan x) \frac{1}{1+x^2}, \end{aligned}$$

由  $f'(0) = 1$ , 得  $y'(0) = f'(0) \cdot 0 + f'(0) \cdot 1 = 1$ .

**例 32** 求下列函数的导数:

$$(1) y = \ln \arcsin(2x); \quad (2) y = e^x(x^2 + 2x - 1)\arcsin x.$$

**解** (1) 用复合函数求导法则, 得

$$y' = \frac{1}{\arcsin(2x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2} \cdot \arcsin(2x)}.$$

(2) 用积的求导法则, 也可用取对数求导法取

$$\ln y = x + \ln(x^2 + 3x - 1) + \ln \arcsin x.$$

$$\frac{1}{y} y' = 1 + \frac{2x+3}{x^2+3x-1} + \frac{1}{\arcsin x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\begin{aligned} y' &= [e^x(x^2+3x-1) + e^x(2x+3)] \arcsin x + e^x \frac{x^2+3x-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= e^x(x^2+5x+2) \arcsin x + e^x \frac{x^2+3x-1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

**例 33** 讨论函数  $f(x) = \arcsin \sqrt{1-x^2}$  的导数.

**解** 由复合函数求导法则, 有

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{|x|} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \begin{cases} 1/\sqrt{1-x^2}, & -1 < x < 0, \\ -1/\sqrt{1-x^2}, & 0 < x < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

而  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \sqrt{1-x^2} - \pi/2}{x},$

显然, 当  $x \rightarrow 0$  时,  $y \rightarrow 0^-$ . 这里

$$y = \arcsin \sqrt{1-x^2} - \frac{\pi}{2}, \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right],$$

则有 
$$x = \begin{cases} \sin y, & -1 < x < 0 \\ -\sin y, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

所以 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{\sin y} = 1, & x < 0, \\ \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{-y}{\sin y} = -1, & x > 0. \end{cases}$$

从而知上述极限不存在, 所以  $f(x)$  在  $x=0$  不可导.

**例 34** 证明: 若函数  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  在点  $x$  均可导, 且  $f_i(0) \neq 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). 设  $g(x) = f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$ , 则函数  $g(x)$  也在点  $x$  可导, 且

$$g'(x) = g(x) \left[ \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \cdots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)} \right].$$

证 由乘积的导数公式,得

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{i=1}^n f_1(x)f_2(x)\cdots f'_i(x)\cdots f_n(x) \\ &= \sum_{i=1}^n g(x) \cdot \frac{f_1(x)f_2(x)\cdots f'_i(x)\cdots f_n(x)}{f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)} \\ &= g(x) \left[ \frac{f'_1(x)}{f_1(x)} + \frac{f'_2(x)}{f_2(x)} + \cdots + \frac{f'_n(x)}{f_n(x)} \right]. \end{aligned}$$

## 第二节 隐函数与参数方程确定函数的导数

### 主要内容

1. 方程  $F(x, y) = 0$  决定一个  $y$  关于  $x$  的函数  $y = y(x)$ , 称为隐函数. 隐函数常用两种方法求导.

(1) 对方程  $F(x, y) = 0$  两边关于  $x$  求导, 因  $y$  是  $x$  的函数, 用复合函数求导法则进行. 然后从等式中解出  $y'$ .

(2) 对方程  $F(x, y) = 0$  两边求微分, 利用一阶微分形式不变性, 把  $y$  视作自变量, 得含  $dx$  和  $dy$  的等式, 再解出  $\frac{dy}{dx}$ .

2. 设  $y = y(x)$  的函数关系由参数形式

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

确定.  $\varphi(t)$  和  $\psi(t)$  在  $(t_0, t_1)$  上可微,  $\varphi(t)$  在  $(t_0, t_1)$  上严格单调, 且  $\varphi'(t) \neq 0$ , 则由反函数求导法则和复合函数求导法则, 有

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \end{aligned}$$

## 疑难解析

1. 怎样求极坐标方程  $r = f(\theta)$  给出曲线  $C$  在曲线上点  $M(\theta, f(\theta))$  处切线的斜率和过  $M$  点的切线与向径  $oM$  的夹角?

答 求极坐标方程  $r = f(\theta)$  给出的曲线  $C$  在曲线上点  $M(\theta, f(\theta))$  处切线的斜率, 就是求  $r = f(\theta)$  转化的显式方程  $y = f(x)$  在对应点  $(x, y)$  的导数.

由  $r = f(\theta)$  得到以  $\theta$  为参数的方程

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta, \\ y = r \sin \theta = f(\theta) \sin \theta, \end{cases} \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2.$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \tan \alpha &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta}{f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta} \\ &= \frac{f'(\theta) \tan \theta + f(\theta)}{f'(\theta) - f(\theta) \tan \theta}. \end{aligned}$$

从图 3.1 可以看出, 过点  $M$  的切线与  $oM$  的夹角  $\varphi$  满足

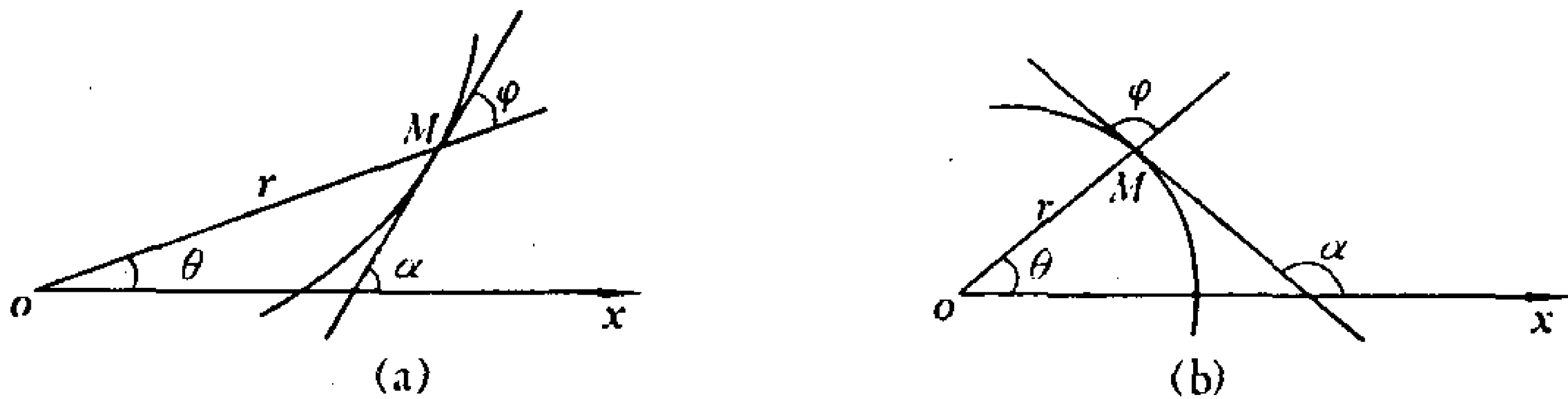


图 3.1

$$\tan \varphi = \tan(\alpha - \theta) = \frac{\tan \alpha - \tan \theta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \theta} = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}.$$

即

$$\varphi = \arctan \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}.$$

2. 若曲线  $C$  的参数方程  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$  在  $t_0$  都可导, 但  $\varphi'(t_0) = \psi'(t_0) = 0$ , 问: 曲线在点  $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$  有什么几何性质? 若只有一个导数等于零呢?

答 当  $\varphi'(t_0) = \psi'(t_0) = 0$  时, 有  $[\varphi'(t_0)]^2 + [\psi'(t_0)]^2 = 0$ ,

这时点  $(x_0, y_0) = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$  是曲线  $C$  的奇异点.

如, 星形线(见图 3.2) 的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi, a > 0.$$

有  $x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t,$

$$y'(t) = 3a\sin^2 t \cos t.$$

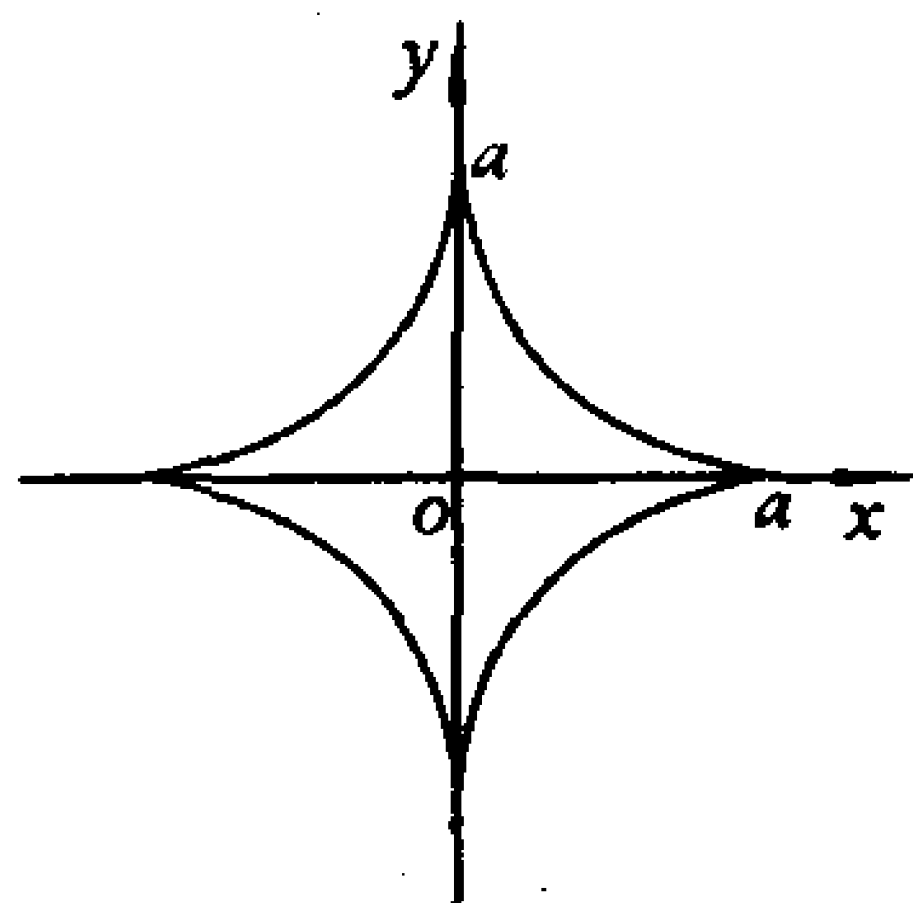


图 3.2

显然, 当  $t_0 = 0, \pi/2, \pi, 3/2\pi$  时,  $x'(t_0) =$

$y'(t_0) = 0$ . 所以, 点  $(a, 0), (0, a), (-a, 0), (0, -a)$  都是星形线的奇异点. 从星形线的图形知, 这四个点又是星形线的尖点. 一般地, 尖点是奇异点, 但奇异点不全是尖点.

当  $\varphi'(t_0) \neq 0$ , 而  $\psi'(t_0) = 0$  时, 由于在  $t_0$  的邻域内存在反函数  $t = \varphi^{-1}(x)$ , 故  $\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} = 0$ , 即曲线  $C$  在点  $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$  有水平(平行于  $x$  轴)的切线.

当  $\varphi'(t_0) = 0$ , 而  $\psi'(t_0) \neq 0$  时,  $\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = \infty$ , 即曲线  $C$  在点  $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$  有竖直(平行于  $y$  轴)的切线.

以上两种情形都有  $[\varphi'(t_0)]^2 + [\psi'(t_0)]^2 \neq 0$ , 所以曲线  $C$  在点  $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$  存在切线.

## 方法、技巧与典型例题分析

### 一、隐函数的导数

在主要内容 1 中, 我们已经指出了隐函数求导的两种方法. 当隐函数为幂指函数时, 我们还可用取对数求导法来进行.

例 1 求下列隐函数的导数  $\frac{dy}{dx}$ :

$$(1) \arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}; \quad (2) e^{xy} + x^2 y - 1 = 0;$$

$$(3) x^y = y^x;$$

$$(4) \cos(xy) = x^3 y^3.$$

解 (1) 用复合函数求导法则, 有

$$\frac{1}{1 + (y/x)^2} \left( \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + y^2} (2x + 2yy'),$$

解得 
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$$

(2) 对等式两边求微分, 因为

$$de^{xy} = e^{xy} d(xy) = e^{xy} (xdy + ydx),$$

$$d(x^2 y) = 2xydx + x^2 dy,$$

所以 
$$(e^{xy} + x)xdy + (e^{xy} + 2x)ydx = 0,$$

即 
$$\frac{dy}{dx} = - \frac{(e^{xy} + 2x)y}{(e^{xy} + x)x}.$$

(3) 用取对数求导法, 有

$$y \ln x = x \ln y,$$

$$y' \ln x + \frac{y}{x} = \ln y + \frac{x}{y} y',$$

解得 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \cdot \frac{y - x \ln y}{x - y \ln x} = \frac{y^2 - xy \ln y}{x^2 - xy \ln x}.$$

(4) 对等式两边求微分, 有

$$d\cos(xy) = d(x^3 y^3)$$

$$\Rightarrow -\sin(xy)d(xy) = y^3 d(x^3) + x^3 d(y^3)$$

$$\Rightarrow -\sin(xy)(ydx + xdy) = 3x^2 y^3 dx + 3x^3 y^2 dy,$$

得 
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= - \frac{y \sin(xy) + 3x^2 y^3}{x \sin(xy) + 3x^3 y^2} \\ &= - \frac{y}{x} \cdot \frac{\sin(xy) + 3x^2 y^2}{\sin(xy) 3x^2 y^2} = - \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

例 2 设  $y = f(x+y)$ , 其中  $f$  二阶可导, 且其一阶导数不等于 1, 求  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

解 等式两边对  $x$  求导, 得

$$y' = f'(x+y)(1+y') \Rightarrow y' = \frac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)}.$$



上式两边再次对  $x$  求导,得

$$\begin{aligned} y'' &= f''(x+y)(1+y')^2 + f'(x+y)y'' \\ \Rightarrow y'' &= \frac{f''(x+y)(1+y')^2}{1-f'(x+y)}. \end{aligned}$$

将  $y'$  代入上式,有

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f''(x+y)}{[1-f'(x+y)]^3}.$$

例 3 设函数  $y = y(x)$  由方程  $x^{y^2} + y^2 \ln x = 4$  确定,求  $\frac{dy}{dx}$ .

解 将方程改写为  $e^{y^2 \ln x} + y^2 \ln x = 4$ , 进行变量代换,令  $u = y^2 \ln x$ , 则有  $e^u + u = 4$ .

对  $x$  求导,得  $(e^u + 1) \frac{du}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 0$ , 即

$$2y \cdot y' \ln x + \frac{y^2}{x} = 0 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{2x \ln x}.$$

此例说明,在解题过程中加强观察,可能会找到简便的解法.

例 4 设  $y = y(x)$  是由方程组

$$\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3, \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$$

所确定的隐函数,求  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

解 两个方程分别对  $t$  求导,得

$$\begin{cases} x'_t = 6t + 2, \\ y'_t = \frac{e^y \cot t}{1 - e^y \sin t} = \frac{e^y \cot t}{2 - y}, \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^y \cot t}{2(2-y)(3t+1)}.$$

故

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{e^y \cot t}{2(2-y)(3t+1)} \right] / \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{e^y(3t+1)[(3-y)y'_t \cot t - (2-y)\sin t] - 3(2-y)e^y \cot t}{4(3t+1)^3(2-y)^2}. \end{aligned}$$

例 5 设  $\arcsin x \cdot \ln y - e^{2x} + \tan y = 0$ , 求  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$ .

解 方程两边对  $x$  求导, 得

$$\frac{\ln y}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{y} y' - 2e^{2x} + \frac{1}{\cos^2 y} y' = 0,$$

解得  $y' = \left[ 2e^{2x} - \frac{\ln y}{\sqrt{1-x^2}} \right] / \left[ \frac{\arcsin x}{y} + \frac{1}{\cos^2 y} \right].$

由于  $x = 0$  时,  $y = \frac{\pi}{4}$ , 故

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{4}.$$

## 二、参数方程确定函数的导数

例 6 设摆线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$$

(1) 求摆线上任一点  $P$  处切线与法线的斜率;

(2) 求方程确定的函数  $y = y(x)$  的二阶导数  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

解 (1)  $k_{\text{切}} = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t},$

$$k_{\text{法}} = -1/k_{\text{切}} = -\frac{1 - \cos t}{\sin t}.$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\sin t}{1 - \cos t} / \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{a(1 - \cos t) a \cos t - a \sin t a \sin t}{a^3 (1 - \cos t)^3} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}. \end{aligned}$$

例 7 设函数  $f(t)$  三次可微, 且  $f''(t) \neq 0$ , 有

$$\begin{cases} x = f'(t), \\ y = t f'(t) - f(t), \end{cases}$$

求  $\frac{d^3 y}{dx^3}$ .

解  $\frac{dy}{dx} = \frac{d[t f'(t) - f(t)]}{df'(t)} = \frac{t f''(t)}{f''(t)} = t.$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} t / \frac{dx}{dt} = \frac{1}{f''(t)}.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{f''(t)}\right] / \frac{dx}{dt} = -\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^3}.$$

例 8 求曲线  $x = \frac{2t+t^2}{1+t^3}, y = \frac{2t-t^2}{1+t^3}$  在  $t=0, 1, \infty$  各点处的切线方程与法线方程.

解  $x'_t = \frac{2+2t-4t^3-t^4}{(1+t^3)^2}, y'_t = \frac{2-2t-4t^3+t^4}{(1+t^3)^2}.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2-2t-4t^3+t^4}{2+2t-4t^3-t^4}, k_{\text{切}} = \frac{dy}{dx}, k_{\text{法}} = -\frac{dx}{dy}.$$

(1)  $t=0, (x, y) = (0, 0), k_{\text{切}} = 1, k_{\text{法}} = -1.$

切线方程  $y = x$ , 法线方程  $y = -x$ .

(2)  $t=1, (x, y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), k_{\text{切}} = 3, k_{\text{法}} = -\frac{1}{3}.$

切线方程  $3x - y = 4$ , 法线方程  $x + 3y = 3.$

(3)  $t=\infty, (x, y) = (0, 0), k_{\text{切}} = -1, k_{\text{法}} = 1.$

切线方程  $y = -x$ , 法线方程  $y = x.$

例 9 证明: 星形线

$$x = a\cos^3t, y = a\sin^3t, 0 \leq t \leq 2\pi$$

上除  $t_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$  外, 切线被两坐标轴所截线段长为一定数.

证 因为  $x'_t = -3a\cos^2t\sin t, y'_t = 3a\sin^2t\cos t.$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3a\sin^2t\cos t}{3a\cos^2t\sin t} = -\tan t.$$

过点  $(x(t_0), y(t_0))$  的切线方程为

$$y - a\sin^3t_0 = -\tan t_0(x - a\cos^3t_0),$$

所以, 切线与  $x$  轴的交点是  $M(a\cos^3t_0, 0)$ , 与  $y$  轴的交点是  $N(0, a\sin^3t_0)$ , 于是切线长为

$$|MN| = \sqrt{(a\cos^3t_0)^2 + (a\sin^3t_0)^2}.$$

例 10 设  $x = \sqrt{1+t}, y = \sqrt{1-t}$  确定函数  $y = y(x)$ , 证明:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{y^3}.$

$$\text{证} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-1/(2\sqrt{1-t})}{1/(2\sqrt{1+t})} = -\frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}} = -\frac{x}{y},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \left( -\frac{x}{y} \right)'_x = -\frac{y - xy'_x}{y^2} = -\frac{y - x(-x/y)}{y^2} \\ &= -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{(\sqrt{1-t})^2 + (\sqrt{1+t})^2}{y^3} = -\frac{2}{y^3}. \end{aligned}$$

例 11 证明:心脏线  $r = a(1 - \cos\theta)$  ( $a > 0$ ) 的向径与切线间的夹角等于向径极角的二分之一.

证 由疑难解析 1 知,  $f(\theta) = a(1 - \cos\theta)$ ,  $f'(\theta) = a\sin\theta$ , 故

$$\begin{aligned} \tan\varphi &= \frac{f(\theta)}{f'(\theta)} = \frac{a(1 - \cos\theta)}{a\sin\theta} = \frac{2\sin^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)} \\ &= \tan(\theta/2). \end{aligned}$$

例 12 求对数螺线  $\rho = e^\varphi$  在点  $(\rho, \varphi) = \left( e^{\pi/2}, \frac{\pi}{2} \right)$  处的切线的直角坐标方程.

解 将极坐标方程  $\rho = e^\varphi$  转换成直角坐标系下的参数方程:  
 $x = e^\varphi \cos\varphi, y = e^\varphi \sin\varphi$ . 所以, 切线斜率为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi} \Rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\varphi=\pi/2} = -1.$$

当  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  时,  $x = 0, y = e^{\pi/2}$ . 故切线方程为

$$y - e^{\pi/2} = -x, \quad \text{即} \quad x + y = e^{\pi/2}.$$

例 13 设  $\rho = \rho(x)$  是抛物线  $y = \sqrt{x}$  上任意一点  $M(x, y)$  ( $x \geq 1$ ) 处的曲率半径,  $s = s(x)$  是抛物线上介于点  $A(1, 1)$  与  $M$  之间的弧长, 计算  $3\rho \frac{d^2\rho}{ds^2} - \left( \frac{d\rho}{ds} \right)^2$  的值(直角坐标系

下曲率公式为  $\kappa = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$ .

解 因为  $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, y'' = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$ , 所以抛物线在点

$M(x, y)$  处的曲率半径为

$$\rho = \rho(x) = \frac{1}{\kappa} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{1}{2}(4x + 1)^{3/2}.$$

抛物线上  $\widehat{AB}$  的弧长

$$s = s(x) = \int_1^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_1^x \sqrt{1 + 1/(4x)} dx.$$

显然,  $\rho$  和  $s$  都是参变量  $x$  的函数. 由参数方程确定函数的导数公式, 得

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho/dx}{ds/dx} = \frac{1/2 \cdot 3/2(4x + 1)^{1/2} \cdot 4}{\sqrt{1 + 1/(4x)}} = 6\sqrt{x},$$

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\rho}{ds}\right) / \frac{ds}{dx} = \frac{6}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 1/(4x)}} = \frac{6}{\sqrt{4x + 1}}.$$

因此, 有

$$3\rho \frac{d^2\rho}{ds^2} - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{2}(4x + 1)^{3/2} \cdot \frac{6}{\sqrt{4x + 1}} - 36x = 9.$$

**例 14** 已知曲线的极坐标方程是  $r = 1 - \cos\theta$ , 求该曲线上对应于  $\theta = \frac{\pi}{6}$  处的切线与法线的直角坐标方程.

**解** 曲线的参数方程为:  $x = (1 - \cos\theta)\cos\theta, y = (1 - \cos\theta)\sin\theta$ , 即  $x = \cos\theta - \cos^2\theta, y = \sin\theta - \sin\theta\cos\theta$ .

切点坐标为  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ .

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/6} = \left.\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}\right|_{\theta=\pi/6} = \frac{\cos\theta - \cos^2\theta + \sin^2\theta}{-\sin\theta + 2\cos\theta\sin\theta}\bigg|_{\theta=\pi/6} = 1.$$

所以, 切线方程和法线方程为

$$\begin{cases} y - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}, \\ y - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = -\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}\right), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y - \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{5}{4} = 0, \\ x + y - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} = 0. \end{cases}$$

例 15 参数方程  $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t$  确定函数  $y = y(x)$ ,  
证明:  $y''(x + y)^2 = 2(xy' - y)$ .

证 由参数方程的求导法,有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^t(\cos t - \sin t)}{e^t(\sin t + \cos t)} = 1 - \frac{2\sin t}{\cos t + \sin t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left( 1 - \frac{2\sin t}{\cos t + \sin t} \right) / \frac{dx}{dt} = \frac{-2}{e^t(\cos t + \sin t)^3},$$

$$\begin{aligned} \text{故 } y''(x + y)^2 &= \frac{-2}{e^t(\cos t + \sin t)^3} \cdot e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 \\ &= \frac{-2e^t}{\cos t + \sin t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(xy' - y) &= 2 \left[ x \left( 1 - \frac{2\sin t}{\cos t + \sin t} \right) - e^t \cos t \right] \\ &= 2e^t \left( \sin t \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t} - \cos t \right) = \frac{-2e^t}{\cos t + \sin t}. \end{aligned}$$

于是  $y''(x + y)^2 = 2(xy' - y)$ .

例 16 参数方程  $x = 2t + |t|, y = 5t^2 + 4t|t|$  确定函数  $y = y(x)$ , 求  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ .

解 因为  $|t|$  在  $t = 0$  不可导, 故不能直接使用参数方程确定函数的求导法则, 需先求出函数  $y = y(x)$  的表达式

$$\text{由 } x = \begin{cases} 3t, & t \geq 0, \\ t, & t < 0, \end{cases} \quad y = \begin{cases} 9t^2, & t \geq 0, \\ t^2, & t < 0 \end{cases}$$

知,  $x$  与  $t$  同正负, 故

$$t = \begin{cases} \frac{x}{3}, & x \geq 0, \\ x, & x < 0, \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ x^2, & x < 0. \end{cases}$$

所以  $\frac{dy}{dx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$ .

### 第三节 微分与高阶导数

#### 主要内容

1. 若函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  的增量  $\Delta y$  可以表示为  $\Delta x$  的线性函数  $A\Delta x$  与较  $\Delta x$  较高阶的无穷小量之和:  $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ , 则称函数  $f$  在点  $x_0$  可微,  $A\Delta x$  为函数  $f$  在点  $x_0$  的微分, 记作

$$dy \Big|_{x=x_0} = A\Delta x \quad \text{或} \quad d(f(x)) \Big|_{x=x_0} = A\Delta x,$$

$A$  是与  $\Delta x$  无关的常数.

2. 函数  $f$  在  $x_0$  可微  $\Leftrightarrow$  函数  $f$  在  $x_0$  可导. 此时  $A = f'(x_0)$ .

3. 若  $f$  在区间  $I$  上每点都可微, 则称  $f$  为  $I$  上的可微函数.  $f$  在  $I$  上的微分记作  $dy = f'(x)\Delta x$ , 它不仅依赖于  $\Delta x$ , 也依赖于  $x$ .

4. 有如下微分运算法则:

$$(1) \quad d[u(x) \pm v(x)] = du(x) \pm dv(x);$$

$$(2) \quad d[u(x)v(x)] = v(x)du(x) + u(x)dv(x);$$

$$(3) \quad d\left(\frac{v(x)}{u(x)}\right) = \frac{u(x)dv(x) - v(x)du(x)}{u^2(x)};$$

$$(4) \quad d[(f \circ g)(x)] = f'(u)g'(x)dx = f'(g(x))g'(x)du.$$

当式(4)中以  $du = g'(x)dx$  代入时, 也可写作  $dy = f'(u)du$ , 与  $dy = f'(x)dx$  形式上完全一样. 即不论  $x$  是自变量还是  $u$  是中间变量, 它都有相同的微分形式. 此性质称为一阶微分的形式不变性.

5. 若函数  $y = f(x)$  的  $n-1$  阶导数  $f^{(n-1)}(x)$  在点  $x$  可导, 则称其导数为  $f$  在  $x$  的  $n$  阶导数, 记作  $f^{(n)}(x)$ ,  $y^{(n)}$ ,  $n = 2, 3, \dots, n$  阶导数称为高阶导数.

6.  $y = uv$  的  $n$  阶导数公式称莱布尼茨公式.

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v^{(0)} + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \cdots \\ + C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + u^{(0)}v^{(n)}.$$

7. 若  $y = f[g(x)]$ , 则  $y' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$ ,  
 $y'' = f''[g(x)] \cdot [g'(x)]^2 + f'[g(x)] \cdot g''(x)$ .

8. 若  $y = f(x)$  为严格单调的连续函数, 其反函数  $x = \phi(y)$  有高阶导数, 且  $\phi'(y) \neq 0$ , 则

$$y'(x) = \frac{1}{\phi'(y)}, \quad y''(x) = -\frac{\phi''(y)}{[\phi'(y)]^3}, \\ y'''(x) = \frac{3[\phi''(y)]^2 - \phi'(y) \cdot \phi'''(y)}{[\phi'(y)]^5}.$$

9. 若函数  $f = f(x)$  的  $n-1$  阶微分  $d^{n-1}f(x)$  在点  $x$  可微, 则称其微分为  $f$  在  $x$  的  $n$  阶微分, 记作  $d^n f(x)$ ,  $d^n y$ ,  $n = 1, 2, \cdots$ . 一般有  $d^n y = y^{(n)} dx^n$ .

## 疑难解析

1. 函数  $f(x)$  在一点  $x_0$  的导数与微分有什么区别?

答 从理论上讲, 导数与微分是等价的, 它们互为充要条件. 但从实际意义与几何上看, 它们有着很大的区别, 表现为:

(1) 导数  $f'(x_0)$  是一个数值, 是函数增量  $\Delta y$  与自变量增量  $\Delta x$  之比  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  当  $\Delta x \rightarrow 0$  时的极限, 它反映函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的变化率. 而微分  $dy = f'(x_0)(x - x_0)$  是自变量增量  $\Delta x = (x - x_0)$  的线性函数, 是一个无穷小量, 它反映函数  $f(x)$  在点  $x_0$  增量的线性主部. 两者的实际意义相去甚远.

(2) 在几何意义上, 导数  $f'(x_0)$  是曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_0, y_0)$  的切线斜率, 而微分  $dy = f'(x_0)(x - x_0)$  是曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_0, y_0)$  的切线在区间  $(x_0, x_0 + \Delta x)$  上的纵坐标的增量 (见图 3.3).

(3) 在使用上, 导数主要用于函数性质的理论研究与应用问



题变化率的讨论,而微分主要用于微分运算与近似计算,误差估计.

2. 为什么二阶微分不再具有形式不变性?

答 对于复合函数  $y = f(u), u = g(x)$ , 具有一阶微分的形式不变性, 即

$$dy = f'(u)du.$$

图 3.3

但是, 二阶微分时,  $d^2y \neq f''(u)du^2$ . 这是因为, 当对  $dy = f'(u)du$  两边求微分时, 有

$$d^2y = d[f'(u)] \cdot dy + f'(u)d(dy) = f''(u)du^2 + f'(u)d^2u.$$

因为  $u$  是中间变量而不是自变量, 一般地,  $d^2u \neq 0$ , 所以多了一项, 不再有微分形式不变性.

## 方法、技巧与典型例题分析

对于微分运算, 常用两种方法: 一是用一阶微分的形式不变性直接求出, 二是先求出导数, 再配以自变量微分得到函数的微分. 求高阶微分时, 要注意微分形式不变性已不再成立. 求高阶导数时, 一般采用逐阶求导法. 对复合函数求导, 一定要注意链式法则的运用. 求高阶导数最关键的是从前几阶导数中总结和发现规律, 写出高阶导数公式.

### 一、微分问题

例 1 求下列微分:

$$(1) y = e^{-ax} \cos bx;$$

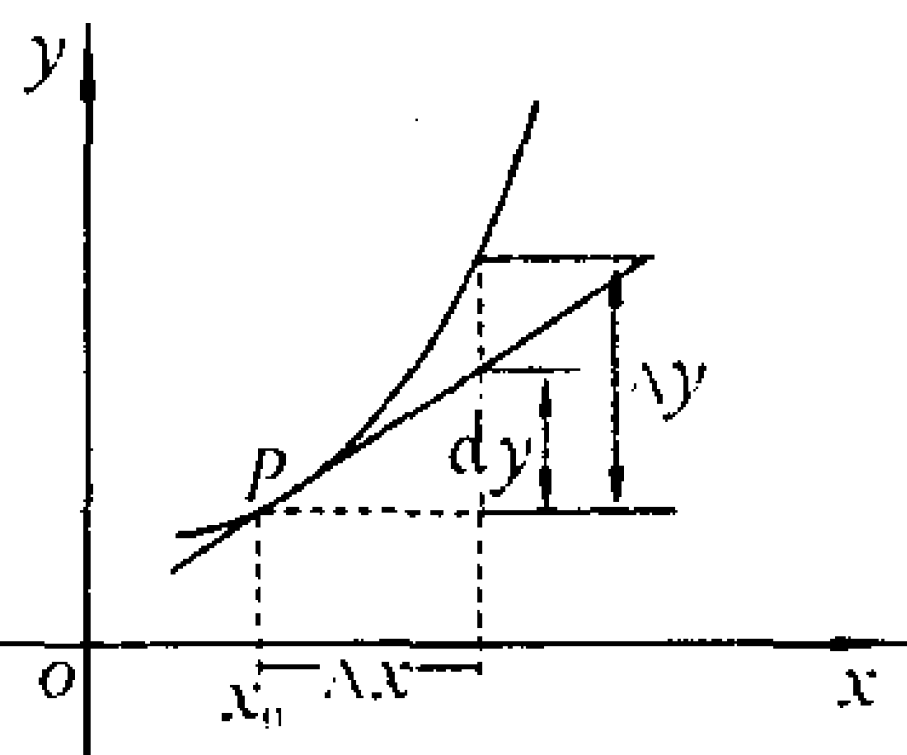
$$(2) y = x^2 \ln x^2 + \cos x^2;$$

$$(3) \cos(xy) = x^2 y^2;$$

$$(4) y = \ln \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right].$$

解 (1) 由一阶微分形式不变性, 有

$$\begin{aligned} dy &= d(e^{-ax} \cos bx) = \cos bx d(e^{-ax}) + e^{-ax} d(\cos bx) \\ &= [\cos bx e^{-ax} (-a) + e^{-ax} (-\sin bx) \cdot b] dx \end{aligned}$$



$$= -e^{-ax}[a\cos bx + b\sin bx]dx.$$

(2) 因为  $y' = 2x\ln x^2 + 2x - \sin x^2 \cdot 2x$ , 所以

$$dy = 2x[\ln x^2 + 1 - \sin x^2]dx.$$

(3) 所给方程是一个隐函数, 两边求微分, 得

$$d \cos(xy) = d(x^2y^2),$$

$$- \sin(xy)d(xy) = y^2dx^2 + x^2dy^2,$$

$$- \sin(xy)(xdy + ydx) = 2xy^2dx + 2x^2ydy,$$

经整理, 解出

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{y \sin(xy) + 2xy^2}{x \sin(xy) + 2x^2y} = - \frac{y}{x}.$$

故

$$dy = - \frac{y}{x}dx.$$

(4) 由一阶微分形式不变性, 有

$$\begin{aligned} dy &= d \ln \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right] = \frac{1}{\tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)} \cdot d \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \\ &= 1 / \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \cdot \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right] d \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \\ &= 1 / \sin \left[ 2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right] dx = \frac{1}{\sin(\pi/2 + x)} = \frac{dx}{\cos x} = \sec x dx. \end{aligned}$$

例 2 讨论由参数方程

$$\begin{cases} x = 2t + |t|, \\ y = 3t^2 + t|t| \end{cases}$$

确定的函数  $y = f(x)$  的微分  $dy$ .

解 因为

$$x = \begin{cases} t, & t \leq 0, \\ 3t, & t > 0, \end{cases} \quad y = \begin{cases} 2t^2, & t \leq 0, \\ 4t^2, & t > 0, \end{cases}$$

显然,  $x$  与  $t$  同正负, 有

$$t = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ x/3, & x > 0. \end{cases}$$

代入  $y$  的表达式, 得

$$y = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0, \\ 4x^2/9, & x > 0. \end{cases}$$

由于  $y = f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 所以

$$dy = \begin{cases} 4x dx, & x \leq 0, \\ 8x/9 \cdot dx, & x > 0. \end{cases}$$

**例 3** 设  $y = \sin[u^2(x) + v^2(x)]$ ,  $u(x), v(x)$  可微, 求  $dy$ .

**解**  $y$  是抽象函数, 用一阶微分的形式不变性来求.

$$\begin{aligned} dy &= \cos[u^2(x) + v^2(x)] d[u^2(x) + v^2(x)] \\ &= \cos[u^2(x) + v^2(x)] [2u(x) du(x) + 2v(x) dv(x)] \\ &= 2\cos[u^2(x) + v^2(x)] \cdot [u(x)u'(x) + v(x)v'(x)] dx. \end{aligned}$$

**例 4** 设函数  $y = y(x)$  由方程  $2^{xy} = x + y$  确定, 求  $dy \Big|_{x=0}$ .

**解**  $y(x)$  是一个隐函数, 要对方程两边求微分, 利用一阶微分形式不变性, 得

$$\begin{aligned} d2^{xy} &= d(x + y), \\ 2^{xy} \ln 2 (x dy + y dx) &= dx + dy. \end{aligned}$$

解得 
$$dy = \frac{\ln 2 \cdot 2^{xy} \cdot y - 1}{1 - \ln 2 \cdot 2^{xy} \cdot x} dx.$$

因  $x = 0$  时, 由方程可得  $y = 1$ , 故

$$dy \Big|_{x=0} = (\ln 2 - 1) dx.$$

**例 5** 设  $f(x) > 0$  且处处可微, 求  $df \left[ \frac{\ln f(x)}{f(x)} \right]$ .

**解** 由一阶微分形式不变性, 得

$$\begin{aligned} df \left[ \frac{\ln f(x)}{f(x)} \right] &= f' \left[ \frac{\ln f(x)}{f(x)} \right] d \frac{\ln f(x)}{f(x)} \\ &= f' \left[ \frac{\ln f(x)}{f(x)} \right] \cdot \frac{f(x) \frac{f'(x)}{f(x)} - f'(x) \ln f(x)}{[f(x)]^2} dx \\ &= f' \left[ \frac{\ln f(x)}{f(x)} \right] \cdot \frac{f'(x)}{f^2(x)} (1 - \ln f(x)) dx. \end{aligned}$$

**例 6** 设函数曲线可由参数式  $x = x(t), y = y(t)$  表示, 又可

用极坐标式  $r = r(\theta)$  表示. 证明:

$$(dx)^2 + (dy)^2 = (rd\theta)^2 + (dr)^2.$$

证 因为  $x = r(\theta)\cos\theta, y = r(\theta)\sin\theta$ , 所以

$$dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta, \quad dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta,$$

于是

$$\begin{aligned} (dx)^2 + (dy)^2 &= (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta)^2 + (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta)^2 \\ &= (rd\theta)^2 + (dr)^2. \end{aligned}$$

例 7 设  $y = [f(x^2)]^{1/x}, f(x) > 0$  且可微, 求  $dy$ .

解  $y$  是幂指函数, 用取对数微分法, 得

$$\ln y = \frac{1}{x} \ln f(x^2).$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= \frac{x d \ln f(x^2) - \ln f(x^2) \cdot dx}{x^2} \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{f'(x^2)}{f(x^2)} 2x dx - \frac{1}{x^2} \ln f(x^2) dx \\ &= \left[ 2 \frac{f'(x^2)}{f(x^2)} - \frac{1}{x^2} \ln f(x^2) \right] dx, \end{aligned}$$

故  $dy = [f(x^2)]^{1/x} \left[ 2 \frac{f'(x^2)}{f(x^2)} - \frac{1}{x^2} \ln f(x^2) \right] dx.$

例 8 设  $f_{ij}(x)$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) 可微, 求以如下行列式定义的函数  $F(x)$  的微分:

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix}.$$

解 因为  $f_{ij}(x + \Delta x) = f_{ij}(x) + f'_{ij}(x)\Delta x + o(\Delta x),$   
 $F(x + \Delta x) = F(x) + G(x)\Delta x + o(\Delta x),$

其中

$$G(x) \triangleq \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) \\ f'_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f'_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f'_{12}(x) & f_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f'_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f'_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f'_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f'_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f'_{33}(x) \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f'_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f'_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f'_{33}(x) \end{vmatrix}.$$

则

$$dF(x) = G(x)dx.$$

例 9 设  $y = \log_{\varphi(x)} \psi(x)$ ,  $\varphi(x), \psi(x)$  可微,  $\varphi(x) > 0, \psi(x) > 0$ , 求  $dy$ .

解 因为  $y = \log_{\varphi(x)} \psi(x) = \frac{\ln \psi(x)}{\ln \varphi(x)}$ , 所以对等式两边分别微分, 得

$$\begin{aligned} dy &= d \frac{\ln \psi(x)}{\ln \varphi(x)} = \frac{1}{\ln^2 \varphi(x)} \left[ \ln \varphi(x) \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} - \ln \psi(x) \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right] dx \\ &= \frac{1}{\ln \varphi(x)} \left[ \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} - \log_{\varphi(x)} \psi(x) \cdot \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right] dx. \end{aligned}$$

例 10 设  $y = \frac{x-a}{1-ax}$  ( $|a| < 1$ ), 证明: 当  $|x| < 1$  时,

$$\frac{dy}{1-y^2} = \frac{dx}{1-x^2}.$$

证 对方程  $y = \frac{x-a}{1-ax}$  两边微分, 得

$$dy = \frac{1-a^2}{(1-ax)^2} dx.$$

而  $1-y^2 = 1 - \left( \frac{x-a}{1-ax} \right)^2 = \frac{1-a^2}{(1-ax)^2} (1-x^2),$

故  $dy = \frac{1-y^2}{1-x^2} dx \Rightarrow \frac{dy}{1-y^2} = \frac{dx}{1-x^2}.$

## 二、高阶导数与高阶微分问题

求高阶导数有下列基本公式:

$$(1) (e^x)^{(n)} = e^x, (a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n \quad (a > 0);$$

$$(2) (x^m)^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n};$$

$$(3) (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right), (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right);$$

$$(4) (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n},$$

$$(\log_a x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n \ln a};$$

$$(5) \left( \frac{1}{1+x} \right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

在求高阶导数时,要先将函数变形,尽可能利用基本公式.要善于用数学归纳法、递推公式和莱布尼茨公式.

例 11 设函数

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x < 0, \\ \ln(1+x), & x \geq 0. \end{cases}$$

问  $a, b$  为何值时,  $f'(x)$  处处连续,但在  $x=0$  无二阶导数.

解  $f'(x)$  在  $x \neq 0$  连续是显然的.要在  $x=0$  可导,则  $f(x)$  在  $x=0$  连续,由  $f_+(0) = f_-(0) = f(0) \Rightarrow c=0$ . 又

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^2 + bx}{x} = b,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

所以,由  $f'_+(0) = f'_-(0) = f'(0)$  得  $b=1$ .

讨论  $f'(x)$  的连续性. 当  $x < 0$  时,  $f'(x) = 2ax + 1$ ,  $f'(0^-) = 1$ ; 当  $x > 0$  时,  $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ ,  $f'(0^+) = 1$ . 由  $f'(0^-) = f'(0^+) = f'(0)$  知,  $f'(x)$  在  $x=0$  连续,从而  $f(x)$  处处有一阶连续导数.

$$f''_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2ax + 1 - 1}{x} = 2a,$$

$$f''_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/(1+x) - 1}{x} = -1,$$

所以,当  $2a \neq -1$ , 即  $a \neq -\frac{1}{2}$  时,  $f''(0)$  不存在.

即本例选  $a \neq -\frac{1}{2}, b=1$ .

例 12 证明:

$$(a^2 + b^2)^{n/2} e^{ax} \sin(bx + n\varphi) = \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i e^{ax} \sin\left(bx + \frac{\pi}{2}i\right),$$

其中  $\varphi = \arctan \frac{b}{a}$ .

证 设  $f(x) = e^{ax} \sin bx$ , 则

$$f'(x) = e^{ax} (a \sin bx + b \cos bx)$$

$$= (a^2 + b^2)^{1/2} e^{ax} \sin(bx + \varphi) \left( \varphi = \arctan \frac{b}{a} \right).$$

逐次求导, 可得

$$f^{(n)}(x) = (a^2 + b^2)^{n/2} e^{ax} \sin(bx + n\varphi).$$

又, 用莱布尼茨公式直接求导, 得

$$f^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i e^{ax} \sin\left(bx + \frac{\pi}{2}i\right)$$

比较两式, 即得所证命题.

例 13 设  $f(x) = \arcsin x$ , 证明:

$$(1) (1 - x^2) f^{(n+2)}(x) - (2n + 1)x f^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0;$$

$$(2) f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0);$$

$$(3) f^{(2k)}(0) = 0, f^{(2k+1)}(0) = 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2k - 1)^2, \forall k \in \mathbb{N}.$$

证 (1)  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , 即  $\sqrt{1-x^2} f'(x) = 1$ , 所以

$$f''(x) \sqrt{1-x^2} - f'(x) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

即

$$f''(x)(1-x^2) - f'(x) \cdot x = 0.$$

对上式两项分别使用莱布尼茨公式, 得

$$\begin{aligned} & f^{(n+2)}(x)(1-x^2) + n f^{(n+1)}(x)(-2x) \\ & + \frac{n(n-1)}{2} f^{(n)}(x)(-1) - [f^{(n+1)}(x)x + n f^{(n)}(x)] = 0. \end{aligned}$$

经整理, 即得

$$(1-x^2) f^{(n+2)}(x) - (2n+1)x f^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0.$$

(2) 在上式中, 令  $x = 0$ , 即得所证命题.

(3) 因为  $f'(0) = 0, f''(0) = 0$ , 利用题(2) 的结果, 得

$$f'''(0) = 1^2 f'(0) = 1^2, f^{(4)}(0) = 0, \dots$$

所以,  $f^{(2k)}(0) = 0, f^{(2k+1)}(0) = 1^2 \cdot 3^2 \cdots (2k-1)^2, \forall k \in \mathbb{N}$ .

例 14 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - \cos x}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$

其中  $g(x)$  为二阶可导且导数连续,  $g(0) = 1$ .

(1) 求使  $f(x)$  在  $x = 0$  连续的  $a$  值;

(2) 求  $f'(x)$  并讨论  $f'(x)$  在  $x = 0$  的连续性.

解 (1) 因为  $[g(x) - \cos x] \Big|_{x=0} = 1 - 1 = 0$ , 所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[g(x) - \cos x] - 0}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} g'(x) + \sin x = g'(0). \end{aligned}$$

当  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = g'(0)$  时,  $f(x)$  在  $x = 0$  连续, 则  $f(x)$  处处连续. 即  $a = g'(0)$ ,  $f(x)$  在  $x = 0$  连续.

(2) 当  $x \neq 0$  时, 有

$$f'(x) = \frac{[g'(x) + \sin x]x - [g(x) - \cos x]}{x^2},$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[g(x) - \cos x]/x - g'(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - \cos x - xg'(0)}{x^2} \\ &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) + \sin x - g'(0)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{g'(x) - g'(0)}{2x - 0} + \frac{\sin x - \sin 0}{2x} \right) \\ &= \frac{1}{2} g''(0) + \frac{1}{2} \quad (L' \text{ 用法见下章第二节}). \end{aligned}$$

$$\text{故 } f'(x) = \begin{cases} \frac{[g'(x) + \sin x]x - [g(x) - \cos x]}{x^2}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2} g''(0) + \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$



由于

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[g'(x) + \sin x]x - [g(x) - \cos x]}{x^2} \\ &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[g''(x) + \cos x] + [g'(x) + \sin x] - [g'(x) + \sin x]}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g''(x) + \cos x}{2} = \frac{g''(0)}{2} + \frac{1}{2},\end{aligned}$$

所以,  $f'(x)$  在  $x = 0$  连续.

例 15 设  $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

证明:  $f(x)$  在  $x = 0$  存在任意阶导数, 且  $f^{(n)}(0) = 0, n = 1, 2, \dots$ .

证 利用导数定义和数学归纳法证.

当  $x \neq 0$  时,  $f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2},$

$$f''(x) = \left( \frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4} \right) e^{-1/x^2}, \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}, \dots,$$

其中  $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$  是  $\frac{1}{x}$  的  $3n$  次多项式.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{e^{1/x^2}} = 0.$$

设  $f^{(n-1)}(0) = 0$ , 则

$$\begin{aligned}f^{(n)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_{n-1}(1/x)e^{-1/x^2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_{n-1}(1/x)/x}{e^{-1/x^2}} = 0.\end{aligned}$$

故,  $f(x)$  在  $x = 0$  存在任意阶导数, 且  $f^{(n)}(0) = 0$ .

注 由  $f'(x), f''(x)$  可知:  $P_1\left(\frac{1}{x}\right)$  和  $P_2\left(\frac{1}{x}\right)$  是 3 次、6 次多项式, 设  $f^{(n-1)}(x) = P_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$ , 其中  $P_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)$  是  $3(n-1)$  次多项式, 则可推出

$$f^{(n)}(x) = \left[ 2 \left( \frac{1}{x} \right)^3 P_{n-1} \left( \frac{1}{x} \right) - \left( \frac{1}{x} \right)^2 P'_{n-1} \left( \frac{1}{x} \right) \right] e^{-1/x^2},$$

故 
$$P_n \left( \frac{1}{x} \right) = 2 \left( \frac{1}{x} \right)^3 P_{n-1} \left( \frac{1}{x} \right) - \left( \frac{1}{x} \right)^2 P'_{n-1} \left( \frac{1}{x} \right)$$

是  $\frac{1}{x}$  的  $3n$  次多项式.

**例 16** 设  $f$  二阶可导,  $y = f\{f[f(x)]\}$ , 求  $y''(x)$ .

**解** 由复合函数导数的链式法则, 有

$$\begin{aligned} y' &= f'\{f[f(x)]\} \cdot f'[f(x)] \cdot f'(x), \\ y'' &= f''\{f[f(x)]\} \cdot f'[f(x)] \cdot f'(x) \\ &\quad + f'\{f[f(x)]\} \cdot f''[f(x)] \cdot f'(x) \\ &\quad + f'\{f[f(x)]\} \cdot f'[f(x)] \cdot f''(x). \end{aligned}$$

**例 17** 设函数  $f(x)$  当  $x \leq x_0$  时有定义且可微分两次, 问  $a, b, c$  为何值时, 函数

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq x_0, \\ a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c, & x > x_0 \end{cases}$$

可微分两次.

**解** 由题设  $F'(x)$  存在, 故  $F(x)$  在  $x = x_0$  连续. 即有

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} [a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c] = c,$$

得  $c = f(x_0)$ . 又由  $F'(x_0^-) = F'(x_0^+)$  得

$$f'(x_0) = [2a(x - x_0) + b] \Big|_{x=x_0} = b,$$

得  $b = f'(x_0)$ . 再由  $F''(x_0^-) = F''(x_0^+)$  得

$$f''(x_0) = 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2} f''(x_0).$$

**例 18** 求下列导数的高阶导数:

$$(1) y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}, \text{ 求 } y^{(100)}; \quad (2) y = x^2 e^{2x}.$$

**解** (1)  $y = (1+x)(1-x)^{-1/2}$ , 用莱布尼茨公式. 注意到

$(1+x)$  项只能求导一次,故

$$\begin{aligned}
 y^{(100)} &= \sum_{i=0}^{100} C_{100}^i (1+x)^{(i)} [(1-x)^{-1/2}]^{(100-i)} \\
 &= (1+x) [(1-x)^{-1/2}]^{(100)} + C_{100}^1 [(1-x)^{-1/2}]^{(99)} \\
 &= (1+x) \frac{199!!}{2^{100}} (1-x)^{-201/2} + 100 \cdot \frac{197!!}{2^{99}} (1-x)^{-199/2} \\
 &= \frac{197!!(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100} \sqrt{1-x}} \quad (x < 1).
 \end{aligned}$$

(2) 用莱布尼茨公式,注意到  $x^2$  项只能求导两次,故

$$\begin{aligned}
 y^{(20)} &= x^2 (e^{2x})^{(20)} + 2x C_{20}^1 (e^{2x})^{(19)} + 2C_{20}^2 (e^{2x})^{(18)} \\
 &= 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95).
 \end{aligned}$$

例 19 求下列函数的  $n$  阶导数  $y^{(n)}$ :

$$(1) y = \frac{ax+b}{cx+d};$$

$$(2) y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2};$$

$$(3) y = \sin ax \sin bx;$$

$$(4) y = \sin ax \cos bx;$$

$$(5) y = \sin^4 x + \cos^4 x;$$

$$(6) y = \ln \frac{a+bx}{a-bx}.$$

解 (1)  $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}, \quad y'' = -\frac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3}.$

设对  $n$  有  $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{c^{n-1}(ad-bc)n!}{(cx+d)^{n+1}} \left( x \neq -\frac{d}{c} \right)$ , 则对于  $n+1$ , 有

$$\begin{aligned}
 y^{(n+1)} &= -(-1)^{n-1} \frac{c^{n-1}(ad-bc)n!(n+1)(cx+d)^n \cdot c}{(cx+d)^{2(n+1)}} \\
 &= (-1)^n \frac{c^n(ad-bc)(n+1)!}{(cx+d)^{n+2}}.
 \end{aligned}$$

(2)  $y = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$ , 由基本公式(5), 得

$$\begin{aligned}
 y^{(n)} &= \left( \frac{1}{x-2} \right)^{(n)} - \left( \frac{1}{x-1} \right)^{(n)} \\
 &= n! (-1)^n \left[ \frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right] \quad (x \neq 1, x \neq 2).
 \end{aligned}$$

(3)  $y = \frac{1}{2} \cos(a-b)x - \frac{1}{2} \cos(a+b)x,$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} \left\{ (a-b)^n \cos \left[ (a-b)x + \frac{n}{2}\pi \right] - (a+b)^n \cos \left[ (a+b)x + \frac{n}{2}\pi \right] \right\}.$$

$$(4) \quad y = \frac{1}{2} \sin(a+b)x + \frac{1}{2} \sin(a-b)x,$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} \left\{ (a+b)^n \sin \left[ (a+b)x + \frac{n}{2}\pi \right] - (a-b)^n \sin \left[ (a-b)x + \frac{n}{2}\pi \right] \right\}.$$

$$(5) \quad y = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

$$= 1 - \frac{1}{4} (1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x,$$

$$y^{(n)} = 4^{n-1} \cos \left( 4x + \frac{n}{2}\pi \right).$$

$$(6) \quad y = \ln(a+bx) - \ln(a-bx),$$

$$y' = \frac{b}{a+bx} + \frac{b}{a-bx}.$$

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{b^n (n-1)!}{(a+bx)^n} + \frac{b^n (n-1)!}{(a-bx)^n} \\ = b^n (n-1)! \left[ \frac{(-1)^n}{(a+bx)^n} + \frac{1}{(a-bx)^n} \right] \quad \left( |x| < \left| \frac{a}{b} \right| \right).$$

例 20 求下列函数的  $n$  阶微分  $d^n y$ :

$$(1) \quad y = x^n e^x; \quad (2) \quad y = \frac{\ln x}{x}.$$

解

$$(1) \quad d^n y = y^{(n)} dx^n$$

$$= e^x \left[ x^n + n^2 x^{n-1} + \frac{n^2 (n-1)^2}{2!} x^{n-2} + \cdots + n! \right] dx^n.$$

$$(2) \quad d^n y = y^{(n)} dx^n = \left[ \left( \frac{1}{x} \right)^{(n)} \ln x + n \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} \right)^{(n-1)} \right. \\ \left. + C_n^2 \left( -\frac{1}{x^2} \right) \left( \frac{1}{x} \right)^{(n-2)} + \cdots + \frac{1}{x} (\ln x)^{(n)} \right] dx^n$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left[ \ln x - \sum_{k=1}^x \frac{1}{k} \right] dx^n \quad (x > 0).$$

**例 21** 设函数  $f(y)$  的反函数  $f^{-1}(x)$  及  $f'[f^{-1}(x)]$ ,  $f''[f^{-1}(x)]$  都存在, 且  $f'[f^{-1}(x)] \neq 0$ , 证明:

$$\frac{d^2 f^{-1}(x)}{dx^2} = - \frac{f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}.$$

**证** 由题设  $x = f(y)$ ,  $y = f^{-1}(x)$ . 依反函数与复合函数求导法则, 有

$$\begin{aligned} \frac{df^{-1}(x)}{dx} &= \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}, \\ \frac{d^2 f^{-1}(x)}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} \right] = \frac{d}{dy} \left[ \frac{1}{f'(y)} \right] \frac{dy}{dx} \\ &= - \frac{f''(y)}{[f'(y)]^2} \cdot \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = - \frac{f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}. \end{aligned}$$

**例 22** 设  $y = \frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ ,  $a, b, c$  互不相等, 求  $y^{(n)}$ .

**解** 先分解因式, 得

$$y = \frac{1}{(c-b)(c-a)} \frac{1}{(x-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} \frac{1}{(x-b)} + \frac{1}{(a-b)(a-c)} \frac{1}{(x-a)}$$

故 
$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(c-b)(c-a)(x-c)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(b-a)(b-c)} \frac{1}{(x-b)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(a-b)(a-c)} \frac{1}{(x-a)^{n+1}}.$$

**例 23** 若  $y = f(x)$  存在单值反函数  $x = \varphi(y)$ , 且  $y' \neq 0$ ,  $y'' \neq 0$ . 求反函数的导数  $\frac{d^2 x}{dy^2}, \frac{d^3 x}{dy^3}$ .

**解** 由反函数导数公式, 得  $\frac{dx}{dy} = 1 / \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y'}$ .

$$(1) \frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left( \frac{dx}{dy} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{dx}{dy} \right) \frac{dx}{dy} = \frac{d}{dx} \frac{1}{y'} \frac{dx}{dy}$$

$$= \frac{-1}{(y')^2} \cdot y'' \cdot \frac{1}{y'} = -\frac{y''}{(y')^3}.$$

$$(2) \frac{d^3x}{dy^3} = \frac{d}{dy} \left( \frac{d^2x}{dy^2} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2x}{dy^2} \right) \frac{dx}{dy} = -\frac{d}{dx} \left( \frac{y''}{(y')^3} \right) \frac{dx}{dy}$$

$$= -\frac{y'''(y')^3 - 3(y')^2 y'' \cdot y''}{(y')^6} \cdot \frac{1}{y'} = \frac{3(y'')^2 - y' y'''}{(y')^5}.$$

**例 24**  $f(x) = \begin{cases} x^m \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

设  $m$  为自然数. 问在什么条件下, 有

- (1) 在  $x = 0$   $f(x)$  连续;      (2) 在  $x = 0$   $f(x)$  可导;  
 (3) 在  $x = 0$   $f'(x)$  连续;      (4) 在  $x = 0$   $f(x)$  处二阶可导;  
 (5) 在  $x = 0$   $f''(x)$  连续.

**解** (1) 当  $m > 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^m \cdot \sin(1/x) = 0$ , 有  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ . 所以  $m > 0$  时,  $f(x)$  在  $x = 0$  连续.

(2) 当  $m > 1$  时, 有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{m-1} \cdot \sin \frac{1}{\Delta x} = 0,$$

即  $f'(0) = 0$ . 所以当  $m > 1$  时,  $f(x)$  在  $x = 0$  可导.

(3) 当  $m > 2$  时, 由  $x \neq 0$  有

$$f'(x) = mx^{m-1} \sin(1/x) - x^{m-2} \cos(1/x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0,$$

即  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$ . 所以  $m > 2$  时,  $f'(x)$  在  $x = 0$  连续.

(4) 当  $m > 3$  时, 由  $f'(x)$  在  $x = 0$  连续, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{m-3} \left( mx \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) = 0,$$

即  $f''(0) = 0$ . 所以  $m > 3$  时,  $f(x)$  在  $x = 0$  二阶可导.

(5) 当  $m > 4$  时, 由  $x \neq 0$  有

$$f''(x) = x^{m-4} [m(m-1)x^2 \sin(1/x) - 2(m-1)x \cos(1/x) - \sin(1/x)],$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = 0,$$

所以  $m > 4$  时,  $f''(x)$  在  $x = 0$  连续.

## 第四章 微分中值定理与利用导数研究函数

### 第一节 微分中值定理

#### 主要内容

1. 若函数  $f$  在  $x_0$  的某邻域  $U(x_0)$  内对一切  $x \in U(x_0)$  有  $f(x_0) \geq f(x)$  (或  $f(x_0) \leq f(x)$ ), 则称函数  $f$  在点  $x_0$  取得极大值 (或极小值), 点  $x_0$  为极大值点 (或极小值点). 极大值、极小值统称极值.

2. 费尔马 (Fermat) 引理 设函数  $f$  在  $x_0$  的某邻域  $U(x_0)$  内有定义, 且在  $x_0$  可导. 若  $x_0$  为  $f$  的一个极值点, 则  $f'(x_0) = 0$ .

3. 罗尔 (Rolle) 定理 设函数  $f$  满足如下条件:  $f$  在闭区间  $[a, b]$  上连续,  $f$  在开区间  $(a, b)$  内可导,  $f(a) = f(b)$ , 则在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ .

4. 拉格朗日 (Lagrange) 中值定理 若函数  $f$  满足以下条件:  $f$  在闭区间  $[a, b]$  上连续,  $f$  在开区间  $(a, b)$  内可导, 则在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得  $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

推论 1 若函数  $f$  在区间  $I$  上可导, 且  $f'(x) \equiv 0$ , 则在  $I$  上  $f(x) \equiv c$  (常数).

推论 2 若函数  $f$  和  $g$  在区间  $I$  上均可导, 且  $f'(x) \equiv g'(x)$ , 则在  $I$  上  $f(x) = g(x) + c$  (常数).

5. 柯西 (Cauchy) 中值定理 若函数  $f$  和  $g$  满足以下条件:  $f$

与  $g$  在闭区间  $[a, b]$  上均连续,  $f$  与  $g$  在开区间  $(a, b)$  内均可导, 且在  $(a, b)$  内  $f'$  与  $g'$  不同时为零,  $g(a) \neq g(b)$ , 则在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得

$$\frac{g'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

## 疑 难 解 析

### 1. 罗尔定理的条件是充分的还是必要的?

答 罗尔定理的条件是充分的, 但不是必要的. 例如, 对

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-1, 1) \cup (1, 2), \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

$f(x)$  在  $[1, 2]$  上有间断点  $x = 1$ ,  $f(x)$  在  $x = 1$  不可导,  $f(-1) \neq f(2)$ . 罗尔定理的三个条件都不满足, 但  $f'(0) = 0$ ,  $0 \in (-1, 2)$ . 所以罗尔定理条件是充分的. 但是, 三个条件中少了任何一个, 结论可能不成立, 如

$$f_1(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x = 1; \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x < 1/2, \\ 2x - 1, & x \geq 1/2; \end{cases}$$

$$f_3(x) = x, x \in [0, 1].$$

其中  $f_1(x)$  在  $[0, 1]$  上不连续,  $f_2(x)$  在  $(0, 1)$  内不可导,  $f_3(x)$  不满足  $f(a) = f(b)$ , 但它们分别满足罗尔定理的其它两个条件, 却不存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使  $f'(\xi) = 0$ . 尽管如此, 不能说这三个条件是必要的. 由前一例子, 我们只能说, 这三个条件都是充分的.

### 2. 三个中值定理有何联系? 它们几何意义的共同点是什么?

答 可以认为: 罗尔定理是拉格朗日中值定理的特例, 拉格朗日中值定理又是柯西中值定理的特例. 因为, 在柯西中值定理中令  $g(x) = x$ , 即得到拉格朗日中值定理; 在拉格朗日中值定理中增加条件  $f(a) = f(b)$ , 即得到罗尔定理.

罗尔定理的几何意义是: 满足定理条件的函数  $y = f(x)$  在



$(a, b)$  内的曲线上至少存在一条水平切线. 拉格朗日中值定理的几何意义是: 满足定理条件的函数  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内的曲线上至少存在一点  $(\xi, f(\xi))$ , 曲线在该点的切线平行曲线两端点的连线. 柯西中值定理的几何意义是: 满足定理条件的由  $u = g(x), v = f(x)$  所确定的曲线上至少有一点, 曲线的切线平行两端点连线. 罗尔定理满足  $f(a) = f(b)$ , 即两端点连线是水平的. 所以, 三个中值定理几何意义有一个共同点: 满足定理条件的函数曲线上至少有一点的切线平行曲线在区间上两端点的连线.

## 方法、技巧与典型例题分析

中值定理有很多应用, 最重要的应用是证明定理、证明等式与不等式、证明极限、证明零点等等. 做证明题首先要分析题给条件与待证结论, 认真的分析: 利用什么定理能使我们迅速得到结果? 使用什么方法来实施证明? 常用的方法有: 一是直接证明, 这种情况不多见, 一般在验证符合某定理条件后, 即可引用定理得出结论. 二是引入辅助函数, 这种情况比较常见, 一般是将待证结论变形 (如拼凑重组、移项等), 构成一个或两个新的辅助函数, 验证它们符合某个中值定理, 然后利用定理结论导出待证结论. 这种方法需要一定技巧, 而技巧往往又要根据具体问题确定, 希望读者很好地体会例题. 三是用反证法, 假设待证命题的逆命题成立, 然后从推导过程中找出与已知结论 (包括极限、连续、可微等概念与法则、性质) 的矛盾, 从而证明原命题成立.

### 一、罗尔定理的应用

例 1 如下的函数

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

称为  $n$  次勒襄德 (Legendre) 多项式, 证明:  $P_n(x)$  在  $(-1, 1)$  内恰有  $n$  个不同的实根.

证 由高阶导数的莱布尼茨公式知, 函数

$$Q_{2n-m}(x) = \frac{d}{dx^m}(x^2 - 1)^n, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

中都含有 $(x^2 - 1)$ 因式, 故当 $m < n$ 时,  $Q_{2n-m}(x)$ 都有实根 $-1$ 和 $1$ .

考虑 $Q_{2n}(x) = (x^2 - 1)^n$ , 它仅有相异的两个实根 $-1$ 和 $1$ . 由罗尔定理,  $Q_{2n-1}(x) = Q'_{2n}(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内有一个根 $x_{11}$ , 所以,  $Q_{2n-1}(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上有三个相异的根 $-1, x_{11}, 1$ . 再由罗尔定理,  $Q_{2n-2}(x) = Q'_{2n-1}(x)$ 在 $(-1, x_{11})$ 和 $(x_{11}, 1)$ 内至少各有一个根, 所以,  $Q_{2n-2}(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上有四个相异的根 $-1, x_{21}, x_{22}, 1$ .

反复应用罗尔定理, 由数学归纳法可证:  $Q_{2n-m}(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上至少有 $m+2$ 个相异的根 $-1, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}$ 和 $1$  ( $m = 0, 1, \dots, n-1$ ).

令 $m = n-1$ , 则知 $Q_{n+1}(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上至少有 $n+1$ 个相异的根. 再应用一次罗尔定理, 知 $Q_n(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内至少有 $n$ 个根(不含 $1, -1$ ).

由于 $Q_n(x)$ 是 $n$ 次多项式, 至多有 $n$ 个根. 所以 $Q_n(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内恰有 $n$ 个相异的根.

因为 $P_n(x)$ 与 $Q_n(x)$ 只相差一个系数, 所以可以得出:  $P_n(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上恰有 $n$ 个相异的实根.

例2 验证罗尔定理对函数 $y = \ln \sin x$ 在区间 $[\pi/6, 5\pi/6]$ 上的正确性.

解 由 $y = \ln \sin x$ 在定义域 $2n\pi < x < (2n+1)\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ )上的连续性知, 函数在 $[\pi/6, 5\pi/6]$ 上连续.

又 $y' = \cot x$ 在 $(\pi/6, 5\pi/6)$ 内处处存在.

$$f(\pi/6) = f(5\pi/6) = -\ln 2.$$

所以函数 $y = \ln \sin x$ 在 $[\pi/6, 5\pi/6]$ 上满足罗尔定理条件.

因为 $y' = \cot x = 0$ 在 $(\pi/6, 5\pi/6)$ 内有解 $x = \frac{\pi}{2}$ , 所以取 $\xi = \frac{\pi}{2}$ , 即得 $f'(\xi) = 0$ .

例3 设  $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x-1 & 2x-1 \\ 1 & x-2 & 3x-2 \\ 1 & x-3 & 4x-3 \end{vmatrix}$ , 证明: 存在  $\xi \in$

$(0,1)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ .

证  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续,  $f'(x)$  在  $(0,1)$  内可导.

$$f(0) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad f(1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

符合罗尔定理条件. 故存在  $\xi \in (0,1)$ , 使  $f'(\xi) = 0$ .

例4 设  $f(x)$  在  $(0,1)$  内有二阶导数, 且  $f(1) = 0$ , 又  $F(x) = x^2 f(x)$ , 证明: 在  $(0,1)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使  $F''(\xi) = 0$ .

证 显然,  $F(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 在  $(0,1)$  内可导. 又  $F(0) = F(1) = 0$ . 所以  $F(x)$  符合罗尔定理条件, 故存在  $x_0 \in (0,1)$ , 使  $F'(x_0) = 0$ .

又  $F'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) \Rightarrow F'(0) = 0$ , 所以  $F'(x)$  在  $[0, x_0]$  上符合罗尔定理条件, 故存在  $\xi \in (0, x_0)$ , 使  $F''(\xi) = 0$ . 而  $\xi \in (0, x_0) \subset (0,1)$ .

例5 若  $f(x)$  在  $(a,b)$  内非负, 存在三阶导数, 且方程  $f(x) = 0$  有两个相异实根, 证明: 存在  $\xi \in (a,b)$ , 使  $f'''(\xi) = 0$ .

证 因为  $f(x)$  在  $(a,b)$  内非负, 且有  $f(x_1) = f(x_2) = 0$  (设  $x_1 < x_2$ ), 则  $x_1$  和  $x_2$  必为  $f(x)$  的极小值点. 由费尔马定理, 有  $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ .

由上知,  $f(x)$  在  $[x_1, x_2]$  上符合罗尔定理条件, 故存在  $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ , 使  $f'(\xi_1) = 0$ .

又由上知,  $f'(x)$  在  $[x_1, \xi_1]$  上符合罗尔定理条件, 故存在  $\xi_{21} \in (x_1, \xi_1)$  与  $\xi_{22} \in (\xi_1, x_2)$ , 使  $f'(\xi_{21}) = f'(\xi_{22}) = 0$ .

又由上知,  $f''(x)$  在  $[\xi_{21}, \xi_{22}]$  上符合罗尔定理条件, 故存在  $\xi \in (\xi_{21}, \xi_{22})$ , 使  $f'''(\xi) = 0$ .

例6 设  $f(x)$  在  $[0,1]$  上存在  $n+1$  阶导数,  $f(0) = f'(0) =$

$f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$ , 且  $f(1) = 0$ . 证明: 在  $(0, 1)$  内至少有一点  $\xi$ , 使  $f^{(n+1)}(\xi) = 0$ .

证 用数学归纳法.

当  $n = 0$  时, 由  $f(0) = f(1) = 0$  与题设知,  $f(x)$  满足罗尔定理条件, 故存在  $\xi_1 \in (0, 1)$ , 使  $f'(\xi_1) = 0$ .

设  $n = k$  时结论成立. 存在  $\xi_{k+1} \in (0, 1)$ , 使  $f^{(k+1)}(\xi_{k+1}) = 0$ .

当  $n = k + 1$  时, 由  $f^{(k+1)}(0) = f^{(k+1)}(\xi_{k+1}) = 0$  与题设知,  $f^{(k+1)}(x)$  满足罗尔定理条件. 故存在点  $\xi \in (0, \xi_{k+1})$ , 使得  $f^{(k+2)}(\xi) = 0$ .

例 7 设  $f'(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f(a) \cdot f(b) > 0, f(a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ . 证明: 在  $(a, b)$  内至少有一点  $\xi$ , 使  $f'(\xi) = f(\xi)$ .

证 设  $f(a) > 0$ , 则  $f(b) > 0, f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ .

引入辅助函数  $F(x) = e^{-x}f(x)$ , 则  $F(a) = e^{-a}f(a) > 0$ ,  $F\left(\frac{a+b}{2}\right) = e^{-(a+b)/2}f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0, f(b) = e^{-b}f(b) > 0$ . 依闭区间上连续函数的介值定理, 至少有一点  $\xi_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ , 使  $F(\xi_1) = 0$ ; 至少有一点  $\xi_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ , 使  $F(\xi_2) = 0$ .

综上所述知,  $F(x)$  在  $[\xi_1, \xi_2]$  上满足罗尔定理条件, 故存在点  $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$ , 使  $F'(\xi) = 0$ , 即

$$e^{-\xi}f'(\xi) - e^{-\xi}f(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = f(\xi).$$

读者可以从证明中看出, 之所以选择  $F(x) = e^{-x}f(x)$ , 是因为  $e^{-x} > 0$ , 且由  $F(x)$  的导数可以得出  $f'(\xi) = f(\xi)$ .

例 8 函数  $f(x) = \begin{cases} x, & -2 \leq x < 0, \\ -x^2 + 2x + 1, & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$

是否满足罗尔定理条件? 定理中的  $\xi$  是否存在?

解 因为  $f_-(0) = 0, f_+(0) = 1$ , 所以  $f(x)$  在  $x = 0$  不连续, 即  $f(x)$  在  $[-2, 3]$  上不满足罗尔定理的条件. 又由

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x < 0, \\ \text{不存在}, & x = 0, \\ -2x + 2, & 0 < x \end{cases}$$

知, 当  $x = 1$  时,  $f'(1) = 0$ . 故  $\xi = 1$ .

例 9 设  $a_i \in \mathbf{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 且满足  $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ , 证明: 方程  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$  在  $(0, 1)$  内至少有一个实根.

证 作辅助函数

$$F(x) = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

显然,  $F(0) = 0, F(1) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ . 又  $F(x)$  是多项式函数, 在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导,  $F(0) = F(1)$ , 满足罗尔定理条件. 故存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使  $F'(\xi) = 0$ . 而

$$F'(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

故方程  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$  在  $(0, 1)$  内至少有一个实根  $\xi$ .

本例构造  $F(x)$  的依据是, 使  $F(x)$  的导数恰好是所证方程的左边.

例 10 设  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , 是可导函数, 且  $g' \neq 0$ , 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使

$$\frac{f(a) - f(\xi)}{g(\xi) - g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证 引入辅助函数  $F(x) = f(a)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(b)$ , 由题设可知,  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导. 又  $F(a) = f(a)g(b), F(b) = f(a)g(b)$ , 符合罗尔定理条件. 故存在

$\xi \in (a, b)$ , 使  $F'(\xi) = 0$ , 即

$$F'(\xi) = f(a)g'(\xi) - f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi) + f'(\xi)g(b) = 0.$$

经移项整理, 即得

$$\frac{f(a) - f(\xi)}{g(\xi) - g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

**例 11** 证明: 方程  $x^5 + x - 1 = 0$  有惟一正根.

**证** 令  $f(x) = x^5 + x - 1 = 0$ , 显然  $f(x)$  是连续函数, 取区间  $[0, N]$ , 则  $f(x)$  在  $[0, N]$  上连续, 在  $(0, N)$  内可导, 且  $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$ . 由连续函数的零点定理, 知存在  $x_0 \in (0, N)$ , 使  $f(x_0) = 0$ , 即方程有正根 ( $N > 0$ ).

下面用反证法证明正根的惟一性. 设除  $x_0$  外还有一个  $x_1 > 0$ , 使  $f(x_1) = 0$ . 则  $f(x)$  在  $[x_0, x_1]$  上满足罗尔定理条件, 于是存在  $\xi \in (x_0, x_1)$ , 使  $f'(\xi) = 0$ , 这与上面的  $f'(x) > 0$  矛盾. 所以, 方程  $x^5 + x - 1 = 0$  有惟一正根 (区间也可以是  $[x_1, x_0]$ ).

**例 12** 设  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f(a) = f(b) = 0$ . 证明:  $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \exists \xi \in (a, b)$ , 使  $f'(\xi) = \lambda f(\xi)$ .

**证** 引入辅助函数  $F(x) = e^{-\lambda x} f(x)$ , 由题设知  $F(a) = F(b) = 0$ ,  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 满足罗尔定理条件. 故存在  $\xi \in (a, b)$ , 使  $F'(\xi) = 0$ , 即  $e^{-\lambda \xi} f'(\xi) - \lambda e^{-\lambda \xi} f(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \lambda f(\xi)$ .

**例 13** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有  $n$  阶连续导数, 且  $f(x)$  在  $[a, b]$  上至少有  $n + 1$  个相异实根.

$$P_n(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_1x + c_0$$

是仅有实根的实系数多项式. 引入记号  $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$ , 证明:

$$P_n(D)f(x) \equiv (D^n + C_{n-1}D^{n-1} + C_{n-2}D^{n-2} + \cdots + C_1D + C_0)f(x)$$

在  $[a, b]$  上至少有一个零点.

**分析** 设  $P_n(x)$  的  $n$  个相异实根  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ , 故

$$P_n(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n).$$

将  $(D - \alpha_1)(D - \alpha_2) \cdots (D - \alpha_n)$  展开, 得

$$P_n(x)f(x) = (D - \alpha_1)(D - \alpha_2) \cdots (D - \alpha_n)f(x).$$

由上例结果知, 在  $f(x)$  的两相异实根之间必有

$$(D - \alpha_n)f(x) = f'(x) - \alpha_n f(x)$$

的一个实根. 由于  $f(x)$  有  $n + 1$  个相异实根, 所以  $(D - \alpha_n)f(x)$  至少有  $n$  个相异实根. 依次知,  $(D - \alpha_{n-1})(D - \alpha_n)f(x)$  至少有  $n - 1$  个相异实根,  $\cdots$ ,  $P_n(D)f(x) = (D - \alpha_1)(D - \alpha_2) \cdots (D - \alpha_n)f(x)$  至少有一个实根.

读者可尝试用数学归纳法写出简洁的证明.

**例 14 (推广的罗尔定理)** 设  $(a, b)$  为有限或无穷区间,  $f(x)$  在  $(a, b)$  内可导, 且  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = A$  (有限或  $\pm \infty$ ), 证明:  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使  $f'(\xi) = 0$ .

**证** 若  $f(x) \equiv A$ , 则结论是明显的.

若  $f(x) \not\equiv A$ , 则  $\exists x_0 \in (a, b)$ , 使  $f(x_0) \neq A$ . 设  $f(x_0) > A$  ( $f(x_0) < A$  情形类似可证). 由题设知,  $f(x)$  在  $(a, b)$  内连续,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = A,$$

故  $\forall \mu (A < \mu < f(x_0))$ ,  $\exists x_1 \in (a, x_0)$ ,  $x_2 \in (x_0, b)$ , 使  $f(x_1) = f(x_2) = \mu$ . 依罗尔定理,  $\exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ , 使  $f'(\xi) = 0$ .

若  $A = \pm \infty$ , 则在  $(a, b)$  内任取一点作  $x_0$ , 故类似得出  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使  $f'(\xi) = 0$ .

**例 15** 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上可导, 且  $0 \leq f(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$ .

证明:  $\exists \xi > 0$ , 使  $f'(\xi) = \frac{1 - \xi^2}{(1 + \xi^2)^2}$ .

**证** 引入辅助函数  $F(x) = f(x) - \frac{x}{1+x^2}$ . 因为  $F(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续, 在  $(0, +\infty)$  内可导,  $F(0) = F(+\infty) = 0$ . 依

推广的罗尔定理知,  $\exists \xi > 0$ , 使  $F'(\xi) = 0$ . 即  $\exists \xi > 0$ , 使  $f'(\xi) = \frac{1 - \xi^2}{(1 + \xi^2)^2}$ .

**例 16** 设  $f(x), g(x), h(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

证 设  $F(x) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix},$

则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导. 由行列式的性质,  $F(a) = F(b) = 0$ . 故依罗尔定理,  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使  $F'(\xi) = 0$ . 即

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

(1) 令  $h(x) \equiv x$ , 即可推出柯西中值定理.

(2) 令  $g(x) \equiv x, h(x) \equiv 1$ , 即可推出拉格朗日中值定理.

**例 17** 设抛物线  $y = -x^2 + Bx + C$  与  $x$  轴有两个交点  $x = a, x = b$  ( $a < b$ ). 函数  $f$  在  $[a, b]$  上二阶可导,  $f(a) = f(b) = 0$ , 且曲线  $y = f(x)$  与  $y = -x^2 + Bx + C$  在  $(a, b)$  内有一个交点. 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使  $f''(\xi) = -2$ .

证 设  $y = f(x)$  与  $y = -x^2 + Bx + C$  在  $(a, b)$  内的交点为  $x_0$ , 令  $F(x) = f(x) + x^2 - Bx - C$ , 则  $F(a) = F(b) = F(x_0) = 0$ . 于是, 对  $F(x)$  在  $[a, x_0]$  和  $[x_0, b]$  上分别使用罗尔定理, 知  $\exists \xi_1 \in (a, x_0), \xi_2 \in (x_0, b)$ , 使  $f'(\xi_1) = F''(\xi_2) = 0$ .

又,  $F'(x) = f'(x) + 2x - B$  在  $[\xi_1, \xi_2]$  上满足罗尔定理的条件, 故存在  $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$ , 使  $F''(\xi) = 0$ . 即

$$f''(\xi) = -2.$$



例 18 设  $f$  在  $[a, b]$  上二阶可微,  $f(a) = f(b) = 0, f'_+(a) \cdot f'_-(b) > 0$ , 证明: 方程  $f''(x) = 0$  在  $(a, b)$  内至少有一个根.

证 不妨设  $f'_+(a) > 0, f'_-(b) > 0$ . 则

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \Rightarrow \exists x_1 > a, \text{ 使 } f(x_1) > f(a) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} > 0 \Rightarrow \exists x_2 < b, \text{ 使 } f(x_2) < f(b) = 0.$$

因为  $f$  在  $[a, b]$  上可微, 所以  $f$  在  $[x_1, x_2]$  上连续, 依闭区间上连续函数的零点定理, 知  $\exists x_0 \in (x_1, x_2)$ , 使  $f(x_0) = 0$ . 于是在  $[a, x_0]$  及  $[x_0, b]$  上分别使用罗尔定理, 知  $\exists \xi_1 \in [a, x_0), \xi_2 \in (x_0, b)$ , 使  $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ .

在  $[\xi_1, \xi_2]$  上再次使用罗尔定理, 知  $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$ , 使  $f''(\xi) = 0$ , 即方程  $f''(x) = 0$  在  $(a, b)$  内至少有一个根.

例 19 设  $f(x)$  在包含  $x_0$  的区间  $I$  上二次可微,  $x_0 + h \in I$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ , 证明:  $\exists \xi \in (0, 1)$ , 使

$$f(x_0 + \lambda h) = \lambda f(x_0 + h) + (1 - \lambda)f(x_0) + \frac{\lambda}{2}(\lambda - 1)h^2 f''(x_0 + \xi h).$$

证 由  $0 < \lambda < 1$ , 故可取数  $M$ , 使等式

$$f(x_0 + \lambda h) - \lambda f(x_0 + h) - (1 - \lambda)f(x_0) - \frac{\lambda}{2}(\lambda - 1)h^2 M = 0$$

成立. 再证明:  $\exists \xi \in (0, 1)$ , 使  $M = f''(x_0 + \xi h)$ .

引入辅助函数

$$F(t) = f(x_0 + th) - tf(x_0 + h) - (1 - t)f(x_0) - \frac{t}{2}(t - 1)h^2 M,$$

则  $F(t)$  在  $[0, 1]$  上二次可微, 且有三个零点, 即  $F(0) = F(1) = F(\lambda) = 0$ . 在  $[0, 1]$  上应用罗尔定理, 知  $\exists \xi \in (0, 1)$ , 使  $F''(\xi) = 0$ , 即  $f''(x_0 + \xi h) = M$ . 将  $M$  代回第一个等式, 移项即得

$$f(x_0 + \lambda h) = \lambda f(x_0 + h) + (1 - \lambda)f(x_0) + \frac{\lambda}{2}(\lambda - 1)h^2 f''(x_0 + \xi h).$$

例 20 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 证明:  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使

$$\frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = f(\xi) + \xi f'(\xi).$$

证 引入辅助函数  $F(x) = xf(x) - \frac{bf(b) - af(a)}{b - a}x$ , 由题设知  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $F(a) = F(b)$ , 满足罗尔定理条件. 故  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使  $F'(\xi) = 0$ , 即

$$\xi f'(\xi) + f(\xi) = \frac{bf(b) - af(a)}{b - a}.$$

## 二、拉格朗日中值定理的应用

拉格朗日中值定理的应用比罗尔定理更广泛, 因为它对函数的要求更低. 应用拉格朗日中值定理证明命题的方法与技巧与罗尔定理基本相同, 只是变化更加丰富.

例 21 (1) 设函数  $f$  在  $U_+(x_0)$  内连续, 在  $U^\circ_+(x_0)$  内可导. 若  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = f'(x_0 + 0)$  存在, 则右导数  $f'_+(x_0)$  也存在, 且

$$f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0).$$

(2) 设函数  $f$  在  $U_-(x_0)$  内连续, 在  $U^\circ_-(x_0)$  内可导. 若  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = f'(x_0 - 0)$  存在, 则左导数  $f'_-(x_0)$  也存在. 且

$$f'_-(x_0) = f'(x_0 - 0).$$

证 (1) 设  $x \in U_+(x_0)$ , 由拉格朗日中值定理, 函数  $f$  在  $(x_0, x)$  内存在一点  $\xi$ , 使

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi).$$

由于  $x_0 < \xi < x$ , 且当  $x \rightarrow x_0^+$  时,  $\xi \rightarrow x_0^+$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = f'(x_0 + 0).$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(\xi) = f'(x_0 + 0).$$

(2) 类似可证  $f'_-(x_0) = f'(x_0 - 0)$ .

由本例可得导数极限定理:

设函数  $f$  在点  $x_0$  的某邻域  $U(x_0)$  内连续, 在  $U^\circ(x_0)$  内可导. 若极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$  存在, 则  $f'(x_0)$  也存在, 且  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ .

由例 21 和导数极限定理我们得知: 区间  $I$  上的导函数  $f'$ , 在区间  $I$  上要么是连续点, 要么是第二类间断点, 不可能有第一类间断点.

**例 22** 若函数  $f$  在  $[a, b]$  上可导, 且  $f'_+(a) \cdot f'_-(b) < 0$ , 则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使  $f'(\xi) = 0$ .

**证** 设  $f'_+(a) > 0, f'_-(b) < 0$ , 由于

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0,$$
$$f'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} < 0,$$

依函数极限的保号性定理, 存在  $x_1 \in U_+^\circ(a), x_2 \in U_-^\circ(b)$ , 且  $x_1 < x_2$ , 使  $f(x_1) < f(a), f(x_2) > f(b)$ .

对于闭区间  $[x_1, x_2]$  上的连续函数  $f$ , 由最大值与最小值定理,  $\exists \xi \in [x_1, x_2] \subset (a, b)$ , 使  $f$  在点  $\xi$  取得最大值, 也是极大值. 故由费尔马定理,  $f'(\xi) = 0$ .

由本例可推出重要的达布 (Darboux) 定理:

若函数  $f$  在  $[a, b]$  上可导, 且  $f'(a) \neq f'(b)$ ,  $k$  为介于  $f'(a), f'(b)$  之间的任一实数, 则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使  $f'(\xi) = k$ .

定理的证明需引入辅助函数  $F(x) = f(x) - kx$ , 则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 且  $F'_+(a)F'_-(b) < 0$ , 依例 22 结论,  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使  $F'(\xi) = f'(\xi) - k = 0$ , 即  $f'(\xi) = k$ .

**例 23** 证明: 对函数  $f(x) = px^2 + qx + 1$  在某区间上应用拉格朗日中值定理时符合条件的  $\xi$  恰为区间中点. 其中  $p, q, r$  为常数.

**证** 不妨设区间为  $[a, b]$ , 则有

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

因为  $f(b) - f(a) = p(b^2 - a^2) + q(b - a),$

$$f'(\xi) = 2p\xi + q,$$

所以  $f'(\xi)(b - a) = p(b^2 - a^2) + q(b - a)$

$$\Rightarrow 2p\xi = p(b + a) \Rightarrow \xi = \frac{b + a}{2}.$$

即  $\xi$  恰为区间中点.

**例 24** 证明下列不等式:

(1)  $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|;$

(2)  $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b} \quad (a > b > 0);$

(3)  $e^x > xe \quad (x > 1).$

**证** (1) 当  $x = y$  时, 显然有

$$|\arctan x - \arctan y| = |x - y|.$$

当  $x \neq y$  时, 不妨设  $x < y$ , 令  $f(t) = \arctan t$ , 在  $[x, y]$  上应用拉格朗日中值定理, 得

$$\arctan y - \arctan x = \frac{1}{1 + \xi^2}(y - x)$$

$$\Rightarrow |\arctan y - \arctan x| = \frac{1}{1 + \xi^2}|y - x| \leq |y - x|,$$

故  $|\arctan y - \arctan x| \leq |y - x|.$

(2) 令  $f(x) = \ln x \quad (x > 0)$ , 在  $[b, a]$  上应用拉格朗日中值定理, 得

$$\frac{\ln a - \ln b}{a - b} = \frac{1}{\xi} \Rightarrow \ln \frac{a}{b} = \frac{1}{\xi}(a - b).$$

因为  $b < \xi < a$ , 由不等式性质, 得

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b} \quad (a > b > 0).$$

(3) 令  $f(x) = e^x$ , 在  $[1, x]$  上应用拉格朗日中值定理, 得

$$e^x - e = e^{\xi}(x - 1), \quad 1 < \xi < x,$$

$$\Rightarrow e^x - e > e(x - 1) \Rightarrow e^x > ex.$$

取  $x = \pi$ , 即为常见的数值不等式  $e^\pi > e\pi$ .

**例 25** 证明数值不等式  $1/9 < \sqrt{66} - 8 < 1/8$ .

**证** 因为  $\delta = \sqrt{64}$ , 故令  $f(x) = \sqrt{x}$ , 在区间  $[64, 66]$  上应用拉格朗日中值定理, 得

$$\frac{f(66) - f(64)}{66 - 64} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}, \quad 64 < \xi < 66,$$

即由  $\sqrt{66} - 8 = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{66}} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{\sqrt{64}},$

得  $1/9 < \sqrt{66} - 8 < 1/8.$

**例 26** 若  $f'(x) = \lambda f(x)$  ( $\lambda$  为常数),  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 则  $f(x)$  为指数函数.

**证**  $\forall x \neq 0 \in (-\infty, +\infty)$ ,  $f(x)e^{-\lambda x}$  在以  $x$  和 0 为端点的区间上满足拉格朗日中值定理条件, 有

$$f(x)e^{-\lambda x} - f(0)e^{-\lambda 0} = [f'(\xi)e^{-\lambda \xi} - \lambda f(\xi)e^{-\lambda \xi}](x - 0).$$

由题设知  $f'(\xi) = \lambda f(\xi)$ , 所以上式右边等于零, 即  $f(x) - f(0)e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow f(x) = f(0)e^{\lambda x}$ . 由于  $f(0)$  是常数, 故  $f(x)$  为指数函数.

因式子在  $x = 0$  时亦成立, 从而知对一切  $x \in (-\infty, +\infty)$ ,  $f(x)$  为指数函数.

**例 27** 设函数  $f$  在  $[0, 1]$  上二阶可微,  $f(0) = f(1)$ ,  $f'(1) = 1$ , 证明: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使  $f''(\xi) = 2$ .

**证** 引入辅助函数  $F(x) = f(x) - x^2$ , 则  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上满足拉格朗日中值定理条件, 所以  $\exists x_0 \in (0, 1)$ , 使  $F'(x_0) = F(1) - F(0) = -1$ .

又  $F'(1) = [f'(x) - 2x] \Big|_{x=1} = f'(1) - 2 = -1$ . 所以  $F'(x) = f'(x) - 2x$  在  $[x_0, 1]$  上满足罗尔定理条件, 故  $\exists \xi \in (x_0, 1) \subset (0, 1)$ , 使  $F''(\xi) = 0$ . 即存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使  $f''(\xi) = 2$ .

**例 28** 设函数  $f$  和  $g$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a) \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

**证** 引入辅助函数  $F(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix}$ , 显然  $F(x)$  在  $[a, b]$  上满足拉格朗日中值定理条件, 故  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使

$$F'(\xi)(b-a) = F(b) - F(a).$$

由行列式性质

$$F'(\xi) = \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}, \quad F(a) = \begin{vmatrix} f(a) & f(a) \\ g(a) & g(a) \end{vmatrix} = 0,$$

所以  $\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a) \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$

**例 29** 设函数  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  上二次可微, 且  $|f(x)| \leq M$ , 证明:  $\exists \xi \in (-\infty, +\infty)$ , 使  $f''(\xi) = 0$ .

**证** 若  $f''(x)$  变号, 则由导数的介值性, 则  $\exists \xi \in (-\infty, +\infty)$ , 使  $f''(\xi) = 0$ .

下面用反证法证明  $f''(x)$  一定变号.

若  $f''(x)$  不变号, 不妨设  $f''(x) > 0$  ( $f''(x) < 0$  类似可证). 必  $f'(x) > 0$  (见下节). 取  $\xi$ , 使  $f'(\xi) \neq 0$ . 若  $f'(\xi) > 0$ , 则当  $x > \xi$  且  $x \rightarrow +\infty$  时, 由拉格朗日中值定理有

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi_1)(x - \xi) > f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) \rightarrow +\infty,$$

若  $f'(\xi) < 0$ , 则当  $x < \xi$  且  $x \rightarrow -\infty$  时, 同样有

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi_1)(x - \xi) > f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) \rightarrow +\infty.$$

这与  $f(x)$  的有界性矛盾. 故  $f''(x)$  必变号.

**例 30** 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上可微,  $f(0) = 0$ , 并设有实数  $A$ , 使  $|f'(x)| \leq A|f(x)|$  在  $[0, +\infty)$  上成立, 证明: 在  $[0, +\infty)$  上,  $f(x) \equiv 0$ .

**证法 1** 由题设条件, 在  $[0, x]$  上应用拉格朗日中值定理, 得

$$|f(x)| = |f(0) + f'(\xi_1)(x - 0)| = |f'(\xi_1)x| \leq A|f(\xi_1)|x.$$

限制  $x \in \left(0, \frac{1}{2A}\right)$  时, 有

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}|f(\xi_1)|, \quad 0 < \xi_1 < x.$$

重复使用此式  $n$  次, 得

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}|f(\xi_1)| \leq \frac{1}{4}|f(\xi_2)| \leq \cdots \leq \frac{1}{2^n}|f(\xi_n)|.$$

式中  $0 < \xi_n < \xi_{n-1} < \cdots < \xi_1 < x \leq \frac{1}{2A}$ .

由  $f$  的连续性知,  $|f(x)| \leq M$ , 所以在  $\left[0, \frac{1}{2A}\right]$  上

$$|f(x)| \leq \frac{M}{2^n} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

从而知  $f(x)$  在  $\left[0, \frac{1}{2A}\right]$  上恒等于零. 用数学归纳法可证: 在一切  $\left[\frac{i-1}{2A}, \frac{i}{2A}\right]$  ( $i = 1, 2, \cdots$ ) 上恒有  $f(x) \equiv 0$ . 于是得, 在  $[0, +\infty)$  上  $f(x) \equiv 0$ .

**证法 2** 用反证法证.

若  $f(x) \neq 0$ , 则  $\exists x_0 \in (0, +\infty)$ , 使  $f(x_0) \neq 0$ . 不妨设  $f(x_0) > 0$  ( $f(x_0) < 0$  类似可证). 记  $x_1 = \inf\{x | (x, x_0) \text{ 内 } f(x) > 0\}$ , 由连续函数的局部保号性知  $f(x_1) = 0$ , 在  $(x_1, x_0)$  内  $f(x) > 0$ .

令  $g(x) = \ln f(x)$  ( $x \in (x_1, x_0)$ ), 则  $|g'(x)| = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| < A$ , 故在  $(x_1, x_0)$  内,  $|g(x)| \leq M$ . 但  $\lim_{x \rightarrow x_1^+} f(x) = f(x_1) = 0$ , 从而  $\lim_{x \rightarrow x_1^+} g(x) = -\infty$ , 与  $f(x) > 0$  矛盾.

**例 31** 设函数  $f(x)$  的导数  $f'(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 证明: 存在常数  $L > 0$ , 使  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ ,  $x_1, x_2 \in [a, b]$ .

**证** 由  $f'(x)$  在  $[a, b]$  上连续知,  $f'(x)$  在  $[a, b]$  上有最大值. 设  $L = \max|f'(x)|$  ( $x \in [a, b]$ ). 依拉格朗日中值定理, 有

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2), \quad \xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b).$$

$$\text{即 } |f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)| |x_1 - x_2| \leq L |x_1 - x_2|.$$

**例 32** 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可导, 且存在常数  $a_1, b_1$  和  $a_2, b_2 (a_1 < a_2)$ , 使得

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (a_1 x + b_1)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (a_2 x + b_2)] = 0.$$

证明:  $\forall c \in (a_1, a_2), \exists \xi$ , 使  $f'(\xi) = c$ .

**证** 由  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a_1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a_2$  知  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) - f(0)}{x} = a_1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(0)}{x} = a_2$  (由  $f(x)$  的连续性知,  $f(0)$  为有限数). 于是,  $\forall c \in (a_1, a_2), \exists X_1 < 0, X_2 > 0$ , 使

$$\frac{f(X_1) - f(0)}{X_1} < c, \quad \frac{f(X_2) - f(0)}{X_2} > c.$$

依拉格朗日中值定理,  $\exists \xi_1 \in (X_1, 0), \xi_2 \in (0, X_2)$ , 使

$$\frac{f(X_1) - f(0)}{X_1 - 0} = f'(\xi_1) < c, \quad \frac{f(X_2) - f(0)}{X_2 - 0} = f'(\xi_2) > c.$$

由闭区间上连续函数的介值定理,  $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2)$ , 使  $f'(\xi) = c$ .

**例 33** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内有二阶导数, 证明:  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(\xi).$$

**证** 将上式左边变形, 得

$$\begin{aligned} & f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) \\ &= \left[ f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \left[ f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) \right] \\ &= \left[ f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \\ &\quad - \left[ f\left(a + \frac{b-a}{2}\right) - f(a) \right], \end{aligned}$$

故引入辅助函数  $\varphi(x) = f\left(x + \frac{b-a}{2}\right) - f(x)$ , 对



$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) - \varphi(a),$$

在  $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$  上应用拉格朗日中值定理, 得

$$\begin{aligned} f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) &= \varphi(\xi_1)\left(\frac{a+b}{2} - a\right) = \varphi(\xi_1)\frac{b-a}{2} \\ &= \left[f'\left(\xi_1 + \frac{b-a}{2}\right) - f'(\xi_1)\right]\frac{b-a}{2} \quad (\text{再用拉格朗日中值定理}) \\ &= f''\left(\xi_1 + \theta\frac{b-a}{2}\right) \cdot \frac{b-a}{2} \cdot \frac{b-a}{2} \\ &= f''(\xi)\frac{(b-a)^2}{4}, \quad \xi = \xi_1 + \theta\frac{b-a}{2} \in (a, b). \end{aligned}$$

例 34 设  $a, b > 0$ , 证明:  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使

$$ae^b - be^a = (1 - \xi)e^\xi(a - b).$$

证 将等式变形, 得

$$\frac{1}{b}e^{1/b} - \frac{1}{a}e^{1/a} = (1 - \xi)e^{1/\xi}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right),$$

在  $\left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$  上引入辅助函数  $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ , 应用拉格朗日中值定理, 即得上式. 再变形(两边同乘以  $ab$ ) 即得

$$ae^b - be^a = (1 - \xi)e^\xi(a - b), \quad \xi \in (a, b).$$

例 35 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f(a) = f(b) = 1$ , 证明:  $\exists \xi, \eta \in (a, b)$ , 使

$$e^{\eta-\xi}[f(\eta) + f'(\eta)] = 1.$$

证 上式可化为  $e^\eta[f(\eta) + f'(\eta)] = e^\xi$ , 为此, 引入辅助函数  $F(x) = e^x f(x)$ . 由题设知  $F(x)$  满足拉格朗日中值定理条件, 且  $F(a) = e^a f(a) = e^a, F(b) = e^b f(b) = e^b$ . 因此,  $\exists \eta \in (a, b)$ , 使

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = \frac{e^b - e^a}{b - a} = F'(\eta) = e^\eta[f(\eta) + f'(\eta)].$$

又  $g(x) = e^x$  在  $[a, b]$  上满足拉格朗日中值定理条件, 故  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} = e^{\xi}.$$

综上所述知,  $\exists \xi, \eta \in (a, b)$ , 使

$$e^{\eta}[f(\eta) + f'(\eta)] = e^{\xi} \Rightarrow e^{\eta-\xi}[f(\eta) + f'(\eta)] = 0.$$

**例 36** 设  $f(x)$  为非线性函数, 在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 证明:  $\exists \eta \in (a, b)$ , 使

$$|f'(\eta)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|.$$

**证** 引入辅助函数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

由于  $f(x)$  非线性,  $F(x) \not\equiv 0$ , 故  $\exists c \in (a, b)$ , 使  $F(c) \neq 0$ . 而  $F(a) = F(b) = 0$ .

设  $F(c) > 0$  ( $F(c) < 0$  类似可证). 在  $[a, c]$  与  $[c, b]$  上分别应用拉格朗日中值定理, 得

$$F'(\xi_1) = \frac{F(c) - F(a)}{c - a} > 0, \quad \xi_1 \in (a, c),$$

$$F'(\xi_2) = \frac{F(b) - F(c)}{b - c} < 0, \quad \xi_2 \in (c, b),$$

而 
$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

即 
$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} + F'(x).$$

所以 
$$f'(\xi_2) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(\xi_1),$$

从而 
$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| < \max\{|f'(\xi_1)|, |f'(\xi_2)|\} = |f'(\eta)|.$$

**例 37** 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 已知  $f(0) = 0, f(1) = 1$ , 证明:  $\forall a, b > 0, \exists \xi, \eta \in (0, 1)$ , 且  $\xi \neq \eta$ , 使

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b.$$

**证** 因为  $a, b > 0$ , 所以  $0 < \frac{a}{a+b} < 1$ . 又  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上

连续,由介值定理知,  $\exists t \in (0,1)$ , 使  $f(t) = \frac{a}{a+b}$ .

在区间  $[0,t]$  和  $[t,1]$  上对  $f(x)$  分别应用拉格朗日中值定理, 得

$$f(t) - f(0) = f'(\xi)(t - 0), \quad \xi \in (0,t),$$

$$f(1) - f(t) = f'(\eta)(1 - t), \quad \eta \in (t,1).$$

由于  $f(0) = 0, f(1) = 1$ , 所以由以上两式可得

$$t = \frac{f(t)}{f'(\xi)} = \frac{a}{a+b} \bigg/ f'(\xi), \quad 1-t = \frac{1-f(t)}{f'(\eta)} = \frac{b}{a+b} \bigg/ f'(\eta).$$

于是,将前后两式两边分别相加,得

$$1 = \frac{a}{(a+b)f'(\xi)} + \frac{b}{(a+b)f'(\eta)},$$

即

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a+b.$$

**例 38** 设函数  $f(x)$  在  $x = x_0$  点的某一邻域内可导,且其导数  $f'(x)$  在  $x_0$  连续,而  $\alpha_n < x_0 < \beta_n (n = 1, 2, \dots)$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\alpha_n \rightarrow x_0, \beta_n \rightarrow x_0$ . 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x_0).$$

**证** 设  $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in U^\circ(x_0)$ , 则依拉格朗日中值定理,有

$$\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(\xi_n), \quad \alpha_n < \xi_n < \beta_n.$$

已知  $\xi_n \rightarrow x_0$ , 又  $f'(x)$  在  $x_0$  连续, 即  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ , 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} f'(\xi_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0).$$

**例 39** 设  $f(x)$  在  $(a,b)$  内可微,  $f'(x)$  在  $(a,b)$  内有界, 证明:  $f(x)$  在  $(a,b)$  内也有界.

**证** 因为  $f'(x)$  在  $(a,b)$  内有界, 所以  $\forall x \in (a,b), \exists M_0 > 0$ , 使  $|f'(x)| \leq M_0$ .

又由  $f(x)$  在  $(a,b)$  内可微, 必在  $(a,b)$  内连续, 则当取定  $x_0$

时,  $f(x_0)$  为一定值. 不妨设  $x_0 = \frac{a+b}{2}$ , 则  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  是定值.

任取  $x \in (a, b)$ , 且  $x \neq x_0$ , 则在  $[x, x_0]$  (或  $[x_0, x]$ ) 上,  $f(x)$  满足拉格朗日中值定理条件, 恒有

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0), \quad \xi \in (x, x_0) \text{ (或 } (x_0, x)).$$

所以

$$\begin{aligned} |f(x)| - |f(x_0)| &\leq |f(x) - f(x_0)| \\ &= |f'(\xi)| |x - x_0| \leq M_0 |b - a|. \end{aligned}$$

即

$$|f(x)| \leq \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + M_0 |b - a| = M.$$

**例 40** 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty]$  上二阶可微, 且  $f(a) > 0, f'(a) < 0$ . 当  $x > a$  时, 有  $f''(x) < 0$ . 证明: 方程  $f(x) = 0$  在  $[a, +\infty)$  内有惟一实根.

**证** 由  $f''(x) < 0$  知,  $f'(x)$  单调递减, 即当  $x > a$  时,  $f'(x) < f'(a) < 0$ , 故  $f(x)$  单调递减. 从而知  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  内至多有一个实根.

因为  $f(a), f'(a)$  均为定数, 所以  $a - \frac{f(a)}{f'(a)} > a$  且为定数, 在  $\left[a, a - \frac{f(a)}{f'(a)}\right]$  上应用拉格朗日中值定理, 得

$$\begin{aligned} f\left(a - \frac{f(a)}{f'(a)}\right) - f(a) &= f'\left(a - \theta \frac{f(a)}{f'(a)}\right) \cdot \left(-\frac{f(a)}{f'(a)}\right) \\ &< f'(a) \left(-\frac{f(a)}{f'(a)}\right) = -f(a), \end{aligned}$$

于是  $f\left(a - \frac{f(a)}{f'(a)}\right) < 0$ . 因为  $f(a) > 0$ , 故在  $\left[a, a - \frac{f(a)}{f'(a)}\right]$  内,  $f(x)$  至少有一实根.

综上所述, 命题得证.

### 三、柯西中值定理的应用

由于涉及两个函数的问题, 柯西中值定理的应用要比罗尔定理与拉格朗日中值定理的应用来得复杂. 特别要注意的是, 在一个命题中如何分离出两个恰当的函数来, 使函数既满足柯西定理条件, 又使命题的证明 (或计算) 变得简单易行. 柯西中值定理经常

要与其它定理一起使用,所以分析问题时要注意层次性.

**例 41** 设函数  $\varphi(x)$  在  $[x_1, x_2]$  上可导, 且  $x_1 x_2 > 0$ , 证明:  $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ , 使

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \varphi(x_1) & \varphi(x_2) \end{vmatrix} = \varphi(\xi) - \xi \varphi'(\xi).$$

**解** 引入辅助函数  $f(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$ . 因为  $x_1 x_2 > 0$ , 所以在  $[x_1, x_2]$  上不含  $x = 0$  的点. 显然,  $f(x), g(x)$  满足柯西中值定理条件, 故  $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ , 使

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

即 
$$\frac{\frac{\varphi(x_2)}{x_2} - \frac{\varphi(x_1)}{x_1}}{1/x_2 - 1/x_1} = \frac{\frac{\xi \varphi'(\xi) - \varphi(\xi)}{\xi^2}}{-1/\xi^2}.$$

于是 
$$\frac{1}{x_1 - x_2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \varphi(x_1) & \varphi(x_2) \end{vmatrix} = \varphi(\xi) - \xi \varphi'(\xi).$$

引入辅助函数的方法通常是: 将所证结论(等式或不等式)变形, 分析变形后的等式或不等式找出恰当的函数. 较简单的情形, 可直接选等式或不等式的一部分作为辅助函数, 或将式子的一边移到另一边作为辅助函数. 本例就是将欲证等式左边变形为

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \varphi(x_1) & \varphi(x_2) \end{vmatrix} = \left[ \frac{\varphi(x_1)}{x_1} - \frac{\varphi(x_2)}{x_2} \right] / \left[ \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right],$$

从而找出辅助函数  $f(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$ .

**例 42** 设函数  $f$  在  $x = 0$  的某邻域内  $n$  阶可导, 且  $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ . 证明:

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n, \quad \theta \in (0, 1).$$

**证** 令  $g(x) = x^n$ , 则  $f(x), g(x)$  在  $[0, x]$  上满足柯西中值定理条件, 故

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} &= \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f'(\xi_1) - f'(0)}{g'(\xi_1) - g'(0)} = \frac{f''(\xi_2)}{g''(\xi_2)} = \cdots \\ &= \frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - f^{(n-1)}(0)}{g^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - g^{(n-1)}(0)} = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{g^{(n)}(\xi_n)} = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!},\end{aligned}$$

式中  $\xi_n = \theta x \in (0, x)$ ,  $\theta \in (0, 1)$ .

即 
$$f(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n, \quad \theta \in (0, 1).$$

**例 43** 设函数  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 证明:  
 $\exists x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ , 使

$$f'(x_1) = (b+a) \frac{f'(x_2)}{2x_2} = (b^2 + ab + a^2) \frac{f'(x_3)}{3x_3^2}.$$

**证** 因为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上满足拉格朗日中值定理条件, 故  
 $\exists x_1 \in (a, b)$ , 使

$$f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \textcircled{1}$$

又令  $g(x) = x^2, h(x) = x^3$ . 对  $f(x)$  与  $g(x)$  及  $f(x)$  与  $h(x)$  分别在  $[a, b]$  上应用柯西中值定理, 得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_2)}{g'(x_2)} \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(x_2)}{2x_2}, \quad x_2 \in (a, b),$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{h(b) - h(a)} = \frac{f'(x_3)}{h'(x_3)} \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b^3 - a^3} = \frac{f'(x_3)}{3x_3^2}, \quad x_3 \in (a, b),$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = (b + a) \frac{f'(x_2)}{2x_2}, & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = (b^2 + ab + a^2) \frac{f'(x_3)}{3x_3^2}. & \textcircled{3} \end{cases}$$

比较式 ①, 式 ②, 式 ③ 知,  $\exists x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ , 使

$$f'(x_1) = (b+a) \frac{f'(x_2)}{2x_2} = (b^2 + ab + a^2) \frac{f'(x_3)}{3x_3^2}.$$

请读者尝试证明类似命题: 若函数  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $0 < a < b$ , 则  $\exists x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ , 使

$$\frac{f'(x_1)}{2x_1} = (b^2 + a^2) \frac{f'(x_2)}{4x_2^3} = \frac{\ln(b/a)}{b^2 - a^2} x^3 f'(x_3).$$

例 44 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可微, 且  $a$  与  $b$  同号, 证明:  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使

$$(1) 2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi);$$

$$(2) f(b) - f(a) = \xi \left( \ln \frac{b}{a} \right) f'(\xi).$$

证 (1) 将欲证等式变形为  $\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(\xi)}{2\xi}$  知, 需引入辅助函数  $g(x) = x^2$ . 由于  $f(x), g(x)$  在  $(a, b)$  上满足柯西中值定理条件, 所以  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(\xi)}{2\xi},$$

即  $2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi).$

(2) 将欲证等式变形为  $\frac{f(b) - f(a)}{\ln|b| - \ln|a|} = \frac{f'(\xi)}{1/\xi}$ , 知需引入辅助函数  $g(x) = \ln|x|$ . 由于  $f(x), g(x)$  在  $(a, b)$  上满足柯西中值定理条件, 所以  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{\ln|b| - \ln|a|} = \frac{f'(\xi)}{1/\xi} = \xi f'(\xi),$$

即  $f(b) - f(a) = \xi \ln \left| \frac{b}{a} \right| f'(\xi) = \xi \ln \left( \frac{b}{a} \right) f'(\xi).$

例 45 若  $f(x)$  在  $(a, +\infty)$  内可导, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + f'(x)] = 0$ , 证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

证 由式  $[f(x) + f'(x)]e^x = [f(x)e^x]'$  出发, 考虑引入辅助函数  $F(x) = f(x)e^x, g(x) = e^x$ . 显然,  $g'(x) \neq 0$ .

由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + f'(x)] = 0$ , 知  $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$ , 当  $x > X$  时, 有  $|f(x) + f'(x)| < \varepsilon$ .

对  $x > X$ , 在  $[X, x]$  上应用柯西中值定理, 得

$$\frac{F(x) - F(X)}{g(x) - g(X)} = \frac{F'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \xi \in (X, x),$$

即  $\frac{f(x) - f(X)e^{X-x}}{1 - e^{X-x}} = \frac{f(x)e^x - f(X)e^X}{e^x - e^X} = f(\xi) + f'(\xi)$

或  $|f(x)| \leq |f(X)|e^{X-x} + |f(\xi) + f'(\xi)| (1 + e^{X-x})$ .

由于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{X-x} = 0$ , 所以  $\exists X_1 > X$ , 当  $x > X_1$  时, 有  $e^{X-x} < \epsilon$  和  $e^{X-x} < 1$ . 于是,  $\forall x > X_1$ , 使

$$|f(x)| \leq |f(X)|\epsilon + 2\epsilon = (|f(X)| + 2)\epsilon,$$

即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

例 46 设  $h > 0$ , 函数  $f$  在  $[a-h, a+h]$  上可导. 证明: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h} = f'(a+\theta h) - f'(a-\theta h).$$

(2) 设函数  $g$  在点  $a$  二阶可微, 证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - 2g(a) + g(a-h)}{h^2} = g''(a).$$

证 (1) 引入辅助函数  $F(x) = f(a+x) - f(a-x)$ ,  $x \in [a, h]$ . 显然,  $F(x)$  在  $[0, h]$  上满足拉格朗日中值定理条件, 故  $\exists \xi \in (0, 1)$ , 使

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h} &= \frac{F(h) - F(0)}{h - 0} \\ &= F'(\theta h) = f'(a+\theta h) - f'(a-\theta h). \end{aligned}$$

(2) 由题设函数  $g$  在点  $a$  二阶可导知, 在  $U(x_0)$  内  $g(x)$  连续并有一阶导数, 任取  $h \in (0, \delta)$  并令

$$\begin{cases} F(x) = g(a+x) - 2g(a) + g(a-x), \\ G(x) = x^2, \end{cases} \quad x \in [0, h],$$

则  $F(x)$  和  $G(x)$  满足柯西中值定理条件, 故  $\exists \xi \in (0, h)$ , 使

$$\begin{aligned} \frac{F(h) - F(0)}{G(h) - G(0)} &= \frac{g(a+h) - 2g(a) + g(a-h)}{h^2} \\ &= \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{g'(a+\xi) - g'(a-\xi)}{2\xi}. \end{aligned}$$

而  $h \rightarrow 0$  时,  $\xi \rightarrow 0$ , 且  $g$  在  $a$  二阶可导, 故

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h) - F(0)}{G(h) - G(0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - 2g(a) + g(a-h)}{h^2}$$



$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(a + \xi) - g'(a - \xi)}{2\xi} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{g'(a + \xi) - g'(a)}{\xi} + \frac{g'(a - \xi) - g'(a)}{-\xi} \right] \\
&= \frac{1}{2} [g''(a) + g''(a)] = g''(a).
\end{aligned}$$

例 47 设函数  $f$  在  $(0, 1)$  内连续且可导, 有  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} f'(x) = 0$ , 证明:  $f$  在  $(0, 1]$  内一致连续.

证 由函数极限的局部有界性知,  $\exists M > 0$ , 和  $0 < c < 1$ . 使

$$|\sqrt{x} f'(x)| \leq M, x \in (0, c].$$

于是  $\forall x_1, x_2 \in (0, c]$ , 且  $x_1 \neq x_2$ , 依柯西中值定理,  $\exists \xi \in (x_1, x_2)$  (或  $(x_2, x_1)$ ), 有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}} = \frac{f'(\xi)}{1/(2/\sqrt{\xi})} = 2\sqrt{\xi} f'(\xi),$$

$$\text{即 } |\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}|^2 = x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} \leq |x_1 - x_2|.$$

故  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta = \min \left\{ \left( \frac{\epsilon}{2M} \right)^2, c \right\}$ , 当  $x_1, x_2 \in (0, c]$ , 且  $|x_1 - x_2| < \delta$  时, 由上面两式得到

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq 2M |\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}| \leq 2M \sqrt{|x_2 - x_1|} < \epsilon.$$

于是知  $f$  在  $(0, c]$  上一致连续. 由于  $f$  在  $(0, 1]$  上连续, 所以  $f$  在  $[c, 1]$  上连续, 从而在  $[c, 1]$  上一致连续. 于是  $f$  在  $(0, 1]$  上一致连续.

例 48 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导,  $0 < a < b$ ,  $f(a) \neq f(b)$ , 证明:  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使

$$f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta).$$

证 将欲证等式变形为  $\frac{f'(\xi)}{1}(b-a) = \frac{f'(\eta)}{2\eta}(b^2 - a^2)$  知, 要引入辅助函数  $g_1(x) = x$  和  $g_2(x) = x^2$ . 在  $[a, b]$  上分别对

$f(x), g_1(x)$  和  $f(x), g_2(x)$  应用柯西中值定理, 得

$$\begin{cases} f(b) - f(a) = \frac{f'(\xi)}{1}(b - a), & \xi \in (a, b), \\ f(b) - f(a) = \frac{f'(\eta)}{2\eta}(b^2 - a^2), & \eta \in (a, b). \end{cases}$$

即

$$f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta).$$

**例 49** 证明不等式

$$1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2} \quad (x > 0).$$

**证** 令  $f(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ ,  $g(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$ , 则上式转化为  $f(x) > g(x)$  ( $x > 0$ ). 由于  $f(0) = 0, g(0) = 0$ , 对  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $[0, x]$  上应用柯西中值定理, 得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

于是  $f(x) > g(x)$  又转化为  $f'(\xi) > g'(\xi)$ . 因为

$$\begin{aligned} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} &= \frac{\ln(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}) + \xi / \sqrt{1 + \xi^2}}{\xi / \sqrt{1 + \xi^2}} \\ &= 1 + \frac{\sqrt{1 + \xi^2} \ln(\xi + \sqrt{1 + \xi^2})}{\xi}, \end{aligned}$$

而当  $x > \xi > 0$  时,  $\frac{1}{\xi} \sqrt{1 + \xi^2} \ln(\xi + \sqrt{1 + \xi^2}) > 0$ , 所以

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} > 1 \Rightarrow f'(\xi) > g'(\xi) \Rightarrow f(x) > g(x),$$

即

$$1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}.$$

请读者尝试证明类似命题: 证明不等式

$$\arctan x - \ln(1+x^2) > \pi/4 - \ln 2, \quad x \in [1/2, 1],$$

只需设  $f(x) = \ln(1+x^2)$ ,  $g(x) = \arctan x$ , 在  $[x, 1]$  上应用柯西中值定理, 注意到  $x \in [1/2, 1]$  即可.

**例 50** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $ab > 0$ , 证明:  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使

$$\frac{ab}{b-a} \left| \begin{array}{cc} b & a \\ f(a) & f(b) \end{array} \right| = \xi^2 [f(\xi) + \xi f'(\xi)].$$

证 将欲证等式变形为

$$\frac{bf(b) - af(a)}{-1/b + 1/a} = \frac{f(\xi) + \xi f'(\xi)}{1/\xi^2},$$

知需引入辅助函数  $F(x) = xf(x)$ ,  $G(x) = -\frac{1}{x}$ , 在  $[a, b]$  上对  $F(x), G(x)$  应用柯西中值定理, 得

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{bf(b) - af(a)}{-1/b + 1/a} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f(\xi) + \xi f'(\xi)}{1/\xi^2},$$

即 
$$\frac{ab}{a-b} \left| \begin{array}{cc} b & a \\ f(a) & f(b) \end{array} \right| = \xi^2 [f(\xi) + \xi f'(\xi)].$$

例 51 设函数  $f$  在  $(-1, 1)$  内可微,  $f(0) = 0$ ,  $|f'(x)| = 1$ , 证明: 在  $(-1, 1)$  内,  $|f(x)| < 1$ .

证 引入辅助函数  $g(x) = x$ , 在  $[0, x]$  (或  $[x, 0]$ ) 上 ( $x \in (-1, 1)$ ) 应用柯西中值定理, 得

$$\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(\xi)}{1} = f'(\xi).$$

因为  $f(0) = 0, g(0) = 0$ , 且  $|f'(x)| \leq 1$ , 所以

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = |f'(\xi)| \leq 1 \Rightarrow |f(x)| \leq |x| \leq 1.$$

## 第二节 洛必达法则

### 主要内容

洛必达 (L'Hospital) 法则用于求未定式的极限. 以下七种类型的未定式可以利用洛必达法则来求:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0.$$

### 1. $\frac{0}{0}$ 型未定式 若

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0;$$

$$(2) f, g \text{ 在 } U^\circ(x_0) \text{ 内可导, 且 } g'(x) \neq 0;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{ (} A \text{ 为实数或 } \pm \infty, \infty \text{); 则}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

定理对极限过程  $x \rightarrow x_0^+, x \rightarrow x_0^-, x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$  的情形, 只要稍加修改条件(2), 也有同样的结论成立.

### 2. $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式 若

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = \infty;$$

$$(2) f, g \text{ 在 } U^+_+(x_0) \text{ 内可导, 且 } g'(x) \neq 0;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{ (} A \text{ 为实数或 } \pm \infty, \infty \text{); 则}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

定理对极限过程  $x \rightarrow x_0^-, x \rightarrow x_0, x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$  的情形, 只要稍加修改条件(2), 也有同样的结论成立.

### 3. $0 \cdot \infty$ 型未定式 若

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty;$$

化为 
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{1/g(x)};$$

则为  $\frac{0}{0}$  型未定式, 化为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{1/f(x)};$$

则为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式.

可用以上方法分别确定极限.

4.  $\infty - \infty$ 型未定式 若

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty,$$

化为  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1/g(x) - 1/f(x)}{1/(f(x)g(x))},$

则为 $\frac{0}{0}$ 型. 实际运算时,一般均可通过通分实现.

5.  $1^\infty, 0^0, \infty^0$ 型未定式 一般为幂指函数形式,即 $f(x)^{g(x)}$ 形式,通过取对数化为 $g(x)\ln f(x)$ 形式,即为 $0 \cdot \infty$ 型. 再依 $0 \cdot \infty$ 型未定式情形化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型,即可使用洛必达法则确定极限值.

## 疑难解析

1. 用洛必达法则确定未定式极限要注意哪些问题?

答 (1) 用洛必达法则计算极限之前要先确定是否 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式,或是否可转化 $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$ 型. 若不能转化,则不能使用洛比达法则;若能转化,待转化后再使用洛必达法则.

一般定理的第(3)条不进行验证,通过计算可以确定 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 是否存在.

(2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在,但仍是未定式时,可以继续使用洛必达法则. 允许在满足条件时多次使用洛必达法则.

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在,且不是未定式时,并不说明极限不存在,还有可能可用其它方法求出极限. 例如

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec x}{\tan x} \left( \frac{\infty}{\infty} \right) \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan x}{\sec x} \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \dots,$$

用洛必达法则结果反复循环,得不到极限,但

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec x}{\tan x} \stackrel{\text{化简}}{=} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1}{\sin x} = 1.$$

(3) 在使用洛必达法则之前和之中,要不断对函数进行化简,并配合其它求极限方法,使计算过程更为简捷. 例如

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \tan 7x}{\ln \tan 2x} \left( \frac{\infty}{\infty} \right) &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{7 \sec^2 7x}{\tan 7x} \bigg/ \frac{2 \sec^2 2x}{\tan 2x} \quad (\text{化简}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{7 \sin 2x \cos 2x}{2 \sin 7x \cos 7x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{7}{2} \cdot \frac{\sin 4x}{\sin 14x} \quad (\text{等价无穷小}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7}{2} \cdot \frac{4x}{14x} = 1. \end{aligned}$$

(4) 洛必达法则只是计算未定式极限一种较普遍的方法,它不是惟一的,也不一定是最简捷的,所以在使用中要认真考察. 例如

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \left( \frac{0}{0} \right) &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{\sin x} \left( \frac{0}{0} \right) \\ &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x + x(-\sin x)}{\cos x} = 2, \end{aligned}$$

但  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$  (等价无穷小代换)  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2/2} = 2$ , 则不用洛必达法而更为简单易行.

## 方法、技巧与典型例题分析

在疑难解析中,我们讲述了使用洛必达法则所应注意的问题. 而更重要的是灵活运用洛必达法则,不要墨守成规.

例 1 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + 1/x)}{\operatorname{arccot} x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x^2 - \pi^2) \sin 5x}{e^{\sin^2 x} - 1};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}.$$

解 (1) 是  $\frac{0}{0}$  型未定式, 故

$$\text{原式} \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{1+x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{x+x^2} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1+2x} = 1.$$

(2) 是  $\frac{0}{0}$  型未定式, 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\sin x [-4(\pi - 2x)]} \\ &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow \pi/2} -\frac{1}{4} \cdot \frac{-\sin x}{-2\sin x + (\pi - 2x)\cos x} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

(3) 是  $\frac{0}{0}$  型未定式, 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x + \pi)(x - \pi)\sin 5x}{e^{\sin^2 x} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2\pi(x - \pi)\sin 5x}{e^{\sin^2 x} - 1} \left(\frac{0}{0}\right) \\ &\stackrel{L'}{=} 2\pi \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x + 5(x - \pi)\cos 5x}{2\sin x \cos x e^{\sin^2 x}} \\ &\stackrel{L'}{=} 2\pi \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x + 5(x - \pi)\cos 5x}{2\sin x \cos x e^{\sin^2 x}} \\ &= 2\pi \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x + 5(x - \pi)\cos 5x}{-2\sin x} = -5\pi. \end{aligned}$$

(4) 是  $\frac{0}{0}$  型未定式, 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x(\ln x + 1) - 1}{1/x - 1} \left(\frac{0}{0}\right) \\ &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x(\ln x + 1)^2 + x^{x-1}}{-1/x^2} = -2. \end{aligned}$$

例 2 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{x^x - a^a} \quad (a > 0, x > 0); \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1 + 2x)^{1/2}}{\ln(1 + x^2)}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \sin x}{\arctan x - \tan x}.$$

解 (1) 原式  $\left(\frac{0}{0}\right) \xrightarrow{L'} \lim_{x \rightarrow a} \frac{ax^{a-1} - a^x \ln a}{x^x (\ln x + 1)}$  (代入)

$$= \frac{aa^{a-1} - a^a \ln a}{a^a (\ln a + 1)} = \frac{1 - \ln a}{1 + \ln a}.$$

(2) 原式  $\left(\frac{0}{0}\right) \xrightarrow{L'} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x e^{\sin x}}{1 - \cos x} \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\xrightarrow{L'} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos^2 x e^{\sin x} + \sin x e^{\sin x}}{\sin x} \quad (\text{化简})$$

$$= 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos^2 x e^{\sin x}}{\sin x} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xrightarrow{L'} 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + (\sin 2x - \cos^2 x) e^{\sin x}}{\cos x}$$

$$= 1 + 0 = 1.$$

(3) 原式  $\left(\frac{0}{0}\right) \xrightarrow{L'} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1 + 2x)^{-1/2}}{2x/(1 + x^2)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^2}{2} \cdot \frac{e^x - (1 + 2x)^{-1/2}}{x}$$

$$\xrightarrow{L'} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} e^x + (1 + 2x)^{-3/2} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

(4) 原式  $\left(\frac{0}{0}\right) \xrightarrow{L'} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/\sqrt{1-x^2} - \cos x}{1/(1+x^2) - \sec^2 x}$  (化简)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)\cos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}\cos x}{\cos^2 x - 1 - x^2} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xrightarrow{L'} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\cos x / \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} \cdot \sin x}{-\sin 2x - 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\cos x + (1-x^2)\sin x}{\sin 2x + 2x} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xrightarrow{L'} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x\sin x + (1-x^2)\cos x - 2x\sin x}{2\cos 2x + 2}$$

$$= -\frac{1+1}{2+2} = -\frac{1}{2}.$$



例 3 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1 - x)^{n-1}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x - x^4} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[4]{x^3}}.$$

解 (1) 是  $\frac{0}{0}$  型未定式. 先分解因式再求极限, 有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x} \cdots \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[n]{x}}{1 - x} \\ &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2\sqrt{x}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdots \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{原式} \left( \frac{0}{0} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2 - 4x^3)/(2\sqrt{2x - x^4}) - 1/(3\sqrt[3]{x^2})}{-3/(4\sqrt[4]{x})} \\ &= \frac{-2/2 - 1/3}{-3/4} = \frac{16}{9}. \end{aligned}$$

例 4 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a + be^x)}{\sqrt{a + bx^2}}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2x \arctan x / \pi}{e^x + x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \tan 7x}{\ln \tan 2x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \text{原式} \left( \frac{\infty}{\infty} \right) &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{be^x}{a + be^x} \bigg/ \frac{2bx}{2\sqrt{a + bx^2}} \\ &= 1 \bigg/ \frac{b}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{原式} \left( \frac{\infty}{\infty} \right) &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2 \arctan x / \pi - 2x[\pi(1 + x^2)]}{e^x - 1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{原式} \left( \frac{\infty}{\infty} \right) &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/(\tan 7x) \cdot \sec^2 7x \cdot 7}{1/(\tan 2x) \cdot \sec^2 2x \cdot 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{7}{2} \frac{\tan 2x}{\tan 7x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{7}{2} \cdot \frac{2x}{7x} = 1. \end{aligned}$$

例 5 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{100}} e^{-1/x^2}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu}{e^{\lambda x}} \quad (\mu > 0, \lambda > 0).$$

解 (1) 作变量代换  $u = \frac{1}{x^2}$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时,  $u \rightarrow +\infty$ , 于是

$$\begin{aligned} \text{原式} \left( \frac{0}{0} \right) &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^{50}}{e^u} \stackrel{L'}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{50u^{49}}{e^u} \left( \frac{\infty}{\infty} \right) \\ &\stackrel{L'}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{50 \cdot 49u^{48}}{e^u} \stackrel{L'}{=} \dots \stackrel{L'}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{50!}{e^u} = 0. \end{aligned}$$

$$(2) \text{原式} \left( \frac{\infty}{\infty} \right) \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x n x^{n-1}} = 0.$$

此题说明: 当  $x \rightarrow +\infty$  时, 幂函数  $x^n$  是对数函数  $\ln x$  的高阶无穷大.

(3) 当  $\mu$  为正整数时, 有

$$\begin{aligned} \text{原式} \left( \frac{\infty}{\infty} \right) &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x^{\mu-1}}{\lambda e^{\lambda x}} \left( \frac{\infty}{\infty} \right) \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu(\mu-1)x^{\mu-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}} \left( \frac{\infty}{\infty} \right) \\ &\stackrel{L'}{=} \dots \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu}{\lambda^\mu e^{\lambda x}} = 0. \end{aligned}$$

当  $\mu$  不是正整数, 但  $[\mu] < \mu < [\mu] + 1$ . 易见

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{[\mu]}}{e^{\lambda x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{[\mu]+1}}{e^{\lambda x}} = 0.$$

由迫敛性,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu}{e^{\lambda x}} = 0$ . 所以, 当  $\lambda > 0, \mu > 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu}{e^{\lambda x}} = 0$ .

此极限说明, 当  $x \rightarrow +\infty$  时, 指数函数  $e^{\lambda x} (\lambda > 0)$  是幂函数  $x^\mu (\mu > 0)$  的高阶无穷大.

例 6 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \cot^2 x - \frac{1}{x^2} \right); \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解 (1) 原式} (\infty - \infty) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cot^2 x - 1}{x^2} \left( \frac{0}{0} \right) \\ &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cot^2 x - x^2 2 \cot x - \csc x}{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x \sin x - x \cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin x - x}{x^3} \left( \frac{0}{0} \right) \\
&\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x + \cos^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2 x}{3x^2} \\
&= -2/3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \text{ 原式 } (\infty - \infty) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} \left( \frac{0}{0} \right) \\
&\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-1/x}{\ln x + (x-1)/x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x\ln x + x-1} \left( \frac{0}{0} \right) \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

例 7 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \left( 1 + \frac{2}{x} \right) e^{1/x} - 1 \right];$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan 3x^2 \right) \cdot x^2.$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } (1) \text{ 原式 } (0 \cdot \infty) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+2/x)e^{1/x} - 1}{1/x} \left( \frac{0}{0} \right) \\
&\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^{1/x}(3/x^2 + 2/x^3)}{-1/x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} \cdot \left( 3 + \frac{2}{x} \right) = 3e^0 = 3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \text{ 原式 } (0 \cdot \infty) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi/2 - \arctan 3x^2}{1/x^2} \left( \frac{0}{0} \right) \\
&\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x/(1+3x^2)^2}{-2/x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4}{1+3x^4} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

例 8 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x-1)}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{1/x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3x^x)^{1/x}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x^{\ln(1-x)}.$$

解 幂指函数  $f(x)^{g(x)}$  为  $0^0, 1^\infty, \infty^0$  型未定式时, 求极限时要  
用取对数方法, 化为  $0 \cdot \infty$  型再化为  $\frac{0}{0}$  型或  $\frac{\infty}{\infty}$  型, 用洛比达法则求  
出极限. 但是, 在书写上有两种形式.

一种是写成  $\lim f(x)^{\varphi(x)} = \lim e^{\varphi(x)\ln f(x)} = e^{\lim \varphi(x)\ln f(x)}$  的形式,再将其化为  $e^{\lim \ln f(x)/\frac{1}{\varphi(x)}}$ , 求出极限.

一种是写成  $\lim \varphi(x)\ln f(x) = \lim \frac{\ln f(x)}{1/\varphi(x)}$  后,再写成  $\lim f(x)^{\varphi(x)} = e^{\lim \varphi(x)\ln f(x)}$  的形式.

相比之下,后一种写法看起来简单明了.

$$\begin{aligned} (1) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x - 1)\ln x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{x\ln x} - 1)\ln x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x\ln x} - 1}{x\ln x} x\ln^2 x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x\ln^2 x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 x}{1/x} \left( \frac{0}{0} \right) \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\ln x \cdot 1/x}{-1/x^2} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \left( \frac{\infty}{\infty} \right) \stackrel{L'}{=} -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x-1)} = e^0 = 1.$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right) &\left( \frac{\infty}{\infty} \right) \\ &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi/2 - \arctan x} \left( \frac{-1}{1+x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1/(1+x^2)}{\pi/2 - \arctan x} \left( \frac{0}{0} \right) \\ &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x/(1+x^2)^2}{-1/(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{1/x} = e^0 = 1.$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(x + 3^x) &\left( \frac{\infty}{\infty} \right) \\ &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 3^x} (1 + 3^x \ln 3) \left( \frac{\infty}{\infty} \right) \\ &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \ln^2 3}{1 + 3^x \ln 3} = \ln 3, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3^x)^{1/x} = e^{\ln 3} = 3.$$

$$(4) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1-x)\ln \tan x \quad (0 \cdot \infty)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \tan x}{1/\ln(1-x)} \left( \frac{\infty}{\infty} \right) \\
&\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/\tan x - 1/\cos^2 x}{1/[(1-x)\ln^2(1-x)]} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2(1-x)}{\sin x} \left( \frac{0}{0} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-1)2\ln(1-x)}{(1-x)\cos x} = 0, \\
\text{所以} \quad &\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x^{\ln(1-x)} = e^0 = 1.
\end{aligned}$$

例 9 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{1/x}, \quad a > 0, b > 0, c > 0.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{n/x}, \quad a_1 > 0, a_2 > 0, \cdots, a_n > 0.$$

解 (1) 因为

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left( \frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a^x + b^x + c^x) - \ln 3}{x} \left( \frac{0}{0} \right) \\
&\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a + b^x \ln b + c^x \ln c}{a^x + b^x + c^x} \\
&= \frac{\ln a + \ln b + \ln c}{3} = \ln \sqrt[3]{abc},
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{1/x} = e^{\ln \sqrt[3]{abc}} = \sqrt[3]{abc}.$$

(2) 因为

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{n}{x} \ln \left( \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right) \left( \frac{0}{0} \right) \\
&\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n}{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x} \cdot \frac{a_1^x \ln a_1 + \cdots + a_n^x \ln a_n}{n} \\
&= \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n = \ln(a_1 a_2 \cdots a_n),
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{n/x} = e^{\ln(a_1 a_2 \cdots a_n)} = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

例 10 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \arctan \frac{n+1}{n} - \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{n^2+1};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+1/n)}{\operatorname{arccot} n}.$$

解 对数列  $\{x_n\}$  的情形, 若把  $x_n$  看作整标函数  $f(n)$ , 则  $f(n)$  是  $f(x)$  的特殊取法. 因此, 可先求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , 再令  $x = n$ , 得  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ .

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \arctan \frac{x+1}{x} - \frac{\pi}{4} \right) / \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \left( \frac{0}{0} \right) \\ &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 / \left[ 1 + \left( \frac{x+1}{x} \right)^2 \right] \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right)}{-x / \sqrt{(x^2+1)^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{x(2x^2+2x+1)} \left( \frac{\infty}{\infty} \right) \\ &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x \sqrt{x^2+1}}{6x^2+4x+1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

所以 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \arctan \frac{n+1}{n} - \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{n^2+1} = \frac{1}{2}.$$

(2) 因为

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+1/x)}{\operatorname{arccot} x} \left( \frac{0}{0} \right) \\ &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x/(1+x)(-1/x^2)}{-1/(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{x+x^2} = 1, \end{aligned}$$

所以 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+1/n)}{\operatorname{arccot} n} = 1.$$

在以上的例题中, 我们在使用洛必达法则的同时, 还使用了两个重要极限、等价无穷小代换、变量代换、有理分式函数时  $\infty$  的次数比等方法, 从而迅速得出结果. 这就要求读者熟练掌握求极限的各种方法和综合运用能力.

例 11 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+ce^x)}{\sqrt{1+cx^2}} = 4$ , 确定  $c$ .

解 是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式,依洛必达法则,有

$$\begin{aligned}\text{原式} & \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ce^x}{1+ce^x} \bigg/ \frac{cx}{\sqrt{1+cx^2}} \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ce^x}{1+ce^x} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+cx^2}}{cx} \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{e^{-c}+c} \cdot \frac{\sqrt{c}}{c} = \frac{1}{\sqrt{c}},\end{aligned}$$

所以 
$$\frac{1}{\sqrt{c}} = 4 \Rightarrow c = \frac{1}{16}.$$

例 12 设  $f(x) = x^3 + \ln(1-x^3)$ ,  $g(x) = Ax^n$ . 若当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  与  $g(x)$  是等价无穷小.

解 由题设,得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} \left( \frac{0}{0} \right) & \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + \ln(1-x^3)}{Ax^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 3x^2/(1-x^3)}{nAx^{n-1}} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x^5}{Anx^{n-1}(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3}{Anx^{n-6}} = 1.\end{aligned}$$

故知 
$$n = 6, \quad An = -3 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}.$$

例 13 设函数  $f(x)$  在点  $x=a$  的邻域内有连续的二阶导数, 且  $f'(a) \neq 0$ , 证明:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{1}{f(x) - f(a)} - \frac{1}{(x-a)f'(a)} \right] = -\frac{f''(a)}{2[f'(a)]^2}.$$

证 是 $\infty - \infty$ 型的未定式,故

$$\begin{aligned}\text{原式} & = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)f'(a) - [f(x) - f(a)]}{[f(x) - f(a)](x-a)f'(a)} \left( \frac{0}{0} \right) \\ & \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(a) - f'(x)}{f'(x)(x-a)f'(a) + [f(x) - f(a)]f'(a)} \left( \frac{0}{0} \right) \\ & \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{-f''(x)}{f''(x)(x-a)f'(a) + 2f'(x) + f'(a)} \\ & = \frac{f''(a)}{2[f'(a)]^2}.\end{aligned}$$

例 14 证明:若函数  $f(x)$  在点  $x$  有二阶导数,则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

证 先应用洛必达法则,再依导数定义,有

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \left( \frac{0}{0} \right) \\ & \stackrel{L'}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} \\ & = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + \frac{f'(x-h) - f'(x)}{-h} \right] \\ & = \frac{1}{2} [f''(x) + f''(x)] = f''(x). \end{aligned}$$

例 15 设函数  $y = f(x)$  的二阶导数连续,且  $f''(x) > 0$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$ . 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(u)}{uf(x)}$ , 其中  $u$  是曲线  $y = f(x)$  上点  $P(x, f(x))$  处的切线在  $x$  轴上的截距.

解 (1) 先求  $u$  的表达式. 由题设  $f''(x) > 0$  知,  $f'(x)$  是严格单调增加函数. 又由  $f'(0) = 0$  知,  $x \neq 0$  时,  $f'(x) \neq 0$ . 曲线  $y = f(x)$  在点  $P(x, f(x))$  的切线方程为  $Y - f(x) = f'(x)(X - x)$ , 当  $Y = 0$  时, 即得切线在  $x$  轴上的截距:  $u = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ .

(2) 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{u}$ . 因为利用洛必达法则, 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} u &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{f'(x)} \left( \frac{0}{0} \right) \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{f''(x)} = - \frac{f'(0)}{f''(0)} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{f(x)}{xf'(x)} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{xf'(x)} \left( \frac{0}{0} \right) \\ & \stackrel{L'}{=} 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{f'(x) + xf''(x)} \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)/x}{f'(x)/x + f''(x)} \end{aligned}$$



$$= 1 - \frac{f''(0)}{f''(0) + f''(0)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(3) 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(u)}{f(x)}$ . 应用洛必达法则, 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(u)}{f(x)} \left( \frac{0}{0} \right) &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(u)(x - f(x)/f'(x))'}{f'(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(u) \left\{ 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right\}}{f'(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(u)f(x)f''(x)}{[f'(x)]^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ f''(x) \cdot \frac{f(x)}{xf'(x)} \cdot \frac{f'(u)/u}{[f'(x)/x]^2} \cdot \frac{u}{x} \right\} \\ &= f''(0) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(0)}{[f''(0)]^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

综上所述, 最后得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(u)}{uf(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{u} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(u)}{f(x)} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

### 第三节 泰勒公式

#### 主要内容

1. 泰勒定理 若函数  $f$  满足下列条件:

- (1) 在闭区间  $[a, b]$  上函数  $f$  有直到  $n$  阶的连续导数,
- (2) 在开区间  $(a, b)$  内函数  $f$  有  $n + 1$  阶导数,

则对任何  $x, x_0 \in (a, b)$ , 至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

泰勒定理又称为泰勒中值定理. 等式称为函数  $f$  在  $x_0$  的泰勒公式.

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

称为  $f$  在  $x_0$  的泰勒多项式.

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$  称为  $f$  在  $x_0$  处泰勒公式的余项.  $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ ,  $0 < \theta < 1$ .

2. 当  $n = 0$  时, 泰勒定理即拉格朗日中值定理.

3. 泰勒公式在  $x_0 = 0$  时称麦克劳林(Maclaurin)公式.

4. 带皮亚诺(Peano)型余项的泰勒公式 若函数  $f$  满足

(1) 在点  $x_0$  的某邻域  $U(x_0)$  有直到  $n - 1$  阶的连续导数,

(2)  $f^{(n)}(x_0)$  存在,

$$\text{则 } f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), x \in U(x_0).$$

5. 常用的初等函数的麦克劳林公式

$$(1) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1};$$

$$(2) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}};$$

$$(3) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \sin\left(\theta x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(4) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + (-1)^{m+1} \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \cos(\theta x);$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad (1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 \\
 &+ \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \\
 &+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{\theta-n-1},
 \end{aligned}$$

其中  $0 < \theta < 1$ .

## 疑 难 解 析

### 1. 怎样理解泰勒公式的意义?

答 泰勒公式的意义是,用一个  $n$  次多项式来逼近函数  $f$ . 而多项式具有形式简单,易于计算等优点.

泰勒公式由  $f(x)$  的  $n$  次泰勒多项式  $P_n(x)$  和余项  $R_n(x) = o[(x-x_0)^n]$  组成,我们来详细讨论它们.

当  $n=1$  时,有

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

是  $y=f(x)$  的曲线在点  $(x_0, f(x_0))$  处的切线(方程),称为曲线  $y=f(x)$  在点  $(x_0, f(x_0))$  的一次密切. 显然,切线与曲线的差异是较大的,只是曲线的近似.

当  $n=2$  时,有

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

是曲线  $y=f(x)$  在点  $(x_0, f(x_0))$  的“二次切线”,也称曲线  $y=f(x)$  在点  $(x_0, f(x_0))$  的二次密切. 可以看出,二次切线与曲线的接近程度比切线要好.

当次数越来越高时,接近程度越来越密切,近似程度也越来越高.

### 2. 泰勒公式的余项有哪些类型?它们各有什么作用?

答 泰勒公式的余项分为两类,一类是定性的,一类是定量的,

它们的本质相同,但性质各异.定性的余项如皮亚诺型余项  $o((x-x_0)^n)$ ,仅表示余项是比  $(x-x_0)^n$  (当  $x \rightarrow x_0$  时) 高阶的无穷小.如  $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ ,表示当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sin x$  用  $x - \frac{x^3}{6}$  近似,误差(余项)是比  $x^3$  高阶的无穷小.定量的余项如拉格朗日型余项  $\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$  ( $\xi$  也可写成  $x_0 + \theta(x-x_0)$ ),柯西型余项(如在某些函数的幂级数展开时用).定量的余项一般用于函数值的计算与函数性态的研究.

## 方法、技巧与典型例题分析

泰勒公式常用于近似计算、极限计算、不等式与等式证明及某些命题的证明.

### 一、利用泰勒公式计算极限

利用泰勒公式求极限,一般用麦克劳林公式形式,并采用皮亚诺型余项.当极限式为分式时,一般要求分子分母展成同一阶的麦克劳林公式,通过比较求出极限.

例 1 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^4}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2 + 1 - \sqrt{1+x^2}}{x^2 \sin x^2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^3(2x)}{x^4} \left( 1 - \frac{x}{e^x - 1} \right);$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{\sin^4 x}.$$

解 (1) 因为当  $x \rightarrow 0$  时,有

$$e^{-x^2/2} = 1 + \left( -\frac{1}{2}x^2 \right) + \frac{1}{2!} \left( -\frac{1}{2}x^2 \right)^2 + o(x^4),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4),$$

$$\text{所以 } e^{-x^2/2} - \cos x = \frac{1}{\epsilon}x^4 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) = \frac{1}{12}x^4 + o(x^4),$$

故 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4/12 + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{12} + \frac{o(x^4)}{x^4} \right] = \frac{1}{12}.$$

(2) 当  $x \rightarrow 0$  时, 有  $\sqrt{1+x^4} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2 + 1 - \sqrt{1+x^4}}{x^2 \sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^4/8 + o(x^4)}{x^2 \cdot x^2} = -\frac{1}{8}.$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^3(2x)} \cdot \frac{8\sin^3(2x)}{(2x)^3} \cdot \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 8 \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}. \end{aligned}$$

因为  $x \rightarrow 0$  时,  $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^3(2x)}{x^4} \left( 1 - \frac{x}{e^x - 1} \right) = 8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2 + o(x^2)}{x(x + o(x))} = 4.$$

(4) 当  $x \rightarrow 0$  时, 有

$$\begin{aligned} \cos(\sin x) &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{24}\sin^4 x + o(\sin^4 x) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left[ x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{24} \left[ x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right]^4 + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4), \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

故 
$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^4/24 - x^4/24 + o(x^5)}{\sin^4 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4/6 + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

例 2 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{1/x} - \sqrt{x^6 + 1} \right];$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right]; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x+x^2} - 1}{e^x - 1};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^6} [\cos^2 x \sin^2 x - x^2(1 - x^2)^{4/3}].$$

解 (1) 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ , 有

$$e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

$$\sqrt{x^6 + 1} = x^3 \left(1 + \frac{1}{x^6}\right)^{1/2} = x^3 + \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

所以 
$$\begin{aligned} & \left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right) e^{1/x} - \sqrt{x^6 + 1} \\ &= \frac{1}{6} + x^3 \cdot o\left(\frac{1}{x^3}\right) + \frac{5}{12x} + \frac{1}{12x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} \cdot o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ & \quad + \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right). \end{aligned}$$

故 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right) e^{1/x} - \sqrt{x^6 + 1} \right] = \frac{1}{6}.$$

(2) 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ , 有

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

故 
$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - x + \frac{1}{2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{4x^2} - x^2 \cdot o\left(\frac{1}{x^4}\right) \right] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(3) 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sqrt[3]{1+x+x^2} = 1 + \frac{1}{3}(x+x^2) + o(x)$ ,  $e^x = 1 + x + o(x)$ . 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x+x^2} - 1}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+x^2)/3 + o(x)}{x + o(x)} = \frac{1}{3}.$$

(4) 当  $x \rightarrow 0$  时, 有

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2!}(2x)^2 + \frac{1}{4!}(2x)^4 - \frac{1}{6!}(2x)^6 + o((2x)^7) \right], \end{aligned}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2!}(2x)^2 + \frac{1}{4!}(2x)^4 - \frac{1}{6!}(2x)^6 + o((2x)^7) \right].$$

故  $\cos^2 x \sin^2 x = x^2 - \frac{4}{3}x^4 + \frac{32}{45}x^6 + o(x^7),$

$$\begin{aligned} x^2(1 - x^2)^{4/3} &= x^2 \left[ 1 + \frac{4}{3}(-x^2) + \frac{2}{9}(-x^2)^2 + o(x^4) \right] \\ &= x^2 - \frac{4}{3}x^4 + \frac{2}{9}x^6 + o(x^6). \end{aligned}$$

所以 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^6} \left[ \left( \frac{32}{45} - \frac{2}{9} \right) x^6 + o(x^6) \right] = \frac{22}{45}.$

例 3 确定常数  $\lambda$  和  $\mu$ , 使

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{1 - x^2} - \lambda x - \mu) = 0.$$

解 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ , 有

$$\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^3}} = 1 - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

故 原式  $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ -\sqrt[3]{1 - 1/x^3} - \lambda - \frac{\mu}{x} \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ -1 + \frac{1}{3x^3} - \lambda - \frac{\mu}{x} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ (-1 - \lambda) - \frac{\mu}{x} + \frac{1}{3} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right].$$

要使左边 = 右边, 则  $-1 - \lambda = 0, \mu = 0$ , 于是  $\lambda = -1, \mu = 0$ .

例 4 设函数  $f$  在  $x = 0$  的某邻域内有二阶导数, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)^{1/x} = e^3,$$

求  $f(0), f'(0), f''(0)$  及  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{f(x)}{x} \right)^{1/x}.$

解 由题设条件知, 有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\theta x)}{2}x^2 (0 < \theta < 1).$$

$$\begin{aligned} \text{又由} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)^{1/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + \left( x + \frac{f(x)}{x} \right) \right]^{\frac{1}{x+f(x)/x} \cdot \frac{x+f(x)/x}{x}} = e^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{知} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[ x + \frac{f(x)}{x} \right] \frac{1}{x} = 3, \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(0)}{x} + f'(0) + \frac{f''(\theta x)}{2} x^2 \right] = 0.$$

$$\text{知} \quad f(0) = 0, f'(0) = 0, f(x) = \frac{f''(\theta x)}{2} x^2 \quad (0 < \theta < 1).$$

$$\begin{aligned} \text{又由} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left[ x + \frac{f(x)}{x} \right] \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + \frac{f(0)}{x^2} + \frac{f'(0)}{x} + \frac{f''(\theta x)}{2} \right] = 3, \end{aligned}$$

$$\text{知} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f''(\theta x) = 4 \Rightarrow f''(0) = 4.$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{f(x)}{x} \right)^{1/x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{f(x)}{x} \right)^{x/f(x) \cdot f(x)/x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{f(x)}{x} \right)^{x/f(x) \cdot f''(\theta x)x^2/2x^2} \\ &= e^{1/2} = e^2. \end{aligned}$$

## 二、函数的泰勒展开式或麦克劳林展开式

求函数的展开式,关键是求出高阶导数并写出余项,这项工作比较麻烦,可以用前面求高阶导数的知识、方法和技巧来完成.更多的是用间接展开法,利用已知展开式和四则运算、导数等运算来完成,这样就比较简单.

**例 5** 求在点  $x = 4$  的  $f(x) = x^4 - 5x^3 - x^2 - 3x + 4$  的泰勒多项式.

$$\text{解} \quad \text{因为} \quad f(4) = -56,$$

$$f'(4) = (4x^3 - 15x^2 - 2x - 3) \Big|_{x=4} = 21,$$



$$f''(4) = (12x^2 - 30x - 2) \Big|_{x=4} = 74,$$

$$f'''(4) = (24x - 30) \Big|_{x=4} = 66, \quad f^{(4)}(4) = 24,$$

所以

$$\begin{aligned} & x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4 \\ &= -56 + 21(x-4) + 37(x-4)^2 \\ & \quad + 11(x-4)^3 + (x-4)^4. \end{aligned}$$

例 6 求函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  在  $x_0 = -1$  的  $n$  阶泰勒公式.

解 因为  $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$ ,  $f^{(n)}(-1) = -n!$ , 所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= -[1 + (x+1) + (x+1)^2 + \cdots + (x+1)^n] \\ & \quad + \frac{(-1)^{n+1}}{\xi^{n+2}}(x+1)^{n+1}, \quad -1 < \xi < x. \end{aligned}$$

例 7 求下列函数的  $n$  阶泰勒公式:

- (1)  $xe^x, x_0 = 0$ ; (2)  $\sin x, x_0 = \frac{\pi}{4}$ ;  
(3)  $\arctan x, x_0 = 0$ ; (4)  $\arcsin x, x_0 = 0$ .

解 (1) 因为  $f^{(n)} = e^x(k+x)$ , 所以

$$\begin{aligned} xe^x &= f(0) + f'(0) + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + R_n(x) \\ &= x + x^2 + \frac{1}{2!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^n + \frac{(n+1+\theta x)}{(n+1)!}e^{\theta x}x^{n+1}, \\ & \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

(2) 因为  $f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$ , 所以

$$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{cases} (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2}, & n = 2k, \\ (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2}, & n = 2k+1, \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ 1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \right]$$

$$-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n} \\ +\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}\right)\Big].$$

(3) 因为  $y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$  ( $y = \arctan x$ ),  
 $y^{(2n)}(0) = 0$ ,  $y^{(2n+1)}(0) = (-1)^n(2n)!$ ,

所以  $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$ .

(4) 因为  $y^{(2n)} = 0$ ,  $y^{(2n+1)}(0) = [(2n-1)!!]^2$ , 所以

$$\arcsin x = x + \frac{1}{3} \frac{1}{2!!} x^3 + \frac{1}{5} \frac{3!!}{4!!} x^5 \\ + \frac{1}{2n+1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

例 8 给定下列一般项的趋向于零的序列, 求出它的一个等价无穷小量.

$$(1) \alpha_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1; \quad (2) \alpha_n = 1 - n \sin \frac{1}{n}.$$

解 (1) 利用泰勒公式.

$$\alpha_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ = \left[1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] - 1 \\ = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故  $\{\alpha_n\}$  的等价无穷小量为  $\left\{\frac{1}{12n^2}\right\}$ .

$$(2) \alpha_n = 1 - n \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{3!n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] = \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故  $\{\alpha_n\}$  的等价无穷小量为  $\left\{\frac{1}{6n^2}\right\}$ .

### 三、证明不等式或等式及其它

例 9 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin(2\pi e n!) = 2\pi$ .

证 由泰勒公式, 有

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta_n}, \quad 0 < \theta_n < 1,$$

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} e^{\theta_{n+1}}, \quad 0 < \theta_{n+1} < 1.$$

将上述两式两边相减,得

$$\frac{1}{(n+1)!} e^{\theta_n} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} e^{\theta_{n+1}},$$

或 
$$e^{\theta_n} = 1 + \frac{1}{(n+2)} e^{\theta_{n+1}}.$$

由 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\theta_n} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+2)} e^{\theta_{n+1}} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0,$$

故 
$$\begin{aligned} 2\pi e n! &= 2\pi \left( 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta_n} \right) n! \\ &= 2\pi k + \frac{2\pi}{(n+1)} e^{\theta_n}, \quad k = n! \left( 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right). \end{aligned}$$

则 
$$\begin{aligned} n \sin(2\pi e n!) &= n \sin \frac{2\pi}{n+1} e^{\theta_n} \\ &= 2\pi \frac{n}{n+1} e^{\theta_n} \sin \left( \frac{2\pi}{n+1} e^{\theta_n} \right) / \left( \frac{2\pi}{n+1} e^{\theta_n} \right), \end{aligned}$$

于是 
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi e n!) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi e^{\theta_n} \frac{n}{n+1} \sin \left( \frac{2\pi}{n+1} e^{\theta_n} \right) / \left( \frac{2\pi}{n+1} e^{\theta_n} \right) \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

**例 10** 用泰勒公式证明:

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

**证** 设  $f(x) = x^2$ , 则

$$f'(x) = 2x, \quad f''(x) = 2 > 0,$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2,$$

即 
$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

取  $x = a$ , 得  $a^2 \geq x_0^2 + 2x_0(a - x_0),$

$x = b$ , 得  $b^2 \geq x_0^2 + 2x_0(b - x_0),$

$x = c$ , 得  $c^2 \geq x_0^2 + 2x_0(c - x_0).$

将不等式两边相加,得

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3x_0^2 + 2x_0(a + b + c) - 6x_0^2.$$

取  $x_0 = \frac{1}{3}(a + b + c)$ , 则  $x_0$  在  $a, b, c$  之间, 故

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3x_0^2 = 3\left(\frac{a + b + c}{3}\right)^2,$$

即 
$$\frac{a + b + c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}.$$

例 11 设  $f(x)$  有二阶导数, 且

$$f(x) \leq \frac{1}{2}[f(x - h) + f(x + h)],$$

试证:  $f''(x) \geq 0$ .

证 由泰勒公式, 有

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + o(h^2),$$

$$f(x - h) = f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + o(h^2).$$

将二式相加再除以  $h^2$ , 利用题设条件, 即得

$$f''(x) + o(1) \geq 0.$$

令  $h \rightarrow 0$ , 取极限得  $f''(x) \geq 0$ .

例 12 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有二阶导数, 且  $f'(a) = f'(b) = 0$ , 证明:  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使

$$|f''\xi| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

证 将  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  分别在点  $a$  和点  $b$  展成泰勒公式, 考虑到  $f'(a) = f'(b) = 0$ , 有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2, \quad a < \xi_1 < \frac{a+b}{2},$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2, \quad \frac{a+b}{2} < \xi_2 < b.$$

将第二式减去第一式,得

$$f(b) - f(a) + \frac{1}{8}[f''(\xi_2) - f''(\xi_1)](b-a)^2 = 0,$$

故 
$$\frac{4|f(b) - f(a)|}{(b-a)^2} \leq \frac{1}{2}(|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|) \leq |f''(\xi)|.$$

$$f''(\xi) = \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}.$$

**例 13** 设  $f(x)$  在  $U(x_0)$  内有四阶导数, 且  $|f^{(4)}(x)| \leq M$ ,  $M > 0$ . 又  $x_1 = x_0 - h, x_2 = x_0 + h$ , 证明:

$$\left| f''(x_0) - \frac{f(x_1) - 2f(x_0) + f(x_2))}{h^2} \right| \leq \frac{1}{12}Mh^2.$$

**证** 将  $f(x_1)$  和  $f(x_2)$  分别在点  $x_0$  展开, 得

$$\begin{aligned} f(x_i) &= f(x_0) + f'(x_0)(x_i - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_i - x_0)^2 \\ &\quad + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x_i - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_i)}{4!}(x_i - x_0)^4, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

则 
$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 \\ &\quad - \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{24}h^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_2) &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_2)}{24}h^4, \\ x_1 &< \xi_1 < x_0, \quad x_0 < \xi_2 < x_2. \end{aligned}$$

将二式相加, 得

$$\begin{aligned} f(x_1) + f(x_2) &= 2f(x_0) + f''(x_0)h^2 \\ &\quad + \frac{h^4}{24}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)], \end{aligned}$$

所以 
$$\begin{aligned} \left| f''(x_0) - \frac{f(x_1) - 2f(x_0) + f(x_2))}{h^2} \right| \\ \leq \frac{h^2}{24}[|f^{(4)}(\xi_1)| + |f^{(4)}(\xi_2)|] \leq \frac{1}{12}Mh^2. \end{aligned}$$

**例 14** 设函数  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上二阶可导, 且  $|f(x)| \leq 1$ ,

$|f''(x)| \leq 1$ , 证明: 在  $[0, 1]$  上必有  $|f'(x)| \leq 2$ .

证 将  $f(2), f(0)$  在任意点  $x \in [0, 2]$  展开, 有

$$f(2) = f(x) + f'(x)(2-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(2-x)^2, \quad \xi_1 \in (x, 2),$$

$$f(0) = f(x) + f'(x)(-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(-x)^2, \quad \xi_2 \in (0, x).$$

$$\text{故 } f(2) - f(0) = 2f'(x) - \frac{1}{2}x^2f''(\xi_2) + \frac{1}{2}(2-x)^2f''(\xi_1).$$

因为  $|f(x)| \leq 1, |f''(x)| \leq 1$ , 所以

$$\begin{aligned} 2|f'(x)| &\leq |f(2)| + |f(0)| + \frac{x^2}{2}|f''(\xi_2)| \\ &\quad + \frac{1}{2}(2-x)^2|f''(\xi_1)| \\ &\leq 2 + \frac{1}{2}[x^2 + (2-x)^2]. \end{aligned}$$

又, 函数  $g(x) = 2 + \frac{1}{2}[x^2 + (2-x)^2]$  在  $x=0$  和  $x=2$  取得最大值  $g(0) = g(2) = 4$ , 故

$$2|f'(x)| \leq 4 \Rightarrow |f'(x)| \leq 2.$$

例 15 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有二阶导数, 且  $f(0) = f(1) = 0$ ,  $\min\{f(x) | x \in [0, 1]\} = -1$ , 证明:  $\exists \xi \in (0, 1)$ , 使得  $f''(\xi) \geq 8$ .

证 设有  $f(x_0) = -1, x_0 \in (0, 1)$ , 且  $f'(x_0) = 0$ .

将  $f(0)$  与  $f(1)$  分别在  $x_0$  展开, 得

$$f(0) = 0 = -1 + \frac{f''(\xi_1)}{2!}x_0^2 \Rightarrow f''(\xi_1) = \frac{2}{x_0^2}, \quad 0 < \xi_1 < x_0,$$

$$\begin{aligned} f(1) = 0 = -1 + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-x_0)^2 \Rightarrow f''(\xi_2) &= \frac{2}{(1-x_0)^2}, \\ x_0 &< \xi_2 < 1. \end{aligned}$$

显然, 当  $x_0 < \frac{1}{2}$  时,  $f''(\xi_1) \geq \frac{2}{(1/2)^2} = 8$ ;

当  $x_0 > \frac{1}{2}$  时,  $f''(\xi_2) \geq \frac{2}{(1-1/2)^2} = 8$ .

从而知,存在  $\xi \in (0,1)$ ,使  $f''(\xi) \geq 8$ .

**例 16** 设  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上二次可微,且  $\forall x \in \mathbf{R}$ ,有  $|f(x)| \leq M_0, |f''(x)| \leq M_2$ .

(1) 写出  $f(x+h), f(x-h)$  关于  $h$  的有拉格朗日余项的泰勒公式;

(2) 证明:  $\forall h > 0$ , 有  $|f(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$ ;

(3) 证明:  $|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$ .

解 (1)  $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x+\theta_1h)}{2}h^2$ ,  
 $0 < \theta_1 < 1$ ,

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x-\theta_2h)}{2}h^2, \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

(2) 将题(1)中的第一式减去第二式,得

$$\begin{aligned} 2f'(x)h &= f(x+h) - f(x-h) \\ &\quad + \frac{h^2}{2}[f''(x+\theta_1h) - f''(x-\theta_2h)] \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \\ &\quad + \frac{1}{4}[f''(x-\theta_2h) - f''(x+\theta_1h)]h. \end{aligned}$$

由题设条件,对上式两边取绝对值,得

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2.$$

(3) 设  $|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2} = \varphi(h) \ (h > 0)$ , 则

$$\varphi(h) \geq 2\sqrt{\frac{M_0}{h} \cdot \frac{hM_2}{2}} = \sqrt{2M_0M_2} \left[ h = \sqrt{\frac{2M_2}{M_0}} \text{ 时相等} \right],$$

所以,代入上式,即得

$$|f'(x)| \leq \sqrt{\frac{M_0 M_2}{2}} + \sqrt{\frac{M_0 M_2}{2}} = \sqrt{2M_0 M_2}.$$

用泰勒公式还可证明其它命题.

**例 17** 设  $f''(x)$  连续, 且  $f''(x) \neq 0$ . 求出在中值定理  $f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h)$  中的  $\theta$  当  $h \rightarrow 0$  时的极限.

**证** 依泰勒公式, 有

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x+\theta_1 h)h^2,$$

与题设等式相比较, 得

$$f'(x+\theta h) - f'(x) = \frac{1}{2}f''(x+\theta_1 h)h.$$

对  $f'(x)$  在  $(x, x+\theta h)$  上应用拉格朗日中值定理, 得

$$f'(x+\theta h) - f'(x) = f''(x+\theta_2 \theta h)\theta h \quad (0 < \theta_2 < 1),$$

故 
$$\theta = \frac{f''(x+\theta_1 h)h/2}{f''(x+\theta_2 \theta h)h} = \frac{f''(x+\theta_1 h)}{2f''(x+\theta_2 \theta h)}.$$

由  $f''(x)$  的连续性, 得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+\theta_1 h)}{2f''(x+\theta_2 \theta h)} = \frac{1}{2}.$$

**例 18** 设函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上有连续三阶导数, 且  $\forall h > 0$ , 有

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

证明:  $f(x)$  是二次多项式.

**证** 对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 将函数  $f(x+h)$  和  $f'(x+h)$  分别展为泰勒公式, 有

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}h^3, \quad x < \xi < x+h,$$

$$f'\left(x + \frac{h}{2}\right) = f'(x) + f''(x)\frac{h}{2} + \frac{f'''(\eta)}{2}\frac{h^2}{4}, \quad x < \eta < x + \frac{h}{2}.$$

将上述二式代入题给等式, 得



$$f'(x) + \frac{f''(x)}{2}h + \frac{f'''(\xi)}{6}h^2 = f'(x) + f''(x)\frac{h}{2} + \frac{f'''(\eta)}{8}h^2,$$

即 
$$f'''(\xi) = \frac{3}{4}f'''(\eta).$$

当  $h \rightarrow 0$  时,  $\xi \rightarrow x, \eta \rightarrow x$ . 由  $f'''(x)$  的连续性, 得

$$\lim_{h \rightarrow 0} f'''(\xi) = \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} f'''(\eta) \Rightarrow f'''(x) = \frac{3}{4}f'''(x),$$

即等式成立  $\Leftrightarrow f'''(x) = 0$ .

由  $f'''(x) = 0$  知,  $\forall x \in \mathbf{R}, f(x)$  是二次多项式.

**例 19** 证明: 函数  $f(x)$  是  $n$  次多项式的充分必要条件是  $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$ .

**证** 必要性 若  $f(x)$  是  $n$  次多项式, 则

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

$a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$  是常数. 显然,  $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$ .

充分性 将  $f(x)$  在  $x = 0$  展成麦克劳林公式, 则  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 有

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

其中  $0 < \theta < 1$ . 若  $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$ , 则上式为

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

显然,  $f(x)$  是  $n$  次多项式.

**例 20** 设  $f(x)$  是  $n$  次多项式, 且  $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(m)}(x_0) = 0, f^{(m+1)}(x_0) \neq 0 (m \leq n-1)$ , 证明:  $x = x_0$  是方程  $f(x) = 0$  的  $m+1$  重根.

**证** 将  $f(x)$  在  $x_0$  展为泰勒展开式, 有

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots \\ & + \frac{f^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned}$$

$$= (x - x_0)^{m+1} \left[ \frac{f^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!} + \frac{f^{(m+2)}(x_0)}{(m+2)!} (x - x_0) \right. \\ \left. + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^{n-m-1} \right].$$

记  $g(x) = \frac{f^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^{n-m-1},$

则  $g(x_0) \neq 0.$

由  $f(x) = (x - x_0)^{m+1}g(x)$  知,  $x_0$  是  $f(x)$  的  $m+1$  重根.

**例 21** 设  $f(x)$  在  $(-1, 1)$  内有二阶连续导数, 且  $f''(x) \neq 0$ , 证明:

(1)  $\forall x \in (-1, 1)$  且  $x \neq 0, \exists$  惟一的  $\theta(x) \in (0, 1)$ , 使

$$f(x) = f(0) + xf'[\theta(x)x];$$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}.$

**证** (1) 对任  $x \neq 0$ , 且  $x \in (-1, 1)$ , 由拉格朗日中值定理, 有

$$f(x) = f(0) + f'(\theta(x)x) \cdot (x - 0) \quad (0 < \theta(x) < 1).$$

因为  $f''(x)$  在  $(-1, 1)$  内连续, 且  $f''(x) \neq 0$ , 所以  $f''(x)$  在  $(-1, 1)$  内不改变符号. 不妨设  $f''(x) > 0$  ( $f''(x) < 0$  类似可证), 则  $f'(x)$  严格递增, 故  $\theta(x)$  惟一.

(2) 由泰勒公式, 有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2 \quad (\xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}),$$

故  $xf'(\theta(x)x) = f(x) - f(0) = f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$

即  $f'(\theta(x)x) - f'(0) = \frac{1}{2}f''(\xi)x.$

而  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\theta(x)x) - f'(0)}{\theta(x)x} = f''(0), \lim_{x \rightarrow 0} f''(\xi) = f''(0),$

所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}.$

(由  $\theta(x) \frac{f'(\theta(x)x) - f'(0)}{\theta(x)x} = \frac{1}{2}f''(\xi)$ , 两边取  $x \rightarrow 0$  的极限即得).

例 22 证明: 若

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a + \theta h), \quad 0 < \theta < 1,$$

且  $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ , 则  $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}$ .

证 因为  $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ , 由泰勒公式, 有

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + hf'(a) + \cdots \\ &\quad + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a) + o(h^{n+1}). \end{aligned}$$

于是, 将题给等式减去泰勒公式并整理, 得

$$\frac{f^{(n)}(a + \theta h) - f^{(n)}(a)}{h} = \frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a) + \frac{n!}{h^{n+1}}o(h^{n+1}).$$

令  $h \rightarrow 0$ , 对上式两边取极限, 得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta \frac{f^{(n)}(a + \theta h) - f^{(n)}(a)}{h\theta} = \lim_{h \rightarrow 0} \theta \cdot f^{(n+1)}(a) = \frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a),$$

所以

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}.$$

例 23 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内  $f''(x) > 0$ , 证明:  
 $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ , 且  $x_1 < x_2$ , 有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

证 满足上述不等式的函数是凸函数. 一般利用拉格朗日中值定理证明(读者不妨一试). 在这里, 我们利用泰勒公式来证明.

将  $f(x)$  在  $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$  处泰勒展开, 得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2,$$

$\xi$  在  $x$  与  $x_0$  之间. 又

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \\
&\quad + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1 - x_0)^2, \xi_1 \in (x_1, x_0), \\
f(x_2) &= f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) \\
&\quad + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2 - x_0)^2, \xi_2 \in (x_0, x_2).
\end{aligned}$$

将上述两式相加后除以 2, 考虑  $x_1 - x_0 = -(x_2 - x_0)$ , 得

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = f(x_0) + \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{4} \left( \frac{x_1 - x_2}{2} \right)^2.$$

因为  $f''(x) > 0$ , 所以上式右边第二项大于零, 故

$$f(x_0) = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

## 第四节 函数的单调性与极值

### 主要内容

1. 设函数  $f$  在  $(a, b)$  内可导.

(1)  $f$  在  $(a, b)$  内单调增加(或单调减少)的充要条件是

$$f'(x) \geq 0 \text{ (或 } f'(x) \leq 0), x \in (a, b);$$

(2)  $f$  在  $(a, b)$  内严格单调增加的充要条件是, 对一切  $x \in (a, b)$ , 有  $f'(x) \geq 0$  (或  $f'(x) \leq 0$ ), 且在  $(a, b)$  内的任何子区间上  $f'(x) \neq 0$ .

**推论** 若函数  $f$  在  $(a, b)$  内可导, 且  $f'(x) > 0$  (或  $f'(x) < 0$ ), 则  $f$  在  $(a, b)$  内严格单调增加(或严格单调减少).

**注意** 推论是严格单调的充分条件, 不是充要条件.

2. 若函数  $f$  在  $x_0$  可导, 且在  $x_0$  取得极值, 则称  $x_0$  为  $f$  的稳定

点(或驻点、静止点),且将  $f'(x_0) = 0$  称为极值的必要条件.

3. 极值的第一充分条件 设  $f$  在  $U(x_0)$  内连续,在  $U^\circ(x_0)$  内可导.

(1) 若当  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  时,  $f'(x) \geq 0$ , 当  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  时,  $f'(x) \leq 0$ , 则  $f$  在  $x_0$  取得极大值;

(2) 若当  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  时,  $f'(x) \leq 0$ , 当  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  时,  $f'(x) \geq 0$ , 则  $f$  在  $x_0$  取得极小值.

4. 极值的第二充分条件 设  $f$  在  $U(x_0)$  内一阶可导,在  $x = x_0$  二阶可导,且  $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$ , 则

(1) 若  $f''(x_0) < 0$ ,  $f$  在  $x_0$  取得极大值;

(2) 若  $f''(x_0) > 0$ ,  $f$  在  $x_0$  取得极小值.

5. 极值的第三充分条件  $f$  在  $U(x_0)$  内存在直到  $n-1$  阶导数,在  $x = x_0$   $n$  阶可导,且  $f^{(k)}(x_0) = 0$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ),  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ , 则

(1) 当  $n$  为偶数时,  $f$  在  $x = x_0$  有极值. 且当  $f^{(n)}(x_0) < 0$  时,  $f(x_0)$  为极大值; 当  $f^{(n)}(x_0) > 0$  时,  $f(x_0)$  为极小值.

(2) 当  $n$  为奇数时,  $f$  在  $x = x_0$  无极值.

6. 若  $f$  在  $[a, b]$  上连续,则  $f$  在  $[a, b]$  上必有最大值  $M$  与最小值  $m$ .

(1) 对以解析式表达的函数,可以通过比较所有稳定点,不可导点和区间端点的函数值大小来确定函数  $f$  的最大值与最小值.

(2) 对应用问题,一般不考虑区间端点. 也可以通过比较稳定点、不可导点函数值大小确定  $f$  的最大值与最小值.

若问题只有一个稳定点,可以根据问题的实际意义确定是最大值还是最小值.

## 疑难解析

1. 若  $f'(x_0) > 0$ , 能否说函数  $f$  在  $U(x_0)$  内单调增加?

答 若  $f'(x_0) > 0$ , 则  $f(x)$  在点  $x_0$  严格单调增加. 即  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ , 有  $f(x) < f(x_0)$ ;  $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , 有  $f(x_0) < f(x)$ . 但两个不等式之间的关系不一定能传递, 即  $f$  在  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  内不一定严格单调增加. 例如

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

当  $x \neq 0$  时, 有  $f'(x) = 1 + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ ,

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x + \Delta x^2 \sin(1/\Delta x) - 0}{\Delta x} = 1 > 0$$

所以,  $f(x)$  在  $x = 0$  严格单调增加. 但当  $x \neq 0$  时, 有

$$f''(x) = 2 \sin \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x},$$

$$f''\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = -4n\pi \begin{cases} < 0, & n \text{ 为正整数,} \\ > 0, & n \text{ 为负整数.} \end{cases}$$

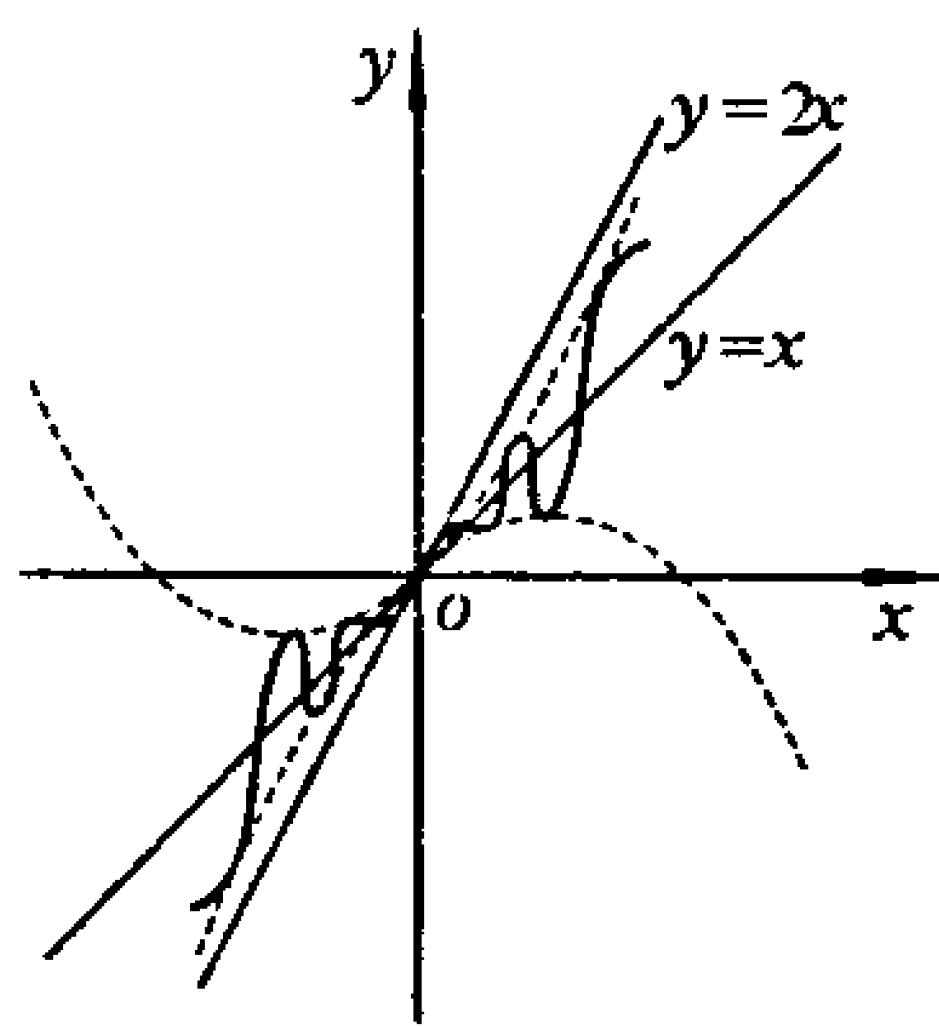


图 4.1

而  $f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = 0$ . 故  $f(x)$  在点  $\frac{1}{2n\pi}$  都有极大值. 由于  $x_n = \frac{1}{2n\pi} \rightarrow 0$ , 所以, 在任何  $(-\epsilon, \epsilon)$  内,  $f$  都不是严格单调增加的, 而是作无穷次的振荡.

## 2. 怎样理解函数的极值与最值?

答 极值与最值的问题是一个局部与整体的问题. 极值是函数的局部性质, 即函数  $f$  在某个  $U(x_0)$  内所具有的  $f(x_0) < f(x)$  (或  $f(x_0) > f(x)$ ) 的性质. 因此, 从图 4.1 可以看出, 一个函数  $f$  在区间  $[a, b]$  上可以有多个极大值与极小值, 此极大值可能小于彼极小值. 而最值是函数的整体性质, 在  $[a, b]$  上连续的函数必有最大值与最小值, 最大值与最小值都是惟一的. 最大值与最小值可能是极值, 也可能不是极值.

## 方法、技巧与典型例题分析

### 一、函数的单调性问题

函数的单调性问题包括确定函数的单调区间、证明不等式、确定方程根的个数和证明某些命题. 其中对方法和技巧要求较高的是证明不等式, 证明不等式的关键是要引入一个函数. 引入函数的方法有多种: 最简单的是将不等式的一边移到另一边构成辅助函数; 较复杂的则需根据对不等式特征的观察加以确定, 因而有一定的技巧, 需要通过多练习才能掌握.

例 1 讨论下列函数的单调性:

$$(1) y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, x > 0;$$

$$(2) y = \sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}, a > 0;$$

$$(3) y = x + |\sin x|; \quad (4) y = x^n \cdot e^{-x}, n > 0, x > 0.$$

解 (1) 因为  $\ln y = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = x[\ln(1+x) - \ln x]$ , 两边求导, 得

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x}\right) = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \\ &= \ln(1+x) - \ln x - \frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

因为, 由拉格朗日中值定理, 在  $[x, 1+x]$  上有

$$\ln(1+x) - \ln x = \frac{1}{\xi}(1+x-x) = \frac{1}{\xi}, \xi \in (x, 1+x),$$

所以  $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{\xi}$ ,

即  $\ln(1+x) - \ln x - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{\xi} - \frac{1}{1+x} > 0$ .

又  $y > 0$ , 所以

$$y' = y \left[ \ln(1+x) - \ln x - \frac{1}{1+x} \right] > 0.$$

即  $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  在  $(0, +\infty)$  内单调增加.

(2) 因为  $y' = -6(x - 2a/3) / \left[3 \sqrt[3]{(2x - a)^2(a - x)}\right]$ , 稳定点为  $\frac{2}{3}a$ , 导数不存在的点为  $\frac{a}{2}$  和  $a$ .

在  $(-\infty, a/2)$  内,  $y' > 0$ , 函数单调增加;

在  $(a/2, 2a/3)$  内,  $y' > 0$ , 函数单调增加;

在  $(2a/3, a)$  内,  $y' < 0$ , 函数单调减少;

在  $(a, +\infty)$  内,  $y' > 0$ , 函数单调增加.

(3) 因为函数含绝对值记号, 要分区间讨论.

当  $2n\pi \leq 2x \leq (2n+1)\pi$  时,  $\sin 2x \geq 0$ ;

当  $(2n-1)\pi \leq 2x \leq 2n\pi$  时,  $\sin 2x \leq 0$ .

所以, 当  $2n\pi \leq 2x \leq (2n+1)\pi$ , 即  $n\pi \leq x \leq n\pi + \pi/2$  时, 有

$$y = x + \sin 2x, \quad y' = 1 + 2\cos 2x,$$

$$y' \geq 0 \iff \cos 2x \geq -1/2 \iff 2n\pi \leq 2x \leq 2n\pi + 2\pi/3,$$

即  $n\pi \leq x \leq n\pi + \pi/3$ . 故

当  $n\pi \leq x \leq n\pi + \pi/3$  时,  $y' \geq 0$ ,  $y$  单调增加;

当  $n\pi + \pi/3 \leq x \leq n\pi + \pi/2$  时,  $y' \leq 0$ ,  $y$  单调减少.

类似地, 当  $(2n-1)\pi \leq 2x \leq 2n\pi$ , 即  $n\pi - \pi/2 \leq x \leq n\pi$  时,

$$y = x - \sin 2x, \quad y' = 1 - 2\cos 2x,$$

$$y' \geq 0 \iff \cos 2x \leq 1/2 \iff (2n-1)\pi \leq 2x \leq 2n\pi - \pi/3,$$

即  $n\pi - \pi/2 \leq x \leq n\pi - \pi/6$ , 故

当  $n\pi - \pi/2 \leq x \leq n\pi - \pi/6$  时,  $y' \geq 0$ ,  $y$  单调增加;

当  $n\pi - \pi/6 \leq x \leq n\pi$  时,  $y' \leq 0$ ,  $y$  单调减少.

(4) 因为  $y' = nx^{n-1}e^{-x} + x^n e^{-x} = (n-x)e^{-x} \cdot x^n$ , 稳定点为  $x = n$ .

在  $(0, n)$  内,  $y' > 0$ ,  $y$  单调增加;

在  $(n, \infty)$  内,  $y' < 0$ ,  $y$  单调减少.



例2 判断下列命题的真伪:

(1) 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  内单增且可导, 则  $f'(x) > 0$ .

(2) 单调函数的导函数必单调.

(3) 一个函数的导函数单调, 则函数必单调.

(4)  $f(x)$  在  $(a, b)$  内连续, 在  $[a, b]$  上单调减少, 则  $f'(x) \leq 0$ .

解 (1) 伪. 例如  $y = x^3$  在  $(-2, 2)$  内单调增加且可导, 但

$$f'(0) = 3x^2 \Big|_{x=0} = 0.$$

应改为  $f'(x) \geq 0$ , 命题才成立.

(2) 伪. 例如  $y = x^3$  在  $(-\infty, +\infty)$  内单调, 但  $y' = 3x^2$  在  $(-\infty, +\infty)$  内不单调.

(3) 伪. 例如  $y = x^2$  的导函数  $y' = 2x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内单调, 但  $y = x^2$  在  $(-\infty, +\infty)$  内不单调.

(4) 真. 因为  $\forall x_0 \in (a, b)$ , 取  $[x_1, x_2] \subset (a, b)$ , 且  $x_0 \in (x_1, x_2)$ , 则  $f(x)$  在  $[x_1, x_2]$  上满足拉格朗日中值定理条件, 所以

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad \xi \in (x_1, x_2).$$

而  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调减少, 于是

$$f'(\xi)(x_2 - x_1) \leq 0, \quad f'(\xi) \leq 0.$$

显然, 上式当  $x_2 - x_1 \rightarrow 0^+$  时均成立.

当  $x_2 - x_1 \rightarrow 0^+$  时, 由  $f'(x)$  的连续性,  $\lim_{\xi \rightarrow x_0} f'(\xi) = f'(x_0)$ .

又由有极限函数的局部保号性知, 由  $\lim_{\xi \rightarrow x_0} f'(\xi) \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$ .

再由  $x_0$  的任意性, 确定在  $(a, b)$  内恒有  $f'(x_0) \leq 0$ .

例3 证明下列不等式:

(1)  $e^x > \pi^e$ ;

(2)  $2^x > x^2 (x > 4)$ , 并说明, 当  $0 < x < 1$  或  $x = e$  时, 只有  $y = x$  才满足  $x^y = y^x$ ; 当  $x > 1$  且  $x \neq e$  时, 对一切  $x$ , 都能找到惟一的  $y \neq x$ , 使  $y^x = x^y$ .

证 考虑一般情形:  $a^b > b^a$  (设  $a > 1, b > 1$ ), 则两边取对数

后可得等价不等式:  $\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{a}$ .

于是引入辅助函数  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ , 则

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \begin{cases} < 0, & x > e, \\ > 0, & x < e. \end{cases}$$

也可以引入辅助函数  $f(x) = x - e \ln x$  来讨论  $e^\pi > \pi^e$ .

(1) 由  $f'(x)$  在  $(e, +\infty) < 0$  知,  $f(x)$  严格单调减少, 因此  $\frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi}$ , 即  $\pi \ln e > e \ln \pi$ , 得  $e^\pi > \pi^e$ .

(2) 因为  $x = 4 > e$ , 所以由  $f'(x)$  在  $(x, +\infty) < 0$  知,  $f(x)$  严格单调减少, 因此  $\frac{\ln 2}{2} > \frac{\ln x}{x}$ , 即  $x \ln 2 > 2 \ln x$ , 得  $2^x > x^2$ .

当  $0 < x < 1$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  严格单调增加. 当  $y, x \in (0, 1)$  且  $y \neq x$  时,  $f(x) \neq f(y)$ . 所以仅当  $x = y$  时, 才有  $y^x = x^y$ ; 当  $x = e$  时,  $f(x)$  取得极大值, 对任何  $y \neq e$ , 都有  $f(y) < f(e)$ , 故仅当  $y = x = e$  时, 有  $x^y = y^x$ .

对  $x > 1$  且  $x \neq e$ , 因为在  $(1, e)$  内  $f(x)$  严格单调增加, 在  $(e, +\infty)$  内严格单调减少, 所以直线  $y = \frac{\ln x_0}{x_0}$  与曲线  $y = \frac{\ln x}{x}$  有且只有两个交点  $\left(x_0, \frac{\ln x_0}{x_0}\right), \left(y_0, \frac{\ln x_0}{x_0}\right)$ . 即

$$\frac{\ln y_0}{y_0} = \frac{\ln x_0}{x_0} \Rightarrow x_0^{y_0} = y_0^{x_0}.$$

这表明, 当  $x > 1$  且  $x \neq e$  时, 有惟一的  $y \neq x$ , 使  $y^x = x^y$ .

实际上, 要证  $a^b > b^a$ , 可转化为: (1) 证  $a^b - b^a > 0$ ; (2) 证  $b \ln a - a \ln b > 0$ ; (3) 证  $a^b/b^a > 1$ . 从而可以选择一种最易确定  $f'(x)$  符号的方法.

**例 4** 证明下列不等式:

$$(1) 1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}, \quad x > 0;$$

$$(2) \frac{|a+b|}{\pi + |a+b|} \leq \frac{|a|}{\pi + |a|} + \frac{|b|}{\pi + |b|} \quad (a, b \in \mathbf{R});$$

$$(3) \frac{2}{e} < x^{\frac{x}{1-x}} + x^{\frac{1}{1-x}} < 1, 0 < x < 1;$$

$$(4) 0 < \frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}, x > 0, x \neq 1.$$

证 (1) 设  $f(x) = 1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$ , 则  
 $f'(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

$$+ \frac{x}{x + \sqrt{1+x^2}} \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > 0, x > 0.$$

所以在  $(0, +\infty)$  内,  $f(x)$  严格单调增加. 而  $f(0) = 0$ , 故

$$1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} > 0,$$

即  $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}, x > 0.$

(2) 设  $f(x) = \frac{x}{\pi + x}$ , 则  $f'(x) = \frac{\pi}{(\pi + x)^2} > 0$ . 所以  $f(x)$  单调增加.

又  $|a + b| \leq |a| + |b|$ , 令  $x_1 = |a + b|, x_2 = |a| + |b|$ , 则  $f(x_1) < f(x_2)$ , 即

$$\frac{|a + b|}{\pi + |a + b|} \leq \frac{|a| + |b|}{\pi + |a| + |b|} \leq \frac{|a|}{\pi + |a|} + \frac{|b|}{\pi + |b|}.$$

(3) 令  $f(x) = x^{\frac{x}{1-x}} + x^{\frac{1}{1-x}} = (1+x)x^{\frac{x}{1-x}}$ , 则  $f(x) > 0$ . 对等式两边取对数可得

$$\ln f(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1-x} \ln x, x > 0,$$

$$f'(x) = f(x) \cdot \frac{\ln x + 2(1-x)/(1+x)}{(1-x)^2}.$$

因为  $g'(x) = \left[ \ln x + 2 \frac{1-x}{1+x} \right]' = \frac{1}{x} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^2 > 0, x > 0,$

所以  $g(x) = \ln x + 2 \frac{1-x}{1+x} < g(1) = 0, 0 < x < 1.$

故  $f'(x) < 0, f(x)$  严格单调减少, 故

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) < f(x) < \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x),$$

即

$$\frac{2}{e} < x^{\frac{1}{1-x}} + x^{\frac{1}{1+x}} < 1.$$

$$(4) \frac{x \ln x}{x^2 - 1} > 0 \text{ 是显然的, 只需证 } \frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}.$$

$$\text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } \frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2} \sim 2 \ln x > \frac{x^2 - 1}{x}, \text{ 令}$$

$$f(x) = 2 \ln x - \frac{x^2 - 1}{x} = 2 \ln x - x + \frac{1}{x},$$

$$\text{则 } f'(x) = \frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} = -\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 < 0.$$

所以  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内严格单调减少,  $f(x) > \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = 0$ . 故有

$$\frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}. \text{ 于是欲证不等式成立.}$$

**例 5** 证明下列不等式:

$$(1) pe^{x/p} + qe^{-x/q} \leq e^{x^2/(8p^2q^2)}, p, q > 0, p + q = 1;$$

$$(2) (1+x)^\lambda - (1-x)^\lambda \leq 2^\lambda, \lambda \geq 1, 0 \leq x \leq 1;$$

$$(3) (x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha} > (x^\beta + y^\beta)^{1/\beta}, x, y > 0, \beta > \alpha > 0;$$

$$(4) xe^{-x} > \frac{1}{x}e^{-x}, 0 < x < 1.$$

**证** (1) 将不等式变形为  $pe^{x/p} + q \leq e^{x/q + x^2/(8p^2q^2)}$ , 令  $x = 2pqy$  得,  $pe^{2y} + q \leq e^{2py + y^2/2}$ .

令  $f(y) = e^{2py + y^2/2} - pe^{2y}$ , 则

$$f'(y) = e^{2y}[(2p + y)e^{y^2/2 - 2qy} - 2p] = e^{2y}g(y),$$

$$g'(y) = (y + p - q)^2 e^{y^2/2 - 2qy} \geq 0, y \in (-\infty, +\infty).$$

所以当  $y \geq 0$  时,  $g(y) \geq 0$ ; 当  $y \leq 0$  时,  $g(y) \leq 0$ . 于是对  $y \in (-\infty, +\infty)$ , 恒有  $f(y) \geq f(0) = q$ . 故

$$pe^{2y} + q \leq e^{2py + y^2/2} \Rightarrow pe^{x/p} + qe^{-x/q} \leq e^{x^2/(8p^2q^2)}.$$

(2) 令  $f(x) = (1+x)^\lambda - (1-x)^\lambda, 0 \leq x \leq 1$ , 则

$$f'(x) = \lambda[(1+x)^{\lambda-1} - (1-x)^{\lambda-1}] \geqslant 0 \quad (\lambda > 1).$$

所以  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上严格单调增加, 又  $f(1) = 2^\lambda$ , 故

$$f(x) = (1+x)^\lambda - (1-x)^\lambda \leqslant 2^\lambda, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

(3) 将等式变形为  $[1 + (x/y)^\alpha]^{1/\alpha} > [1 + (x/y)^\beta]^{1/\beta}$ , 令  $f(\alpha) = (1+t^\alpha)^{1/\alpha}$ ,  $t > 0$ ,  $0 < \alpha < +\infty$ , 则由证变形后不等式转化为证  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内的单调性.

$$\text{因为} \quad \ln f(x) = \frac{1}{\alpha} \ln(1+t^\alpha),$$

$$\begin{aligned} \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} &= \frac{1}{\alpha^2} \left[ \frac{\alpha t^\alpha \ln t}{1+t^\alpha} - \ln(1+t^\alpha) \right] \\ &= \frac{t^\alpha \ln t^\alpha - (1+t^\alpha) \ln(1+t^\alpha)}{\alpha^2(1+t^\alpha)} \\ &< \frac{t^\alpha \ln(1+t^\alpha) - (1+t^\alpha) \ln(1+t^\alpha)}{\alpha^2(1+t^\alpha)} \\ &= -\frac{\ln(1+t^\alpha)}{\alpha^2(1+t^\alpha)} < 0 \quad (\alpha > 0), \end{aligned}$$

所以由  $f'(\alpha) < 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $f(\alpha)$  在  $(0, +\infty)$  内单调减少. 即当  $\beta > \alpha$  时,  $(1+t^\alpha)^{1/\alpha} > (1+t^\beta)^{1/\beta}$ . 令  $t = \frac{x}{y}$ , 即为

$$\left[ 1 + \left( \frac{y}{x} \right)^\alpha \right]^{1/\alpha} > \left[ 1 + \left( \frac{y}{x} \right)^\beta \right]^{1/\beta} \Rightarrow [x^\alpha + y^\alpha]^{1/\alpha} < [x^\beta + y^\beta]^{1/\beta}.$$

(4) 将欲证不等式两边取对数, 得

$$\ln x - x > -\ln x - 1/x,$$

$$\text{即} \quad 2\ln x - x + 1/x > 0, \quad 0 < x < 1.$$

令  $f(x) = 2\ln x - x + 1/x$ , 则  $f(1) = 0$ , 且

$$f'(x) = \frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} = -\frac{(x-1)^2}{x^2} < 0, \quad 0 < x < 1.$$

故  $f(x)$  严格单调减少, 有  $f(x) > f(1) = 0$ ,  $0 < x < 1$ . 即有

$$2\ln x - x + 1/x > 0 \Rightarrow x^2 e^{-x} e^{1/x} > 1$$

$$\Rightarrow x e^{-x} > e^{-1/x} / x, \quad 0 < x < 1.$$

例 6 证明下列不等式:

$$(1) e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{x}\right)^x \geq 0, \quad x > 0, t \leq x;$$

$$(2) \ln(1+x) \geq \frac{\arctan x}{1+x}, \quad x \geq 0.$$

证 (1) 当  $t=0$  或  $t=x$  时, 不等式显然成立. 当  $x>0, t<x$  且  $t \neq 0$  时, 有

$$\begin{aligned} [\ln f(x)]' &= \left[ \ln \left(1 - \frac{t}{x}\right)^x \right]' = \left[ x \ln \left(1 - \frac{t}{x}\right) \right]' \\ &= \ln(x-t) - \ln x + \frac{t}{x-t}. \end{aligned}$$

由拉格朗日中值定理, 有

$$\ln(x-t) - \ln x = -\frac{t}{\xi} \begin{cases} \text{当 } 0 < t < x \text{ 时, } 0 < x-t < \xi < x \\ \text{当 } t < 0 \text{ 时, } 0 < x < \xi < x-t \end{cases},$$

$$[\ln f(x)]' = -\frac{t}{\xi} \geq \frac{-t}{x-t} + \frac{t}{x-t} = 0.$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{-\frac{x}{t}} \right]^{-t} = e^{-t},$$

所以, 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $\left(1 - \frac{t}{x}\right)^x$  严格单调增加且趋向  $e^{-t}$ , 即

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{x}\right)^x \geq 0.$$

(2) 令  $F(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x, x \geq 0$ , 则

$$F'(x) = \ln(1+x) + 1 - \frac{1}{1+x^2} = \ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0.$$

故  $F(x)$  在  $(0, +\infty)$  严格单调增加. 又  $F(0) = 0$ , 即  $F(x) \geq 0$ .

$$\ln(1+x) \geq \frac{\arctan x}{1+x}.$$

例 7 讨论  $k > 0, k$  为何值时, 方程

$$\arctan x - kx = 0$$

存在正根.

解 令  $f(x) = \arctan x - kx, x \geq 0$ , 则

$$f(0) = 0, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - k,$$

$$f'(0) = 1 - k, \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} < 0.$$

所以  $f'(x)$  严格单调减少, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -k.$$

当  $k \geq 1$  时,  $f'(x) < 0$ , 于是

$$f(x) < f(0) = 0, \quad x > 0.$$

即  $k \geq 1$  时, 方程没有正根.

当  $0 < k < 1$  时, 有

$$f'(x) \begin{cases} > 0, & x \in [0, \sqrt{(1-k)/k}], \\ < 0, & x \in [\sqrt{(1-k)/k}, +\infty]. \end{cases}$$

即  $f$  在  $[0, \sqrt{(1-k)/k}]$  上严格单调增加, 在  $[\sqrt{(1-k)/k}, +\infty]$  上严格单调减少. 有

$$f(\sqrt{(1-k)/k}) > f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

由连续函数的介值定理和  $f$  的单调性知, 方程在  $(\sqrt{(1-k)/k}, +\infty)$  内有惟一正根.

**例 8** 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上连续, 在  $[a, +\infty)$  内可导, 且  $f'(x) > k > 0$  ( $k$  为常数). 又  $f(a) < 0$ . 证明:  $f(x) = 0$  在  $\left(a, a - \frac{f(a)}{k}\right)$  内有惟一实根.

**证** 令  $b = a - \frac{f(a)}{k} > a$ , 则由拉格朗日中值定理, 有

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + f'(\xi)(b-a) = f(a) + f'(\xi)\left(-\frac{f(a)}{k}\right) \\ &= -f(a)\left(\frac{f'(\xi)}{k} - 1\right) > 0, \quad a < \xi < b. \end{aligned}$$

即  $f(x)$  在  $[a, b]$  两端点异号, 依连续函数的介值定理,  $f(x)$  在  $(a, b)$  内至少有一个实根.

**例 9** 设  $f(x)$  为定义在  $(-a, a)$  内的偶函数, 且在  $(-a, 0]$  内严格单调减少, 证明:  $f(x)$  在  $[0, a)$  内严格单调增加.

证 任取  $x_1, x_2 \in [0, a)$ , 且  $x_1 < x_2$ , 即  $0 \leq x_1 \leq x_2 < a$ , 则  $-a < -x_2 < -x_1 \leq 0$ . 由于  $f(x)$  在  $(-a, 0]$  内严格单调减少, 即  $f(-x_2) > f(-x_1)$ , 但  $f(x)$  为偶函数, 有

$$f(x_2) = f(-x_2) > f(-x_1) = f(x_1),$$

所以  $f(x)$  在  $[0, a)$  内严格单调增加.

## 二、函数的极值与最值问题

确定函数的极值可以用第一充分条件, 也可以用第二充分条件, 具体使用时一定要根据实际问题决定, 使问题简洁明了.

例 10 根据题给条件, 讨论指定点是否函数的极限点, 是极大值点还是极小值点.

(1) 已知  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = -1$ , 讨论  $x = a$ ;

(2) 已知  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  有定义,  $x_0 \neq 0$  是  $f(x)$  的极大值点, 对  $-f(-x)$  讨论  $-x_0$ ;

(3) 已知  $f(x)$  二阶连续可导, 且  $f'(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$ , 讨论  $x = 0$ .

解 (1) 因  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = -1$ , 依极限的保号性知, 在某  $U(a)$  内,  $\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} < 0$ , 即  $f(x) - f(a) < 0$  ( $x \neq a$ ). 所以,  $f(a)$  是  $f(x)$  的极大值,  $x = a$  是  $f(x)$  的极大值点.

将极限式改为  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^n} = k$ ,  $n$  为正整数,  $k \neq 0$ , 可以证明:

若  $n$  为偶数, 当  $k > 0$  时,  $f(a)$  为极小值; 若  $k < 0$ ,  $f(a)$  为极大值.

若  $n$  为奇数, 则在  $U(a)$  内, 有

$$f(x) - f(a) = (k + \alpha(x))(x - a)^n$$

在  $x = a$  两侧异号, 所以  $f(a)$  不是极值.



(2)  $x_0 \neq 0$  是  $f(x)$  的极大值点,但不一定是  $f(x)$  的稳定点.

$y = -f(-x)$  的图形与  $y = f(x)$  的图形关于原点对称,故  $x_0 \neq 0$  是  $f(x)$  的极大值点时,  $-x_0$  是  $-f(-x)$  的极小值点.

(3) 因为  $f'(0) = 0$ , 所以  $x = 0$  是  $f(x)$  的稳定点. 由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$  知,  $f''(x)$  与  $|x|$  是等价无穷小. 因为在  $U(0)$  内,  $|x| > 0$ , 故  $f''(x) > 0$ . 依极值的第二充分条件,  $f(x)$  在  $x = 0$  取得极小值, 所以  $x = 0$  为极小值点.

例 11 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内恒满足方程

$$(x-1)f''(x) + 2(x-1)[f'(x)]^3 = 1 - e^{1-x}.$$

(1) 若  $f(x)$  在  $x = a$  ( $a \neq 1$ ) 处取得极值, 则必为极小值;

(2) 若  $f(x)$  在  $x = 1$  取得极值, 是否为极小值?

证 (1) 由题设知  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内二阶可导, 故若在  $x = a$  取得极值, 必有  $f'(a) = 0$ , 则有

$$f''(a) = \frac{1}{a-1}(1 - e^{1-a}), \quad a \neq 1.$$

当  $a < 1$  时,  $f''(a) > 0$ ; 当  $a > 1$  时, 也有  $f''(a) > 0$ . 所以  $f(x)$  在  $x = a$  取得极小值.

(2) 是. 因为  $f'(1) = 0$ , 而

$$f''(x) = \frac{1}{x-1}[1 - e^{1-x} - 2(x-1)(f'(x))^3].$$

由  $f'(x)$  的连续性知,  $f''(x)$  连续, 故

$$\begin{aligned} f''(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{1-x} - 2(x-1)(f'(x))^3}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{1-x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(1-x)}{(x-1)} = 1. \end{aligned}$$

由  $f''(1) > 0$  知,  $f(x)$  在  $x = 1$  取得极小值.

例 12 设正值序列  $\{x_n\}$  满足  $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$ . 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在.

证 因为对  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$ ,  $x > 0$ , 有  $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$ , 所以,  $x=1$  是稳定点. 由  $f''(1) = \frac{2-x}{x^3} \Big|_{x=1} = 1 > 0$  知,  $f(1) = 1$  为极小值, 即最小值.

由上知  $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} \leq \ln x_n + \frac{1}{x_n}$ , 即  $x_n \leq x_{n+1}$ , 所以  $\{x_n\}$  严格单调增加. 从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  存在, 且  $a > 0$ .

设  $a = +\infty$ , 则对  $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$  取  $n \rightarrow \infty$  的极限, 得  $+\infty < 1$ , 这是不可能的. 故  $a < +\infty$ .

对不等式  $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1 < \ln x_n + \frac{1}{x_n}$  取极限, 得  $\ln a + \frac{1}{a} = 1$ . 由第一段知  $a = 1$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

例 13 证明:  $\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $p > 1$ .

证 引入辅助函数  $f(x) = x^p + (1-x)^p$ , 则

$$f'(x) = p[x^{p-1} - (1-x)^{p-1}] \Rightarrow \text{稳定点 } x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{又 } f''(x) = p(p-1)[x^{p-2} + (1-x)^{p-2}] > 0.$$

故  $x = \frac{1}{2}$  为  $f(x)$  在  $(0, 1)$  的惟一极值点, 且有极小值  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p-1}}$ . 而  $f(0) = f(1) = 1$  为  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上最大值, 于是

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1.$$

例 14 (1) 求函数  $f(x) = x^3 - px + q$  ( $p > 0$ ) 的极值点与极值; (2) 求方程  $x^3 - px + q = 0$  ( $p > 0$ ) 的三个实根的条件.

解 (1) 因为  $f'(x) = 3x^2 - p$ , 所以稳定点为  $x = \pm \sqrt{p/3}$ . 又  $f''(x) = 6x$ , 知  $f''(\sqrt{p/3}) > 0$ ,  $f''(-\sqrt{p/3}) < 0$ , 则  $f(x)$  在  $x = \sqrt{p/3}$  有极小值  $f(\sqrt{p/3}) = -2\left(\frac{p}{3}\right)^{3/2} + q$ ; 在  $x = -\sqrt{p/3}$

有极大值  $f(-\sqrt{p/3}) = 2\left(\frac{p}{3}\right)^{3/2} + q$ .

(2) 因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ , 所以若极小值  $f(\sqrt{p/3}) < 0$ , 极大值  $f(-\sqrt{p/3}) > 0$ , 则  $f(x) = 0$  有三个根, 分别在区间

$$(-\infty, -\sqrt{p/3}), (-\sqrt{p/3}, \sqrt{p/3}), (\sqrt{p/3}, +\infty),$$

要满足条件  $-2\left(\frac{p}{3}\right)^{3/2} < q < 2\left(\frac{p}{3}\right)^{3/2}$ , 可简化为  $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3$ .

**例 15** 设在  $[0, a]$  上  $|f''(x)| \leq M$ , 且  $f'(x)$  在  $(0, a)$  内有极大值, 证明:  $|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma$ .

**证** 设  $f(x)$  在点  $c \in (0, a)$  有极大值, 则  $f'(c) = 0$ . 对  $f'(x)$  在  $[0, c], [c, a]$  上分别应用拉格朗日中值定理, 有

$$f'(c) - f'(0) = cf''(\xi_1), \xi_1 \in (0, c),$$

$$f'(a) - f'(c) = (a - c)f''(\xi_2), \xi_2 \in (c, a).$$

由  $f'(c) = 0$  知,  $f'(0) = -cf''(\xi_1)$ ,  $f'(a) = (a - c)f''(\xi_2)$ . 故

$$\begin{aligned} |f'(0)| + |f'(a)| &= c|f''(\xi_1)| + (a - c)|f''(\xi_2)| \\ &\leq cM + (a - c)M = aM. \end{aligned}$$

**例 16** 设  $x_1 x_2 = a$  (常数), 且  $x_1 > 0, x_2 > 0$ , 求  $x_1^m + x_2^n$  的最小值 ( $m > 0, n > 0$ ).

**解** 因为  $x_1 x_2 = a$ , 所以

$$f(x_1) = x_1^m + (a/x_1)^n,$$

$$f'(x_1) = mx_1^{m-1} - na^n x_1^{-n-1} = (mx_1^{m+n} - na^n)/x_1^{n+1}.$$

令  $f'(x_1) = 0$ , 有惟一驻点  $x_{10} = (na^n/m)^{1/(m+n)}$ .

当  $0 < x_1 < (na^n/m)^{1/(m+n)}$  时,  $f'(x_1) < 0$ ; 当  $x_1 > (na^n/m)^{1/(m+n)}$  时,  $f'(x_1) > 0$ , 故  $x_{10}$  为  $f(x_1)$  的极小值点, 即最小值点. 最小值为

$$f(x_{10}) = f\left[\left(\frac{na^n}{m}\right)^{1/(m+n)}\right] = \left(\frac{n}{m}a^n\right)^{\frac{m}{m+n}} + \left[\frac{a}{(na^n/m)^{1/(m/n)}}\right]^n$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{n}{m} a^n \right)^{\frac{m}{m+n}} + \left[ \left( \frac{m}{n} \right)^{\frac{n}{m+n}} (a^n)^{\frac{m}{m+n}} \right] \\
&= \left[ \left( \frac{n}{m} \right)^{\frac{m}{m+n}} + \left( \frac{m}{n} \right)^{\frac{n}{m+n}} \right] a^{\frac{mn}{m+n}}.
\end{aligned}$$

例 17 证明不等式  $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ , 其中  $a \geq 0, b \geq 0, p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

证 令  $f(x) = x^{1/p} - \frac{x}{p}$ , 则

$$f'(x) = \frac{1}{p} \left( x^{\frac{1}{p}-1} \right) = \frac{1}{p} \left( x^{\frac{1}{q}} - 1 \right) = 0,$$

有惟一稳定点  $x = 1$ . 当  $0 < x < 1$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x > 1$  时,  $f'(x) < 0$ . 所以  $f(1) = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$  是极大值, 即  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上的最大值. 故

$$x^{\frac{1}{p}} - \frac{x}{p} \leq \frac{1}{q}.$$

令  $x = \frac{a^p}{b^q}$  代入 ( $b = 0$  时显然成立), 得

$$\frac{a}{b^{q/p}} - \frac{1}{p} \frac{a^p}{b^q} \leq \frac{1}{q} \Rightarrow a - \frac{1}{p} a^p b^{\frac{q}{p}-q} \leq \frac{1}{q} b^{\frac{q}{p}},$$

即  $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ .

(1) 利用本例可以证明赫尔德不等式

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{1/q},$$

其中  $a_k > 0, b_k > 0, p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, k = 1, 2, \dots, n$ .

只需设  $a = a_k / \left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p}, b = b_k / \left( \sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{1/q}$ , 代入例中不等式, 再将两边对  $k$  求和, 即可证得.

当  $p = q = 2$  时, 称柯西 - 施瓦兹公式

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right).$$

(2) 应用赫尔德不等式可以证明闵可夫斯基(Minkowski)不等式,有

$$\left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p\right]^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{1/q},$$

其中  $a_k \geq 0, b_k \geq 0, p > 1, k = 1, 2, \dots, n$ .

$$\begin{aligned} \text{由 } \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p &= \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)(a_k + b_k)^{p-1} \\ &= \sum_{k=1}^n a_k (a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^n b_k (a_k + b_k)^{p-1}, \end{aligned}$$

注意到  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, q(p-1) = p$ , 应用赫尔德不等式,有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p &\leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p} \left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^{q(p-1)}\right]^{1/q} \\ &\quad + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{1/p} \left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^{q(p-1)}\right]^{1/q} \\ &= \left[\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{1/p}\right] \left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p\right]^{1/q} \end{aligned}$$

变形即得闵可夫斯基不等式.

## 第五节 函数的凸性与拐点

### 主要内容

1. 设  $f$  是区间  $I$  上的函数,  $\forall x_1, x_2 \in I$ . 和  $\lambda \in (0, 1)$ . 恒有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

(取“ $<$ ”称严格凸)则称  $f$  为  $I$  上的凸函数. 若恒有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

(取“ $>$ ”称严格凹)则称  $f$  为  $I$  上的凹函数.

2.  $f$  为  $I$  上凸函数  $\Leftrightarrow I$  上任意三点  $x_1 < x_2 < x_3$ , 总有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

3. 设  $f$  在区间  $I$  上可导, 则下述论述等价:

(1)  $f$  为  $I$  上凸函数; (2)  $f'$  为  $I$  上递增函数;

(3)  $f$  定义在区间  $I$  上,  $\forall x_1, x_2 \in I$ .

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

4. 设  $f$  在  $I$  上二阶可导,  $f$  为  $I$  上凸函数  $\Leftrightarrow$  在  $I$  上  $f''(x) \geq 0$ .

5. 詹森(Jensen)不等式 若  $f$  为  $[a, b]$  上凸函数, 对任意  $x_i$

$\in [a, b], \lambda_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 且  $(\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1)$ , 有

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)\right).$$

6. 若  $y = f(x)$  的曲线在点  $(x_0, f(x_0))$  处有切线穿过, 且在切点两侧的曲线分别是严格凸和严格凹的, 则称点  $(x_0, f(x_0))$  为曲线的拐点.

7. 若  $f$  在  $x_0$  二阶可导, 则  $(x_0, f(x_0))$  为  $y = f(x)$  的曲线拐点的必要条件是  $f''(x_0) = 0$ .

8. 若  $f$  在  $x_0$  可导, 在  $U^\circ(x_0)$  内二阶可导, 且在  $U_+^\circ(x_0)$  和  $U_-^\circ(x_0)$  上  $f''(x)$  的符号相反, 则  $(x_0, f(x_0))$  为  $y = f(x)$  曲线的拐点.

## 疑 难 解 析

1. 叙述  $f(x)$  在区间  $I$  上是凸函数的等价命题.

答  $f(x)$  在区间  $I$  上是凸函数的定义共有三种形式:

(1)  $f(x)$  在区间  $I$  上可导, 曲线  $f(x)$  位于曲线上任意点

$(x, f(x))$  的切线上方. 即  $\forall x_1, x_2 \in I$ , 有

$$f(x_2) \geq f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1).$$

(2) 设函数  $f(x)$  在区间  $I$  上连续,  $\forall x_1, x_2 \in I$ , 有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

(3) 设函数  $f(x)$  在区间  $I$  上有定义,  $\forall x_1, x_2 \in I$  与  $\lambda \in (0, 1)$ , 有

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

将上式中的“ $\leq$ ”改为“ $<$ ”, 则为严格凸的定义.

其它等价命题还有:

(4) 主要内容之 2.

(5)  $f(x)$  在  $I$  上可导(或二阶可导),  $f'(x)$  在  $I$  上单调增加(或  $\forall x \in I, f''(x) > 0$ ).

## 方法、技巧与典型例题分析

例 1 设  $f(x), g(x)$  为  $(a, b)$  上的凸函数, 证明:

$$h(x) \triangleq \max\{f(x), g(x)\}$$

也是  $(a, b)$  上的凸函数.

证 利用凸函数定义. 设  $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ , 则  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ , 有

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &\leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \\ &\leq \lambda_1 h(x_1) + \lambda_2 h(x_2), \\ g(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &\leq \lambda_1 g(x_1) + \lambda_2 g(x_2) \\ &\leq \lambda_1 h(x_1) + \lambda_2 h(x_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } h(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= \max\{f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2), g(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\} \\ &\leq \lambda_1 h(x_1) + \lambda_2 h(x_2). \end{aligned}$$

所以  $h(x)$  为凸函数.

例 2 设  $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \pi$ , 证明:

$$\sin\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) > \frac{1}{n}(\sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_n).$$

证 令  $f(x) = -\sin x, x \in (0, \pi)$ , 则

$$f'(x) = -\cos x, \quad f''(x) = \sin x > 0,$$

故  $f(x)$  是  $(0, \pi)$  上的严格凸函数, 由詹森不等式

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) < \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)],$$

即得欲证等式.

例 3 利用  $f(x) = -\ln x (x > 0)$  是凸函数, 证明:

(1)  $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$ , 其中  $x_i > 0, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ ;

(2) 当  $x_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$  时, 有

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

证 (1) 因为  $f(x) = -\ln x (x > 0)$  是凸函数, 所以詹森不等式  $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$  成立. 即

$$\begin{aligned} & -\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \\ & \leq -[\lambda_1 \ln x_1 + \lambda_2 \ln x_2 + \cdots + \lambda_n \ln x_n] \\ & \Rightarrow -\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq -\ln(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}) \\ & \Rightarrow \ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \geq \ln(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}), \end{aligned}$$

从而  $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$ .

(2) 在题(1)中令  $\lambda_i = \frac{1}{n}$ , 则

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

又对  $f(x) = -\ln x (x > 0)$ , 取  $x_i > 0$ , 则  $\frac{1}{x_i} > 0, i = 1, 2, \cdots,$

$n$ . 由詹森不等式



$$f\left(\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \left[ f\left(\frac{1}{x_1}\right) + f\left(\frac{1}{x_2}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{x_n}\right) \right]$$

得

$$\begin{aligned}
 & -\ln \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \\
 & \leq -\frac{1}{n} \left[ \ln \frac{1}{x_1} + \ln \frac{1}{x_2} + \cdots + \ln \frac{1}{x_n} \right], \\
 & \ln \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \ln \left( \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n} \right)^{1/n}, \\
 & \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \left( \frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_n} \right)^{1/n}, \\
 & \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.
 \end{aligned}$$

综合题(1)、题(2),即得欲证不等式.

例4(詹森不等式) 证明:若 $f$ 为 $[a, b]$ 上凸函数,  $\forall x_i \in [a, b], \lambda_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ , 且  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , 则

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

证 用数学归纳法.

当 $n = 2$ 时,由定义(主要内容1)知命题成立.

设 $n = k$ 时,命题成立.即

$$f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_i), \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1.$$

当 $n = k + 1$ 时,  $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$ , 则

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i x_i + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= f\left[\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i x_i + (\lambda_k + \lambda_{k+1})\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} x_k + \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} x_{k+1}\right)\right] \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i f(x_i) + (\lambda_k + \lambda_{k+1}) f\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} x_k + \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} x_{k+1}\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i f(x_i) + (\lambda_k + \lambda_{k+1}) \left[\frac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} f(x_k) + \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} f(x_{k+1})\right] \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i f(x_i) + \lambda_k f(x_k) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(x_i).
\end{aligned}$$

所以,对任意的  $n$ , 都有

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i), \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

**例 5 证明:**

(1) 若  $f, g$  都是  $I$  上的凸函数, 则  $\alpha f + \beta g$  也是凸函数, 其中  $\alpha, \beta$  是正实数.

(2) 若  $f, g$  是  $I$  上非负凸函数, 且  $f$  与  $g$  在  $I$  上都是严格单调增加(或单调减少)的, 则  $f \cdot g$  是  $I$  上的凸函数.

(3) 设  $f: I_1 \rightarrow I_2$  与  $g: I_2 \rightarrow \mathbf{R}$  都是凸函数, 且  $g$  严格单调增加, 则  $g \circ f$  是  $I_1$  上的凸函数.

**证** (1) 因为  $f, g$  都是  $I$  上的凸函数, 则  $\forall x_1, x_2 \in I$  和  $\forall \lambda \in (0, 1)$ , 有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda g(x_1) + (1 - \lambda)g(x_2),$$

$$\begin{aligned}
\text{故} \quad &\alpha f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) + \beta g(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \\
&\leq \lambda(\alpha f(x_1) + \beta g(x_1)) + (1 - \lambda)(\alpha f(x_2) + \beta g(x_2)).
\end{aligned}$$

其中  $\alpha, \beta$  为正常数, 故  $\alpha f + \beta g$  也是凸函数.

(2) 设  $f, g$  在  $I$  上严格单调增加(单调减少类似可证),  $f'(x) > 0, g'(x) > 0$ . 并有  $f(x) > 0, g(x) > 0$ . 则  $\forall x_1, x_2 \in I$ , 不妨设  $x_2 > x_1$ , 有

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1),$$

$$g(x_2) \geq g(x_1) + g'(x_1)(x_2 - x_1).$$

因为  $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ , 所以

$$\begin{aligned} f(x_2)g(x_2) &\geq f(x_1)g(x_1) + f'(x_1)g(x_1)(x_2 - x_1) \\ &\quad + f(x_1)g'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_1)g'(x_1)(x_2 - x_1)^2 \\ &\geq f(x_1)g(x_1) \\ &\quad + [f'(x_1)g(x_1) + f(x_1)g'(x_1)](x_2 - x_1). \end{aligned}$$

所以, 按等价定义(主要内容 3 中的(3)) 知,  $f \cdot g$  是凸函数.

(3) 因为  $f$  是凸函数, 则  $\forall x_1, x_2 \in I$  和  $\lambda \in (0, 1)$ , 有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

又由  $g(x)$  严格单调增加, 有

$$g[f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)] \leq g[\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)], \quad ①$$

而  $g$  为  $I_2 \rightarrow \mathbf{R}$  上凸函数, 有

$$\begin{aligned} &g[\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)] \\ &\leq \lambda g[f(x_1)] + (1 - \lambda)g[f(x_2)]. \end{aligned} \quad ②$$

由式 ①、式 ② 可得

$$g \circ f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \leq \lambda g \circ f(x_1) + (1 - \lambda)g \circ f(x_2).$$

所以  $f \circ g$  是  $I_1$  上的凸函数.

**例 6** 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  内可导,  $\forall x, y \in (a, b)$ , 且  $x < y$ ,  $\exists$  惟一的  $z \in (x, y)$ , 使  $f(y) - f(x) = f'(z)(y - x)$ , 证明:  $f(x)$  在  $(a, b)$  内是严格凸或严格凹的.

**证** 用反证法. 设函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内不是严格凸或严格凹的, 则  $\exists x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ , 且  $x_1 < x_2 < x_3$ , 对曲线  $y = f(x)$  上的三点  $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3))$ , 有

$$f(x_2) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1) + f(x_1),$$

$$f(x_2) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_3) + f(x_3),$$

或 
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3}.$$

即三个点  $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3))$  位于一条直线上. 依拉格朗日中值定理, 有

$$\frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi_1), \xi_1 \in (x_1, x_2),$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\xi_2), \xi_2 \in (x_2, x_3).$$

显然  $\xi_1 \neq \xi_2$ , 这与只存在一个  $\eta$ , 使  $\frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3} = f'(\eta)$  矛盾.

所以  $f(x)$  在  $(a, b)$  内是严格凸或严格凹的.

例 7 设  $a_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$  不全相等, 证明:

$$(1) \quad x \frac{a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + \dots + a_n^x \ln a_n}{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x} - \ln \frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n} > 0;$$

$$(2) \quad f(x) = \left( \frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{1/x} \text{ 在 } (-\infty, +\infty) \text{ 严格单调增加};$$

$$(3) \quad \arctan(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n) \geq \lambda_1 \arctan a_1 + \lambda_2 \arctan a_2 + \dots + \lambda_n \arctan a_n.$$

证 (1) 考虑函数  $f(x) = x \ln x$ , 则  $f'(x) = 1 + \ln x, f''(x) = 1/x > 0 (x < 0)$ , 所以  $f(x) = x$  是  $(0, +\infty)$  上的凸函数, 又  $a_i^x (i = 1, 2, \dots, n)$  不全相等, 所以由詹森不等式, 有

$$f\left(\frac{a_1^x + \dots + a_n^x}{n}\right) < \frac{1}{n} f(a_1^x) + \dots + \frac{1}{n} f(a_n^x).$$

将  $f(x)$  代入, 即得所证等式.

(2) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$  (类似第二节例 9), 再补充定义  $f(0) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ , 则函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续. 当  $x \neq 0$  时, 有

$$\begin{aligned} [\ln f(x)]' &= \frac{f'(x)}{f(x)} \\ &= \frac{1}{x^2} \left[ x \frac{a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + \dots + a_n^x \ln a_n}{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x} - \ln \frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n} \right]. \end{aligned}$$

由  $f(x) > 0$  及上例知, 当  $x \neq 0$  时,  $f'(x) > 0$ , 故  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上严格单调增加.

(3) 考虑函数  $f(x) = -\arctan x, x \in (0, +\infty)$ , 则  $f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}, f''(x) = \frac{2x}{1+x^2} > 0 (x > 0)$ . 即  $f(x)$  为  $(0, +\infty)$  上的凸函数. 由詹森不等式(即将  $f(x)$  代入), 得

$$\begin{aligned} & \arctan(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n) \\ & \geq \lambda_1 \arctan a_1 + \lambda_2 \arctan a_2 + \cdots + \lambda_n \arctan a_n. \end{aligned}$$

例 8 设  $a, b, x, y$  都是正数, 证明:

$$x \ln \frac{x}{a} + y \ln \frac{y}{b} \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{a+b}.$$

证 设  $f(x) = x \ln x (x > 0)$ , 则  $f'(x) = 1 + \ln x, f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ , 所以  $f(x)$  为凸函数, 有

$$\frac{x+y}{a+b} \ln \frac{x+y}{a+b} \leq \frac{x}{a+b} \ln \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a+b} \ln \frac{y}{a+b}.$$

故  $(x+y) \ln \frac{x+y}{a+b} \leq x \ln \frac{x}{a+b} + y \ln \frac{y}{a+b} \leq x \ln \frac{x}{a} + y \ln \frac{y}{b}$ .

例 9 利用函数的凸性, 证明:

$$(1) \frac{1}{2}(x^n + y^n) > \frac{x^n + y^n}{2}, \quad x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1;$$

$$(2) \frac{1}{2}(e^x + e^y) > e^{(x+y)/2}, \quad x \neq y.$$

证 (1) 设  $f(x) = x^n$ , 则  $f'(t) = nt^{n-1}, f''(t) = n(n-1)t^{n-2}$ . 当  $n > 1$  时,  $f''(t) > 0 (t > 0)$ , 所以  $f(t)$  为凸函数, 依定义, 有

$$f(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) < \lambda f(t_1) + (1-\lambda)f(t_2).$$

令  $t_1 = x, t_2 = y, \lambda = 1/2$ , 即得

$$\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \frac{x^n + y^n}{2}.$$

(2) 设  $f(t) = e^t$ , 则  $f'(t) = e^t, f''(t) = e^t > 0$ , 所以  $f(t)$  为凸函数, 同题(1), 取  $t_1 = x, t_2 = y, \lambda = 1/2$ , 即得

$$(e^x + e^y)/2 > e^{(x+y)/2}, x \neq y.$$

**例10** 设概率曲线  $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$  在点  $x = \pm \sigma$  处有拐点 ( $\sigma > 0, h > 0$ ),  $h$  和  $\sigma$  有何关系?

**解** 因  $y' = \frac{-2h^3 x}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}, y'' = \frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} (2h^2 x^2 - 1) e^{-h^2 x^2}$ , 令  $y'' = 0$ , 可得  $x_0 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2h}$ . 讨论  $x_0$  与  $x$  的值, 知:

当  $|x| < |x_0|$  时,  $y'' < 0$ ; 当  $|x| > |x_0|$  时,  $y'' > 0$ . 所以, 当  $x_0 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2h} = \pm \sigma$  时,  $y$  的曲线有拐点, 即  $h = \frac{\sqrt{2}}{2\sigma}$ .

**例11** 确定  $y = k(x^2 - 3)^2$  中  $k$  的值, 使曲线在拐点处的法线通过原点.

**解** 因为

$y' = 2k(x^2 - 3) = 4kx^2 - 12kx, y'' = 12k(x + 1)(x - 1)$ , 所以  $x_{1,2} = \pm 1$  可能是拐点. 讨论  $y''$  的表达式, 知  $y''$  在  $x_{1,2} = \pm 1$  两侧异号, 所以  $x_{1,2} = \pm 1$  确为拐点横坐标. 拐点为  $(1, 4k)$  和  $(-1, 4k)$ .

在点  $(1, 4k)$  处切线斜率  $k_1 = -8k$ , 法线方程是  $y - 4k = \frac{1}{8k}(x - 1)$ . 将原点坐标  $(0, 0)$  代入, 得

$$-4k = -\frac{1}{8k} \Rightarrow k = \pm \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

在点  $(-1, 4k)$  处, 类似可得相同结果.

故当  $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{8}$  时, 曲线  $y = k(x^2 - 3)^2$  在拐点处的法线通过原点.

**例12** 确定曲线  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  中的  $a, b, c, d$  的值, 使  $x = -2$  为稳定点,  $(1, -10)$  为拐点, 且  $(-2, 44)$  在曲线上.

**解** 由题给条件列出方程组求解.

$$\begin{cases} -8a + 4b - 2c + d = 44, \\ a + b + c + d = -10, \\ 12a - 4b + c = 0 \ (y' = 0), \\ 6a + 2b = 0 \ (y'' = 0), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = -3, \\ c = -24, \\ d = 16. \end{cases}$$

例 13 证明: 曲线  $y = \frac{x-1}{x^2+1}$  的三个拐点在同一直线上.

证 因为  $y' = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2},$

$$y'' = \frac{2(x+1)[x-(2-\sqrt{3})][x-(2+\sqrt{3})]}{(x^2+1)^3},$$

所以  $x_1 = -1, x_2 = 2 - \sqrt{3}, x_3 = 2 + \sqrt{3}$  时,  $y'' = 0$ .

经考察, 在  $(-\infty, -1)$  内,  $y'' < 0$ ; 在  $(-1, 2 - \sqrt{3})$  内,  $y'' > 0$ ; 在  $(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$  内,  $y'' < 0$ ; 在  $(2 + \sqrt{3}, +\infty)$  内,  $y'' > 0$ . 故点  $A(-1, -1), B\left(2 - \sqrt{3}, \frac{1 - \sqrt{3}}{4(2 - \sqrt{3})}\right), C\left(2 + \sqrt{3}, \frac{1 + \sqrt{3}}{4(2 + \sqrt{3})}\right)$  是曲线的拐点.

可以算得直线  $AB$  与  $BC$  的斜率为

$$k_{AB} = \frac{(1 - \sqrt{3})/[4(2 - \sqrt{3})] - (-1)}{(2 - \sqrt{3}) - (-1)}$$

$$= \frac{(9 - 5\sqrt{3})(9 + 5\sqrt{3})}{24} = \frac{1}{4},$$

$$k_{BC} = \frac{(1 + \sqrt{3})/[4(2 + \sqrt{3})] - (-1)}{(2 + \sqrt{3}) - (-1)}$$

$$= \frac{(9 + 5\sqrt{3})(9 - 5\sqrt{3})}{24} = \frac{1}{4}.$$

两直线斜率相同, 且都经过  $B$  点, 所以  $A, B, C$  三个拐点在一条直线上.

## 第五章 不定积分

### 第一节 不定积分的概念与基本公式

#### 主要内容

1. 设函数  $F$  与  $f$  在区间  $I$  上都有定义, 且在  $I$  上  $F'(x) = f(x)$ , 则称  $F$  为  $f$  在区间  $I$  上的一个原函数.

2. (原函数存在定理) 若函数  $f$  在区间  $I$  上连续, 则  $f$  在  $I$  上存在原函数  $F$ .

3. 设  $F$  是  $f$  在区间  $I$  上的一个原函数, 则

(1)  $F + c$  也是  $f$  的一个原函数, 其中  $c$  为任意常数;

(2)  $f$  的任意两个原函数至多相差一个任意常数.

4. 函数  $f$  在区间  $I$  上的全体原函数称为  $f$  在  $I$  上的不定积分, 记作  $\int f(x)dx = F(x) + c$ .

不定积分的几何意义是: 若  $F$  是  $f$  的一个原函数, 则  $y = F(x)$  的图像称为  $f$  的一条积分曲线, 任一条积分曲线在横坐标相同点处的切线都是互相平行的.

5. 不定积分的基本公式:

$$(1) \int 0 dx = c; \quad (2) \int dx = x + c;$$

$$(3) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1, x > 0);$$

$$(4) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c; \quad (5) \int e^x dx = e^x + c;$$



$$\begin{aligned}
(6) \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + c; & (7) \int \cos x dx &= \sin x + c; \\
(8) \int \sin x dx &= -\cos x + c; & (9) \int \sec^2 x dx &= \tan x + c; \\
(10) \int \csc^2 x dx &= -\cot x + c; \\
(11) \int \sec x \tan x dx &= \sec x + c; \\
(12) \int \csc x \cot x dx &= -\csc x + c; \\
(13) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + c; \\
(14) \int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x + c; \\
(15) \int \ln x dx &= x \ln x - x + c; \\
(16) \int \tan x dx &= \ln |\sin x| + c; \\
(17) \int \sec x dx &= \ln |\sec x + \tan x| + c.
\end{aligned}$$

公式(17) 还有其它形式, 不再一一列出.

## 6. 不定积分的运算法则

$$(1) \int (f \pm g) dx = \int f dx \pm \int g dx; \quad (2) \int k f dx = k \int f dx.$$

## 疑 难 解 析

1. 为什么说微分运算“d”与不定积分运算构成一对逆运算?

答 从原函数和不定积分定义可以看到:  $F(x)$  是  $f(x)$  一个原函数, 则  $F'(x) = f(x)$ .  $f(x)$  的不定积分  $\int f(x) dx = F(x) + c$ . 所以, 有

$$d\left[\int f(x) dx\right] = f(x) dx, \quad \int dF(x) = F(x) + c.$$

即“先积后微, 作用抵消; 先微后积, 抵消加  $c$ ”, 故知微分与不定积

分构成一对逆运算.

## 方法、技巧与典型例题分析

在计算不定积分时,要注意任意常数  $c$ . 当积分结果中含有  $c$  时,结果表示全体原函数;不含  $c$  时,只表示一个原函数. 一般地,若一个不定积分可化为几个积分时,在积分号全部去掉后添加一个  $c$  即可.

### 一、不定积分的基本概念

读者必须十分清楚函数、原函数、不定积分之间的联系与区别,在辨析问题时能够熟练地运用. 对于涉及基本概念的问题,只能利用定义和以前学过的连续与导数概念来考察和研究. 对分段函数和绝对值函数尤应注意.

例 1 判断下列  $F(x)$  是否  $f(x)$  的原函数,并说明为什么.

$$(1) F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$(2) F(x) = \begin{cases} x^3 + x + 1, & x > 0, \\ x^2, & x \leq 0. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & x > 0, \\ 2x, & x \leq 0. \end{cases}$$

解 (1)  $F(x)$  是  $f(x)$  的原函数. 因为当  $x \neq 0$  时,有

$$F'(x) = f(x),$$

$$\begin{aligned} F'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0), \end{aligned}$$

所以恒有  $F'(x) = f(x)$ . 但  $f(x)$  却不是连续函数,  $f(x)$  在  $x = 0$

处有一个第二类间断点.

(2)  $F(x)$  不是  $f(x)$  的原函数. 因为  $F(x)$  不连续, 所以在不连续点  $x = 0$  必不可导, 不存在  $F'(0) = f(0)$ .

但当  $x \neq 0$  时, 恒有  $F'(x) = f(x)$ , 所以  $F(x)$  在  $(-\infty, 0)$  和  $(0, +\infty)$  上是  $f(x)$  的原函数.

**例 2** 一曲线通过点  $(e^2, 3)$ , 且在曲线上任一点处切线的斜率都等于该点横坐标的倒数, 求该曲线的方程.

**解** 设曲线方程为  $y = f(x)$ , 则依题设有  $y' = \frac{1}{x}$ , 于是

$$y = \int \frac{1}{x} dx + c = \ln x + c,$$

且  $3 = \ln e^2 + c = 2 + c \Rightarrow c = 1$ .

所以, 曲线方程为  $y = \ln x + 1$ .

**例 3** 证明:

$$\int \left[ \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right] dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{f(x)}{f'(x)} \right]^2 + c.$$

**证** 因为

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{f(x)}{f'(x)} \right]^2 + c \right\}' &= \frac{f(x)}{f'(x)} \cdot \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \\ &= \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}, \end{aligned}$$

所以, 命题成立.

**例 4** 设  $y = y(x)$  是由方程  $y^2(x - y) = x^2$  所确定的隐函数, 计算不定积分  $\int \frac{1}{y^2} dx$ .

**解** 设  $y = tx$ , 则由参数方程得

$$t^2 x^2 (x - tx) = x^2 \Rightarrow x = \frac{1}{t^2(1-t)},$$

$$dx = \frac{3t-2}{t^3(1-t)^2} dt, \quad y = \frac{1}{t(1-t)}.$$

$$\text{故 } \int \frac{dy}{y^2} = \int [t(1-t)]^2 \cdot \frac{3t-2}{t^3(1-t)^2} dt = \int \left( 3 - \frac{2}{t} \right) dt$$

$$= 3t - 2\ln t + c = \frac{3y}{x} - 2\ln \frac{y}{x} + c.$$

例5 设  $f(x)$  的原函数  $F(x) > 0$ , 且  $F(0) = 1$ . 当  $x \geq 0$  时, 有  $f(x)F(x) = \sin^2 2x$ , 求  $f(x)$ .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int f(x)F(x)dx &= \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 4x) dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{8} \sin 4x + c. \end{aligned}$$

$$\text{又} \quad \int f(x)F(x)dx = \int F(x)dF(x) = \frac{1}{2}F^2(x) + c,$$

$$\text{故} \quad F^2(x) = x - \frac{1}{4} \sin 4x + c.$$

即  $F(x) = \sqrt{x - \frac{1}{4} \sin 4x + c}$ , 由  $F(0) = 1 \Rightarrow c = 1$ . 所以

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[ \sqrt{x - \frac{1}{4} \sin 4x + 1} \right]' \\ &= (1 - \cos 4x) / \left[ 2 - \sqrt{x - \frac{1}{4} \sin 4x + 1} \right]. \end{aligned}$$

例6 设单调的连续函数  $y = f(x)$  和  $x = \phi(y)$  互为反函数, 且  $\phi(y) > 0$ , 证明:

$$\int \sqrt{f'(x)} dx = \int \sqrt{\phi'(y)} dy.$$

证 由反函数求导法则知  $f'(x) = \frac{1}{\phi'(y)}$ ,  $dx = \phi'(y)dy$ , 故

$$\int \sqrt{f'(x)} dx = \int \sqrt{1/\phi'(y)} \phi'(y) dy = \int \sqrt{\phi'(y)} dy.$$

例7 已知  $f(x)$  的一个原函数为  $\frac{\sin x}{1 + x \sin x}$ , 计算  $\int f(x)f'(x)dx$ .

解 因为  $\int f(x)f'(x)dx = \int f(x)df(x) = \frac{1}{2}f^2(x) + c$ , 而

$$f(x) = \left[ \frac{\sin x}{1 + \sin x} \right]' = \frac{\cos x - \sin^2 x}{(1 + \sin x)^2},$$

所以  $\int f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{\cos x - \sin^2 x}{(1 + x \sin x)^2} \right]^2 + c.$

例 8 已知  $\int f(x)dx = x^2 + c$ , 计算  $\int xf(1-x^2)dx.$

解 由题设知,  $f(x) = (x^2 + c)' = 2x$ , 故

$$f(1-x^2) = 2(1-x^2).$$

于是 
$$\begin{aligned} \int xf(1-x^2)dx &= \int x \cdot 2(1-x^2)dx \\ &= \int (2x - 2x^3)dx = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + c. \end{aligned}$$

例 9 已知  $f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x$ , 求  $f(x)$ ,  $0 < x < 1$ .

解 
$$\begin{aligned} f'(\sin^2 x) &= 1 - 2\sin^2 x + \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} \\ \Rightarrow f'(x) &= 1 - 2x + \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 2x. \end{aligned}$$

故 
$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)dx = \int \left( \frac{1}{1-x} - 2x \right) dx \\ &= -\ln(1-x) - x^2 + c, \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

例 10 设  $f'(x) = e^{-x}$ , 计算  $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx.$

解 由  $f(x) = e^{-x}$  知,  $f'(x) = -e^{-x}$ , 得

$$f'(\ln x) = -e^{-\ln x} = -\frac{1}{x},$$

则 
$$\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx = \int \frac{-1/x}{x} dx = \int -\frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} + c.$$

例 11 计算  $\int |x| dx.$

解 先分别讨论, 再加以综合.

当  $x > 0$  时,  $\int |x| dx = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c_1;$

当  $x < 0$  时,  $\int |x| dx = -\int x dx = -\frac{x^2}{2} + c_2.$

因为  $|x|$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 所以  $|x|$  的原函数  $\int |x| dx$  也在  $(-\infty, +\infty)$  上连续. 故

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x_2/2 + c_1) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x_2/2 + c_2) \Rightarrow c_1 = c_2,$$

于是 
$$\int |x| dx = \frac{|x|x}{2} + c.$$

**例 12** 已知  $F(x) = f(x) - \frac{1}{f(x)}$ ,  $G(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)}$ ,  
若  $f'(x) = [G(x)]^2$ , 且  $f(\pi/4) = 1$ , 求  $f(x)$ .

**解** 先求  $f'(x)$  的表达式. 由题设得

$$F'(x) = f'(x) + \frac{f'(x)}{f^2(x)} = f'(x) \left( \frac{f^2(x) + 1}{f^2(x)} \right),$$

又  $F'(x) = [G(x)]^2 = \left[ f(x) + \frac{1}{f(x)} \right]^2 = \left[ \frac{f^2(x) + 1}{f(x)} \right]^2,$

故  $f'(x) \left( \frac{1 + f^2(x)}{f^2(x)} \right) = \frac{(f^2(x) + 1)^2}{f^2(x)} \Rightarrow f'(x) = 1 + f^2(x).$

即 
$$\frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} = 1.$$

将等式两边对  $x$  积分, 得

$$\int \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} dx = \int \frac{1}{1 + f^2(x)} df(x) = \arctan f(x) = x + c.$$

所以 
$$f(x) = \tan(x + c).$$

由  $f(\pi/4) = 1 \Rightarrow \pi/4 + c = \pi/4 \Rightarrow c = 0$ . 故

$$f(x) = \tan x.$$

## 二、用基本公式与性质计算不定积分

**例 13** 计算下列积分:

(1)  $\int \tan^2 x dx;$

(2)  $\int \frac{1}{\sin^2 2x} dx;$

(3)  $\int (\cos^4 x + \sin^4 x) dx;$

(4)  $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx.$

**解** 要善于利用三角函数恒等式将函数变形, 使积分计算变得简单易行.

(1) 原式  $= \int (\sec^2 x - 1) dx = \int \sec^2 x dx - \int dx$   
 $= \tan x - x + c.$

$$(2) \text{ 原式} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{4} \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx \\ = \frac{1}{4} \left[ \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \frac{dx}{\sin^2 x} \right] = \frac{1}{4} (\tan x - \cot x) + c.$$

$$(3) \text{ 原式} = \int [(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\cos^2 x \sin^2 x] dx \\ = \int (1 - 2\sin^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int (3 + \cos 4x) dx \\ = \frac{1}{4} \left( 3x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) + c.$$

$$(4) \text{ 原式} = \int (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) dx \\ = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + c.$$

显然, 将题(3)积分式与题(4)积分式的和再乘以 1/2, 得

$$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{32} (12x + \sin 4x + 8\sin 2x) + c_1,$$

将题(3)积分式与题(4)积分式的差再乘以 1/2, 得

$$\int \sin^4 x dx = \frac{1}{32} (12x + \sin 4x - 8\sin 2x) + c_2.$$

**例 14** 计算下列积分:

$$(1) \int a^x e^x dx; \quad (2) \int (2^x - 3^x)^2 dx; \\ (3) \int e^x \left( a^x - \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx; \quad (4) \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx.$$

**解** (1) 原式 =  $\int (ae^x) dx = \frac{(ae)^x}{\ln(ae)} + c = \frac{(ae)^x}{1 + \ln a} + c.$

(2) 原式 =  $\int (4^x - 2 \cdot 6^x + 9^x) dx = \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{2 \cdot 6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + c.$

(3) 原式 =  $\int \left[ (ae)^x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right] dx \\ = \frac{(ae)^x}{1 + \ln a} - \arcsin x + c.$

(4) 原式 =  $\int \frac{(e^x + 1)(e^{2x} - e^x + 1)}{e^x + 1} dx = \int (e^{2x} - e^x + 1) dx$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + c.$$

例 15 计算下列积分:

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{dx}{(x+3)(x+7)}; & \quad (2) \int \frac{3x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 + 1} dx; \\ (3) \int \frac{dx}{x^2 - a^2}; & \quad (4) \int \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - 2x^2 + x - 2} dx. \end{aligned}$$

解 拆项、拼项是将复杂函数化为简单函数的常用手段,拆得巧妙,拼得合理,可以极大地简化积分计算,故分项积分是一种基本方法.

$$\begin{aligned} (1) \frac{1}{(x+3)(x+7)} &= \frac{1}{4} \frac{(x+7) - (x+3)}{(x+3)(x+7)} \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+7} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 原式} &= \frac{1}{4} \int \left( \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+7} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} [\ln|x+3| - \ln|x+7|] + c = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+3}{x+7} \right| + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{3x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 + 1} &= \frac{3x^2(x^2 + 1) - (x^2 + 1) + 2}{x^2 + 1} \\ &= 3x^2 - 1 + \frac{2}{x^2 + 1}, \end{aligned}$$

$$\text{故 原式} = \int \left( 3x^2 - 1 + \frac{2}{1+x^2} \right) dx = x^3 - x + 2\arctan x + c.$$

$$(3) \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right),$$

$$\text{故 原式} = \frac{1}{2a} \int \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c.$$

$$\begin{aligned} (4) \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - 2x^2 + x - 2} &= \frac{(x^2 + 1) + (x - 2)}{(x^2 + 1)(x - 2)} \\ &= \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2 + 1}, \end{aligned}$$

$$\text{故 原式} = \int \left( \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \ln|x-2| + \arctan x + c.$$

例 16 计算下列积分:



$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{2ax}}; \quad (2) \int (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x^3} - 1)dx;$$

$$(3) \int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx; \quad (4) \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx.$$

解 遇到根式函数,将式中根式化为分数指数幂,再利用幂函数积分公式计算积分.

$$(1) \text{ 原式} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \int x^{-1/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2a}} \left( \frac{1}{-1/2+1} \right) x^{-1/2+1} + c \\ = \sqrt{2x/a} + c.$$

$$(2) \text{ 原式} = \int (x^2 + x^{3/2} - x^{1/2} - 1) dx \\ = \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{2}{3} x^{3/2} - x + c.$$

$$(3) \text{ 原式} = \int (x^{-1/2} - 2x^{1/2} + x^{3/2}) dx \\ = 2x^{1/2} - \frac{4}{3} x^{3/2} + \frac{2}{5} x^{5/2} + c.$$

$$(4) \text{ 原式} = \int (1 - x^{-2}) x^{3/4} dx = \int (x^{3/4} - x^{-5/4}) dx \\ = \frac{4}{7} x^{7/4} + 4x^{-1/4} + c.$$

例 17 计算下列积分:

$$(1) \int \frac{x^3}{(x-1)^{100}} dx; \quad (2) \int \sin x \sin(x+a) dx.$$

$$\text{解} \quad (1) x^3 = [(x-1) + 1]^3 \\ = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1.$$

故

$$\text{原式} = \int \left[ \frac{1}{(x-1)^{97}} + \frac{3}{(x-1)^{98}} + \frac{3}{(x-1)^{99}} + \frac{1}{(x-1)^{100}} \right] dx \\ = - \left[ \frac{1}{96(x-1)^{96}} + \frac{3}{97(x-1)^{97}} + \frac{3}{98(x-1)^{98}} \right. \\ \left. + \frac{1}{99(x-1)^{99}} \right] + c.$$

(2)  $\sin x \sin(x+a) = \frac{1}{2}[\cos a - \cos(2x+a)]$ , 故

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{2} \int [\cos a - \cos(2x+a)] dx \\ &= \frac{1}{2} x \cos a - \frac{1}{4} \sin(2x+a) + c.\end{aligned}$$

例 18 已知  $y' = f'(x)$  的图形是一条开口向着  $y$  轴正向的二次抛物线, 与  $x$  轴交于  $x=0$  和  $x=2$  两点. 设  $f(x)$  有极大值 4 和极小值 0, 求  $f(x)$ .

解 由题设, 知  $f'(x) = ax(x-2)$  ( $a > 0$ ), 则

$$f(x) = \int ax(x-2)dx = ax^3/3 - ax^2 + c.$$

又当  $f'(x) = 0$  时, 有稳定点  $x=0$  和  $x=2$ , 则

$$f(0) = c, \quad f(2) = -4a/3 + c.$$

而  $f''(x) = 2a(x+1)$ , 有  $f''(0) = -2a < 0$ ,  $f''(2) = 2a > 0$ . 故  $f(0)$  为极大,  $f(2)$  为极小, 即

$$\begin{cases} c = 4, \\ -4a/3 + c = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 4, \\ a = 3. \end{cases}$$

所以

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4.$$

## 第二节 换元积分法与分部积分法

### 主要内容

1. 换元积分法 设  $u = \varphi(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 且  $\alpha < \varphi(x) < \beta$ ,  $g(u)$  在  $[\alpha, \beta]$  上有定义, 记

$$f(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x), \quad x \in [a, b].$$

(1) 第一换元法(也称凑微分法) 若  $g$  在  $[\alpha, \beta]$  上有原函数

$G$ , 则  $f$  在  $[a, b]$  上也有原函数  $F$ , 且  $F(x) = G(\varphi(x)) + c$  或

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left[ \int g(u)du \right]_{u=\varphi(x)} \\ &= G(\varphi(x)) + c.\end{aligned}$$

(2) 第二换元法 若  $\varphi'(x) \neq 0$ , 则当  $f$  在  $[a, b]$  上有原函数时,  $g$  在  $[\alpha, \beta]$  上也有原函数  $G$ , 且  $G(u) = F(\varphi^{-1}(u)) + c$  或

$$\begin{aligned}\int g(u)du &= \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left[ \int f(x)dx \right]_{x=\varphi^{-1}(u)} \\ &= F[\varphi^{-1}(u)] + c.\end{aligned}$$

2. 分部积分法 若  $u(x)$  与  $v(x)$  可导, 且不定积分  $\int u'(x)v(x)dx$  存在, 则  $\int u(x)v'(x)dx$  也存在, 且有

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

上式称为分部积分公式, 简记为  $\int u dv = uv - \int v du$ .

## 疑难解析

### 1. 使用换元法应注意哪些问题?

答 换元积分法也称变量替换法, 是计算不定积分的重要方法. 换元积分公式是复合函数求导公式的逆转, 可以解决一大类函数的不定积分问题.

(1) 第一换元法又称凑微分法, 它是将不定积分公式中被积函数分离, 用分离出的一部分与自变量的微分凑成一个新变量的微分, 而使被积函数中的余下部分化为新变量的函数, 于是原不定积分化为新变量的函数对新变量的不定积分. 即, 将不定积分  $\int f(x)dx$  中  $f(x)$  分离为  $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ , 使  $\varphi'(x)dx = du$  成为新变量的微分, 余下部分化为新变量的函数  $f[\varphi(x)] = g(u)$ , 故

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int g(u)du$$

$$= G(u) + c = G[\varphi(x)] + c.$$

要掌握第一换元法,读者必须牢记常用的求导数公式并能熟练运用复合函数的求导法则.

(2) 在第二换元法中引入一个新变量,使原不定积分中的自变量的微分化为一个新变量函数与新变量微分之积,而原被积函数也化为新变量的函数,于是两个新变量函数之积成为新的被积函数,得到一个新的不定积分. 即,对不定积分  $\int g(u)du$ , 令  $u = \varphi(x)$ , 则  $du = \varphi'(x)dx$ ,  $g(u) = g[\varphi(x)]$ . 得到新的被积函数  $g[\varphi(x)]\varphi'(x) = f(x)$ . 故

$$\begin{aligned}\int g(u)du &= \int g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(x)dx \\ &= F(x) + c = F[\varphi^{-1}(u)] + c.\end{aligned}$$

要掌握第二换元法也必须能熟练运用复合函数的求导法则,能引入恰当的新变量.

总之,换元法的关键是变量替换,技巧在于凑微分和引入新变量,目的是使新的不定积分比原不定积分易于求出.

## 2. 使用分部积分法的原则是什么?

答 分部积分法是两个函数乘积的导数公式的逆转,在认识公式

$$\int u dv = uv - \int v du$$

时要认识到:等式的意义是等号两边的全体原函数相等,而不是某一个原函数相等.

使用分部积分法的原则是:将  $\int f(x)dx$  中的  $f(x)dx$  化为  $u dv$ , 要求  $v = \int dv$  易于求得(最好是一眼即能看出), 要求  $\int v du$  要比  $\int u dv$  易于积出. 将  $f(x)dx$  化为恰当的  $u dv$  是分部积分的关键,也是技巧的体现. 一般地,当  $f(x)$  可以分解为两个函数的乘积时,

我们选择其中一个为  $u$ , 另一个与  $dx$  组成  $dv$ , 选择“ $u$ ”的优先次序是“反(三角函数)、对(数函数)、幂(函数)、三(角函数)、指(数函数)”. 次序选对了, 不定积分易于求出; 次序选错了, 则不定积分不能求出. 如

$$\int x e^x dx = \int x d e^x = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c,$$

而 
$$\int x e^x dx = \int e^x d \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x dx.$$

积分反而越来越复杂了.

## 方法、技巧与典型例题分析

### 一、换元积分法的应用

换元积分法分第一换元法与第二换元法, 第一换元法的关键在于凑微分. 凑得巧妙, 不定积分就易于求出; 否则求积分就比较困难. 但一般地, 使用第一换元法时不写出中间的替换变量, 做题者心中有数就可以了. 常用的凑微分形式有:

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b) d(ax+b),$$

$$\int f(x^n) x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \int f(x^n) dx^n,$$

$$\int f(\sin x) \cos x dx = \int f(\sin x) d \sin x,$$

$$\int f(\cos x) \sin x dx = - \int f(\cos x) d \cos x,$$

$$\int f(e^x) e^x dx = \int f(e^x) d e^x,$$

$$\int f(\ln x) \frac{1}{x} dx = \int f(\ln x) d \ln x,$$

$$\int f(\tan x) \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int f(\tan x) d \tan x,$$

$$\int f(\cot x) \frac{1}{\sin^2 x} dx = - \int f(\cot x) d\cot x,$$

$$\int f(\arcsin x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int f(\arcsin x) d\arcsin x,$$

$$\int f(\arccos x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int f(\arccos x) d\arccos x,$$

$$\int f(\arctan x) \frac{1}{1+x^2} dx = \int f(\arctan x) d\arctan x,$$

$$\int f\left(x + \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = \int f\left(x + \frac{1}{x}\right) d\left(x + \frac{1}{x}\right),$$

$$\int f\left(x - \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int f\left(x - \frac{1}{x}\right) d\left(x - \frac{1}{x}\right).$$

一些较复杂的问题,有时要凑几次微分.

第二换元法一般是根据被积函数的特点和形式来选定代换形的,常用的有三角代换、双曲代换、根式代换、指数代数、倒代换等.具法的方法和技巧,我们将在例题中讲述.

事实上,较复杂的不定积分一般都不能用单一的方法求得,而需要使用多种方法积分.这种例子我们将在后面逐步引入.

例 1 用不同方法计算不定积分  $\int \sin 2x dx$ , 解释不同结果的合理性.

解 有三种解法:

$$I = 2 \int \sin x \cos x dx = 2 \int \sin x d\sin x = \sin^2 x + c_1,$$

$$I = 2 \int \sin x \cos x dx = -2 \int \cos x d\cos x = -\cos^2 x + c_2,$$

$$I = \frac{1}{2} \int \sin 2x d(2x) = -\cos 2x + c_3.$$

因为  $-\cos^2 x + c_2 = \sin^2 x - 1 + c_2$ , 所以, 当  $c_1 = c_2 - 1$  时, 前两式就相等了, 即前两结果只相差一个常数, 故在全体原函数的意义上是相等的.

$$\text{又} \quad -\frac{1}{2} \cos 2x + c_3 = -\frac{1}{2} (\cos^2 x - \sin^2 x) + c_3$$

$$= -\cos^2 x + \frac{1}{2} + c_3,$$

所以后两式也只相差一个常数,它们在全体原函数的意义上是相等的.

**例 2** 计算下列不定积分:

$$(1) \int \frac{dx}{(ax+b)^n}; \quad (2) \int \sqrt{a-bx} dx;$$

$$(3) \int \frac{2x-3}{x^2-3x+8} dx; \quad (4) \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}.$$

**解** 利用  $\int x^\mu dx = \frac{1}{\mu+1} x^{\mu+1} + c$ .

$$(1) I = \frac{1}{a} \int (ax+b)^{-n} d(ax+b) \\ = -\frac{1}{a(n-1)} (ax+b)^{1-n} + c.$$

$$(2) I = -\frac{1}{b} \int (a-bx)^{1/2} d(a-bx) = -\frac{2}{3b} (a-bx)^{3/2} + c.$$

利用  $\int \frac{1}{u} du = \ln u + c$ , 特别是分子的分子恰好是分母的导数时, 非常简便.

$$(3) I = \int \frac{d(x^2-3x+8)}{x^2-3x+8} = \ln|x^2-3x+8| + c.$$

$$(4) I = \int \frac{d \ln x}{\ln x \ln(\ln x)} = \int \frac{d \ln(\ln x)}{\ln(\ln x)} = \ln[\ln(\ln x)] + c.$$

**例 3** 计算下列不定积分:

$$(1) \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx; \quad (2) \int \frac{1}{x^4+x^2-6} dx;$$

$$(3) \int \tan \sqrt{1+x^2} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}; \quad (4) \int \frac{1}{x(x^6+4)} dx.$$

**解** 有时需要先将被积函数变形, 再进行恰当的变量替换.

$$(1) I = \int (a+x) \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \\ = a \cdot \arcsin \frac{x}{a} + \left(-\frac{1}{2}\right) \int (a^2-x^2)^{-1/2} d(a^2-x^2)$$

$$= a \cdot \arcsin \frac{x}{a} - (a^2 - x^2)^{1/2} + c.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad I &= \int \frac{1}{(x^2 - 2)(x^2 + 3)} dx = \frac{1}{5} \int \left( \frac{1}{x^2 - 2} - \frac{1}{x^2 + 3} \right) dx \\ &= \frac{1}{5} \int \left[ \frac{1}{(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})} - \frac{1}{3} \frac{1}{1 + (x/\sqrt{3})^2} \right] dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{20} \ln \left| \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} \right| - \frac{1}{15} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + c. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin \sqrt{1+x^2}}{\cos \sqrt{1+x^2}} \frac{dx^2}{2\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sin \sqrt{1+x^2}}{\cos \sqrt{1+x^2}} d\sqrt{1+x^2} \\ &= \int \frac{1}{\cos \sqrt{1+x^2}} d\cos \sqrt{1+x^2} = \ln |\cos \sqrt{1+x^2}| + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad I &= \frac{1}{4} \int \left( \frac{1}{x} - \frac{x^5}{x^6 + 4} \right) dx = \frac{1}{4} \ln |x| - \frac{1}{24} \int \frac{d(x^6 + 4)}{x^6 + 4} \\ &= \frac{1}{4} \ln |x| - \frac{1}{24} \ln |x^6 + 4| + c = \frac{1}{24} \ln \left| \frac{x^6}{x^6 + 4} \right| + c. \end{aligned}$$

**例 4** 计算下列不定积分:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int \frac{\ln(1+x) - \ln x}{x(x+1)} dx; & (2) \quad & \int \frac{x+1}{x(1+xe^x)} dx; \\ (3) \quad & \int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx; & (4) \quad & \int e^x \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx. \end{aligned}$$

**解** (1) 观察到分母两个因式与分子中两个因式相同, 所以分解分母的因式, 得

$$\begin{aligned} I &= \int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) [\ln(1+x) - \ln x] dx \\ &= - \int [\ln(1+x) - \ln x] d[\ln(1+x) - \ln x] \\ &= - \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln x]^2 + c = - \frac{1}{2} \ln^2 \left( 1 + \frac{1}{x} \right) + c. \end{aligned}$$

(2) 观察到分母中因式  $xe^x$  无法分解, 因此设法将含  $x$  的项都凑成  $xe^x$  形式, 得

$$I = \int \frac{e^x(x+1)}{xe^x(1+xe^x)} dx = \int \frac{dxe^x}{xe^x(1+xe^x)}$$



$$\begin{aligned}
&= \int \left( \frac{1}{xe^x} - \frac{1}{1+xe^x} \right) d(xe^x) = \ln \frac{xe^x}{1+xe^x} + c \\
&= x + \ln \frac{x}{1+xe^x} + c.
\end{aligned}$$

一般地,有凑微分形式

$$e^{ax}[\varphi(bx) + b\varphi'(bx)] = d[e^{ax}\varphi(bx)],$$

如  $\int e^x \left[ \frac{1}{x} + \ln x \right] dx = \int d(e^x \ln x) = e^x \ln x + c.$

(3) 当函数  $v(x) = xu'(x)$  时,有公式

$$\int [u(x) + v(x)] dx = \int d[xu(x)] = xu(x) + c.$$

在本例中令  $u(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ , 则  $xu'(x) = \frac{x}{1 + \cos x}$ ,

故 
$$\begin{aligned}
I &= \int \left( \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{x}{1 + \cos x} \right) dx = \int d \left( x \cdot \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) \\
&= \frac{x \sin x}{1 + \cos x} + c.
\end{aligned}$$

(4) 因为  $\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1}{1 + \cos x},$

而  $\frac{1}{1 + \cos x} = \left( \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)',$

所以由题(2)中凑微分形式得

$$\begin{aligned}
I &= \int e^x \left( \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x} \right) dx = \int d \left( \frac{e^x \sin x}{1 + \cos x} \right) \\
&= \frac{e^x \sin x}{1 + \cos x} + c.
\end{aligned}$$

**例 5** 计算下列不定积分:

(1)  $\int \frac{1}{\sqrt{1 + \sin x}} dx;$

(2)  $\int \frac{x^{2n-1}}{1 + x^n} dx;$

(3)  $\int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x \cos x} dx;$

(4)  $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}.$

**解** 认真观察被积函数,找出特点,进行变形,使积分易于计算.

(1) 进行变形,去掉根号再积分.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sin x}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{1+\cos(\pi/2-x)}} \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{2\cos^2(\pi/4-x/2)}} = -\sqrt{2} \int \frac{d(\pi/4-x/2)}{\cos(\pi/4-x/2)} \\ &= -\sqrt{2} \ln \left| \sec\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) \right| + c.\end{aligned}$$

(2) 由于分母含因式  $x^n$ , 进行变形, 化为对  $x^n$  的积分.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{2n-1}}{1+x^n} dx &= \int \frac{x^n \cdot x^{n-1}}{1+x^n} dx = \frac{1}{n} \int \frac{x^n + 1 - 1}{1+x^n} dx^n \\ &= \frac{1}{n} \int dx^n - \int \frac{d(x^n + 1)}{1+x^n} = \frac{x^n}{n} - \ln|x^n + 1| + c.\end{aligned}$$

(3) 利用三角函数之间的关系和  $d(\cos x + \sin x) = (\cos x - \sin x)dx$  积分. 即变形后, 考察分子是否为某函数的导数.

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x \cos x} dx &= \int \frac{2(\cos x + \sin x)}{1 + (\cos x + \sin x)^2} dx \\ &= 2 \int \frac{d(\cos x + \sin x)}{1 + (\cos x + \sin x)^2} = \arctan(\cos x + \sin x) + c.\end{aligned}$$

(4) 将被积函数变形重组, 巧妙地凑成微分.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} &= \int \frac{2d\sqrt{x-a}}{\sqrt{b-x}} \\ &= 2 \int \frac{d\sqrt{x-a}}{\sqrt{(\sqrt{b-a})^2 - (\sqrt{x-a})^2}} = 2\arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + c.\end{aligned}$$

从题(4)可以看出, 要想凑微分“凑”得巧妙, 使积分变得简单, 必须对复合函数求导方法和常用公式烂熟于心.

**例 6** 计算下列不定积分:

$$(1) \int \cos(\ln x) dx; \quad (2) \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx; \quad (3) \int e^{2x} \sin^2 x dx.$$

**解** 利用三角函数间的关系, 将不定积分“配对”然后解方程求出不定积分, 还可以得到一个配对的不定积分结果.

$$(1) \text{ 令 } I_1 = \int \cos(\ln x) dx, I_2 = \int \sin(\ln x) dx. \text{ 则}$$

$$I_1 + I_2 = \int [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int [x(\sin(\ln x))' + \sin(\ln x)] dx \quad (\text{由例 4(3) 中公式}) \\
&= \int d[x \sin(\ln x)] = x \sin(\ln x) + c_1, \\
I_1 - I_2 &= \int [\cos(\ln x) - \sin(\ln x)] dx \\
&= \int [\cos(\ln x) + x(\cos(\ln x))'] dx = \int d[x \cos(\ln x)] \\
&= x \cos(\ln x) + c.
\end{aligned}$$

解方程组, 即得  $I_1$  和  $I_2$

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} I_1 + I_2 = x \sin(\ln x) + c_1, \\ I_1 - I_2 = x \sin(\ln x) + c_2, \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} I_1 = \frac{x}{2} [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + c, \\ I_2 = \frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + c_0. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$(2) \text{ 令 } I_1 = \int \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x}, I_2 = \int \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x}, \text{ 则}$$

$$I_1 + I_2 = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int dx = x + c_1,$$

$$\begin{aligned}
-I_1 + I_2 &= \int \frac{-\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{d(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} \\
&= \ln |\sin x - \cos x| + c_2.
\end{aligned}$$

解方程组, 即得  $c_1$  和  $I_2$ .

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} I_1 + I_2 = x + c_1 \\ -I_1 + I_2 = \ln |\sin x + \cos x| + c_2 \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} I_1 = \frac{1}{2}(x - \ln |\sin x + \cos x|) + c, \\ I_2 = \frac{1}{2}(x + \ln |\sin x + \cos x|) + c_0. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$(3) \text{ 令 } I_1 = \int e^{2x} \sin^2 x dx, I_2 = \int e^{2x} \cos^2 x dx, \text{ 则}$$

$$I_1 + I_2 = \int e^{2x} (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = \frac{1}{2} e^{2x} + c_1,$$

$$I_1 - I_2 = \int e^{2x} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos 2x dx.$$

又令  $I_3 = \int e^t \cos t dt$ ,  $I_4 = \int e^t \sin t dt$ , 则

$$\begin{aligned} I_3 + I_4 &= \int e^t [\cos t + \sin t] dt = \int e^t [(\sin t)' + \cos t] dt \\ &= \int d(e^t \sin t) = e^t \sin t + c_3 \text{ (依例 4(3) 中公式),} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 - I_4 &= \int e^t [\cos t - \sin t] dt = \int e^t [\cos t + (\cos t)'] dt \\ &= \int d(e^t \cos t) = e^t \cos t + c_4 \text{ (依例 4(3) 中公式).} \end{aligned}$$

解方程组

$$\begin{cases} I_3 + I_4 = e^t \sin t + c_3, \\ I_3 - I_4 = e^t \cos t + c_4, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_3 = \frac{e^t}{2} (\sin t + \cos t) + c'_3, \\ I_4 = \frac{e^t}{2} (\sin t - \cos t) + c'_4, \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_2 - I_1 = \frac{e^{2x}}{4} (\sin 2x + \cos 2x) + c_2;$$

解方程组

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = \frac{1}{2} e^{2x} + c_1, \\ I_2 - I_1 = \frac{e^{2x}}{4} (\sin 2x + \cos 2x) + c_2, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 = \frac{e^{2x}}{4} \left[ 1 - \frac{1}{2} (\sin 2x + \cos 2x) \right] + c, \\ I_2 = \frac{e^{2x}}{4} \left[ 1 + \frac{1}{2} (\sin 2x + \cos 2x) \right] + c_0. \end{cases}$$

例 7 计算下列不定积分:

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}};$$

$$(2) \int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx;$$

$$(3) \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx;$$

$$(4) \int \frac{e^{\arctan x} + x \ln x (1 + x^2)}{1 + x^2} dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad (1) \quad I &= \int \frac{-dx}{e^x \sqrt{1 - (e^{-x})^2}} = \int \frac{de^{-x}}{\sqrt{1 - (e^{-x})^2}} \\ &= \arcsine^{-x} + c.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad I &= \int \frac{e^x de^x}{1 + e^x} = \int \frac{e^x + 1 - 1}{1 + e^x} de^x = \int de^x - \int \frac{(de^x + 1)}{1 + e^x} \\ &= e^x - \ln(1 + e^x) + c.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \quad I &= \int \frac{1 + 1/x^2}{x^2 + 1/x^2} dx = \int \frac{d(x - 1/x)}{(x - 1/x)^2 + 2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left[ \left( x - \frac{1}{x} \right) / \sqrt{2} \right] + c \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2} x}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) \quad I &= \int \frac{e^{\arctan x}}{1 + x^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\ln(1 + x^2)}{1 + x^2} d(1 + x^2) \\ &= \int e^{\arctan x} d\arctan x + \frac{1}{2} \int \ln(1 + x^2) d[\ln(1 + x^2)] \\ &= e^{\arctan x} + \frac{1}{4} \ln^2(1 + x^2) + c.\end{aligned}$$

例 8 用三角代换计算下列不定积分:

$$\begin{array}{ll}(1) \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx; & (2) \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + a^2}}; \\ (3) \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}; & (4) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - a^2}}.\end{array}$$

解 (1) 含  $\sqrt{a^2 - x^2}$  时, 令  $x = a \sin t$  (或  $a \cos t$ ), 则  $dx = a \cos t dt$  (或  $-a \sin t dt$ ), 且当  $|t| < \frac{\pi}{2}$  时,  $t = \arcsin \frac{x}{a}$ ,  $\cos t = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$  ( $a > 0$ ). (在使用熟练的情况下, 以上内容在解题时均不再指出) 从而有

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{a^2 \sin^2 t}{a \cos t} a \cos t dt$$

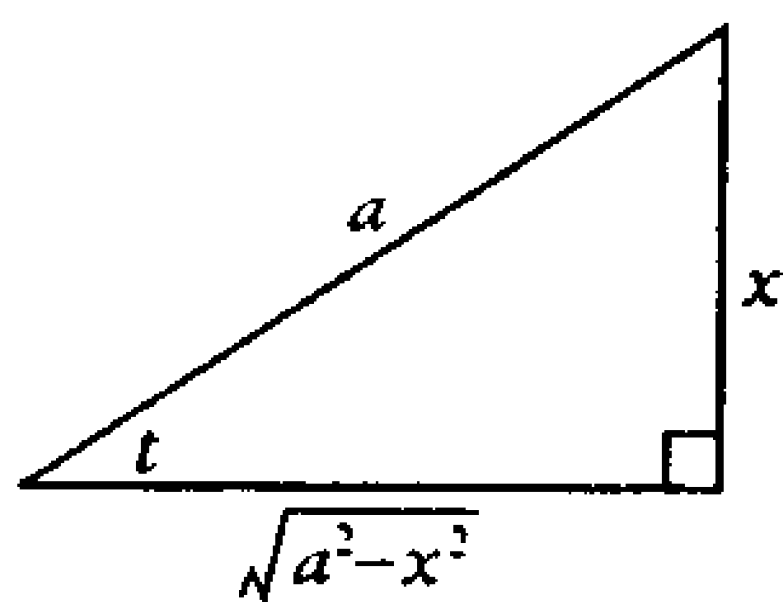


图 5.1

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a^2}{2} \int (1 - \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) + c \\
 &= \frac{a^2}{2} (t - \sin t \cos t) + c \\
 &= \frac{a^2}{c} \left( \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \right) + c.
 \end{aligned}$$

求反函数可借助图 5.1 所示的直角三角形, 即结果要化为原变量的函数.

(2) 含  $\sqrt{a^2 + x^2}$  时, 令  $x = a \tan t$ , 则

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 + x^2}} &= \int \frac{1}{a \tan t \sec t} a \sec^2 t dt = \frac{1}{a} \int \csc t dt \\
 &= \frac{1}{a} [-\ln |\csc t + \cot t|] + c \\
 &= -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} + \frac{a}{x} \right| + c \\
 &= \frac{1}{a} \ln \frac{|x|}{a + \sqrt{a^2 + x^2}} + c \quad (\text{见图 5.2}).
 \end{aligned}$$

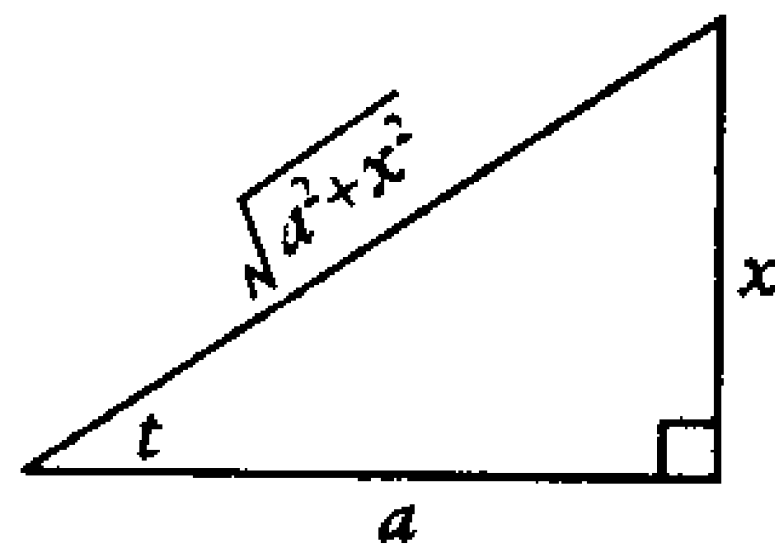


图 5.2

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} &= \int \frac{a \sec^2 t + t dt}{(a^2 \tan^2 t + a^2)^2} = \frac{1}{a^3} \int \frac{\sec^2 t}{\sec^4 t} dt \\
 &= \frac{1}{a^3} \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2a^3} \int (1 + \cos 2t) dt \\
 &= \frac{1}{2a^3} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + c = \frac{1}{2a^3} \left( \arctan \frac{x}{a} + \frac{ax}{a^2 + x^2} \right) + c.
 \end{aligned}$$

(4) 含  $\sqrt{x^2 - a^2}$  时, 令  $x = a \sec t$ , 则

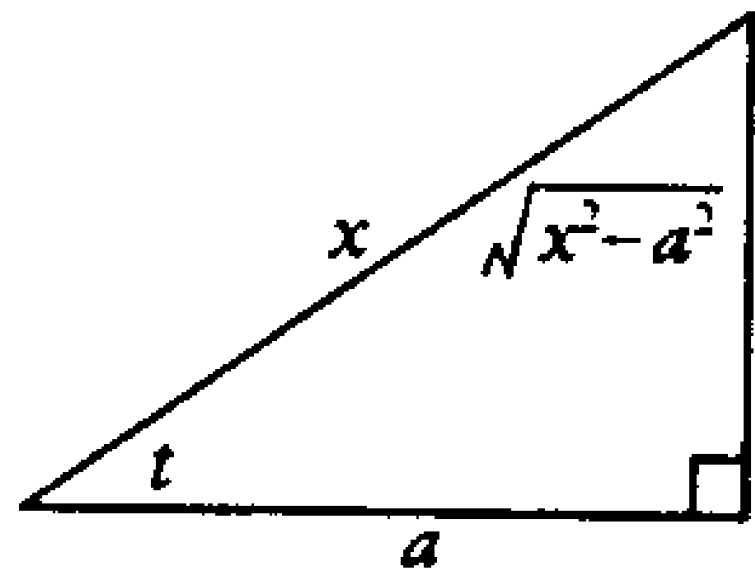


图 5.3

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - a^2}} &= \int \frac{a \sec t \tan t}{a^2 \sec^2 t a \tan t} dt \\
 &= \frac{1}{a^2} \int \cos t dt = \frac{1}{a^2} \sin t dt + c \\
 &= \frac{1}{a^2 x^2} \sqrt{x^2 - a^2} + c \quad (\text{见图 5.3}).
 \end{aligned}$$

例 9 用根式代换计算下列不定积分:

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}; \quad (2) \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1+x}};$$

$$(3) \int \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} dx; \quad (4) \int \sqrt{1 - e^{2x}} dx.$$

解 (1) 被积函数中含根式  $\sqrt{x}$  和  $\sqrt[3]{x}$ , 取根次数的最小公倍数 6, 令  $u = \sqrt[6]{x}$ , 则

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= \int \frac{6u^5 du}{u^3 + u^2} = 6 \int \left( u^2 - u + 1 - \frac{1}{1+u} \right) du \\ &= 6 \left( \frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + u - \ln|1+u| \right) + c \\ &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|1 + \sqrt[6]{x}| + c. \end{aligned}$$

(2) 令  $\sqrt{1+x} = t$ , 有  $dx = 2t dt$ , 则

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1+x}} &= \int \frac{2t dt}{1+t} = \int \left( 2 - \frac{2}{1+t} \right) dt \\ &= 2t - 2\ln|1+t| + c = 2\sqrt{1+x} - 2\ln|1 + \sqrt{1+x}| + c. \end{aligned}$$

(3) 令  $\sqrt{e^x + 1} = t$ , 有  $dx = \frac{2t}{t^2 - 1} dt$ , 则

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}} &= \int \frac{2t dt}{t(t^2 - 1)} = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 1} \\ &= \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c = \ln \left| \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} \right| + c. \end{aligned}$$

(4) 令  $\sqrt{1 - e^{2x}} = t$ , 有  $dx = \frac{-t dt}{1 - t^2}$ , 则

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - e^{2x}} dx &= \int t \frac{-t}{1 - t^2} dt = \int \frac{1 - t^2 - 1}{1 - t^2} dt \\ &= \int \left( 1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt = t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c \\ &= \sqrt{1 - e^{2x}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1 - e^{2x}} - 1}{\sqrt{1 - e^{2x}} + 1} \right| + c. \end{aligned}$$

例 10 用指数代换计算下列不定积分:

$$(1) \int \frac{1 - e^x}{1 + e^x} dx; \quad (2) \int \frac{dx}{e^{x/2} + e^x};$$

$$(3) \int \frac{2^x dx}{1 + 2^x + 4^x}; \quad (4) \int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x} + \sqrt{1 - e^x}}.$$

解 当被积函数中含因式  $a^x$  时, 可令  $a^x = t$ , 化去指数因式.

(1) 令  $e^x = t$ , 有  $dx = \frac{dt}{t}$ , 则

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - e^x}{1 + e^x} dx &= \int \frac{1 - t}{1 + t} \frac{dt}{t} = \int \left( \frac{1}{t} - \frac{2}{1 + t} \right) dt \\ &= \ln|t| - 2\ln|1 + t| + c = x - 2\ln|1 + e^x| + c. \end{aligned}$$

(2) 令  $e^{x/2} = t$ , 有  $dx = \frac{2dt}{t}$ , 则

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{e^{x/2} + e^x} &= \int \frac{2}{t + t^2} \frac{dt}{t} = 2 \int \frac{t + 1 - t}{t^2(t + 1)} dt \\ &= 2 \int \left( \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t + 1} \right) dt \\ &= -\frac{2}{t} - 2\ln|t| + 2\ln|1 + t| + c \\ &= -2e^{-x/2} - x + 2\ln|1 + e^{x/2}| + c. \end{aligned}$$

(3) 令  $2^x = t$ , 有  $dx = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{dt}{t}$ , 则

$$\begin{aligned} \int \frac{2^x dx}{1 + 2^x + 4^x} &= \int \frac{t}{1 + t + t^2} \frac{dt}{t \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{dt}{(t + 1/2)^2 + 3/4} \\ &= \frac{1}{\ln 2} \int \frac{d(t + 1/2)}{(t + 1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} \\ &= \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left[ \left( t + \frac{1}{2} \right) / \frac{\sqrt{3}}{2} \right] + c \\ &= \frac{2}{\sqrt{3} \ln 2} \arctan[(2^{x+1} + 1)/\sqrt{3}] + c. \end{aligned}$$

(4) 令  $e^x = t$ , 有  $dx = \frac{dt}{t}$ , 则

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x} + \sqrt{1 - e^x}} = \int \frac{1}{\sqrt{1 + t} + \sqrt{1 - t}} \frac{dt}{t}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{1+t} - \sqrt{1-t}}{t^2} dt \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{1+t}}{t^2} dt - \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{1-t}}{t^2} dt.
\end{aligned}$$

再令  $\sqrt{1+t} = u$ , 有  $dt = 2u du$ , 则

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1+t}}{t^2} dt &= \int \frac{u}{(u^2-1)^2} 2u du = 2 \int \frac{u^2-1+1}{(u^2-1)^2} du \\
&= 2 \int \frac{du}{u^2-1} + \frac{1}{2} \int \left[ \frac{-1}{u-1} + \frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{u+1} + \frac{1}{(u+1)^2} \right] du \\
&= -\ln \left| \frac{u+1}{u-1} \right| - \frac{1}{2} \ln |u-1| - \frac{1}{2(u-1)} \\
&\quad + \frac{1}{2} \ln |u+1| - \frac{1}{2(u+1)} + c \\
&= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} \right| - \frac{\sqrt{1+e^x}}{2e^x} + c_1.
\end{aligned}$$

再令  $\sqrt{1-t} = v$ , 有  $dt = -2v dv$ , 则

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1-t}}{t^2} dt &= -2 \int \frac{v^2-1+1}{(v^2-1)^2} dv \\
&= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1-e^x}-1}{\sqrt{1-e^x}+1} \right| + \frac{\sqrt{1-e^x}}{2e^x} + c_2.
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x} - \sqrt{1-e^x}} \\
&= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} \right| + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{1-e^x}-1}{\sqrt{1-e^x}+1} \right| \\
&\quad - \frac{\sqrt{1+e^x}}{2e^x} - \frac{\sqrt{1-e^x}}{2e^x} + c.
\end{aligned}$$

**例 11** 用对数代换计算下列不定积分:

$$(1) \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx; \quad (2) \int \frac{\ln x}{x \sqrt{1+\ln x}} dx.$$

解 当被积函数含因式  $\ln x$  时, 可令  $\ln x = t$ , 化简积分计算.

(1) 令  $\ln x = t$ , 有  $dx = e^t dt$ , 则

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx = \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{\ln x} d \ln x = \int \frac{\sqrt{1+t}}{t} dt.$$

再令  $\sqrt{1+t} = u$ , 有  $dt = 2u du$ , 则

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1+t}}{t} dt &= \int \frac{u}{u^2-1} 2u du = 2 \int \left( 1 - \frac{1}{u^2-1} \right) du \\ &= 2 \left( u + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| \right) + c \\ &= 2 \sqrt{1+t} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+t}-1}{\sqrt{1+t}+1} \right| + c. \end{aligned}$$

故 
$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx = 2 \sqrt{1+\ln x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\sqrt{1+\ln x}+1} \right| + c.$$

(2) 令  $\ln x = t$ , 有  $dx = e^t dt$ , 则

$$\int \frac{\ln x}{x \sqrt{1+\ln x}} dx = \int \frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}} dx = \int \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt.$$

再令  $\sqrt{1+t} = u$ , 有  $dt = 2u du$ , 则

$$\begin{aligned} \int \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt &= \int \frac{u^2-1}{u} 2u du = 2 \int (u^2-1) du \\ &= \frac{2}{3} u^3 - 2u + c = \frac{2}{3} \sqrt{(1+t)^3} - 2 \sqrt{1+t} + c. \end{aligned}$$

故 
$$\int \frac{\ln x dx}{x \sqrt{1+\ln x}} = \frac{2}{3} (\ln x - 2) \sqrt{1+\ln x} + c.$$

例 12 用倒代换计算下列不定积分:

(1)  $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2} dx;$  (2)  $\int \frac{dx}{x \sqrt{4-x^2}};$

(3)  $\int \frac{dx}{x^8(1+x^2)};$  (4)  $\int \frac{dx}{(1+x+x^2)^{3/2}}.$

解 当被积函数为分式, 且分母中变量次数高于分子中变量次数时, 可用倒代换, 即  $x = \frac{1}{t}$ , 化简积分计算.

(1) 令  $x = \frac{1}{t}$ , 有  $dx = -\frac{dt}{t^2}$ , 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} dx &= \int \frac{1 - \ln(1/t)}{[1/t - \ln(1/t)]^2} \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = -\int \frac{1 + \ln t}{(1 + t \ln t)^2} dt \\ &= -\int \frac{d(t \ln t)}{(1 + t \ln t)^2} = \frac{1}{1 + t \ln t} + c = \frac{x}{x - \ln x} + c.\end{aligned}$$

(2) 令  $x^2 = \frac{1}{t}$ , 有  $\frac{dx}{x} = -\frac{dt}{2t}$ , 则

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x \sqrt{4 - x^2}} &= -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t \sqrt{4 - 1/t}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{4t^2 - t}} \\ &= -\frac{1}{4} \int \frac{1}{\sqrt{(t - 1/8)^2 - (1/8)^2}} d(t - 1/8) \\ &= -\frac{1}{4} \ln \left| t - \frac{1}{8} + \sqrt{t^2 - t/4} \right| + c.\end{aligned}$$

其中用了公式  $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + c$ .

$$\begin{aligned}\text{故 } \int \frac{dx}{x \sqrt{4 - x^2}} &= -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{8} + \sqrt{1/x^4 - 1/4x^2} \right| + c \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{2 + \sqrt{4 - x^2}} \right| + c.\end{aligned}$$

(3) 令  $x = \frac{1}{t}$ , 有  $dx = -\frac{dt}{t^2}$ , 则

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^8(1 + x^2)} &= -\int \frac{t^8}{t^2 + 1} \cdot \frac{t^2}{t^2} dt = -\int \frac{t^8}{1 + t^2} dt \\ &= -\int (t^2 - 1)(t^4 + 1) dt - \int \frac{dt}{t^2 + 1} \\ &= \int (-t^6 + t^4 - t^2 + 1) dt - \int \frac{dt}{t^2 + 1} \\ &\equiv \frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + t - \arctan t + c \\ &= -\frac{1}{7x^7} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} - \arctan \frac{1}{x} + c.\end{aligned}$$

$$(4) \int \frac{dx}{(1 + x + x^2)^{3/2}} = \int \frac{dx}{[(x + 1/2)^2 + 3/4]^{3/2}}.$$

令  $(x + 1/2) = \frac{1}{t}$ , 有  $dx = -\frac{dt}{t^2}$ , 则原式化为

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1/t^2 + 3/4)^{3/2}} \left(-\frac{dt}{t^2}\right) &= -\int \frac{tdt}{(1 + 3t^2/4)} \\ &= -\frac{2}{3} \int \frac{d(3t^2/4 + 1)}{(1 + 3t^2/4)^{3/2}} = \frac{4}{3} (1 + 3t^2/4)^{-1/2} + c. \end{aligned}$$

故 
$$\int \frac{dx}{(1 + x + x^2)^{3/2}} = \frac{2}{3} \frac{2x + 1}{\sqrt{1 + x + x^2}} + c.$$

例 13 用双曲代换计算下列不定积分:

(1)  $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$ ;      (2)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx$ ;

(3)  $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx$ ;      (4)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (a > 0).$

解 双曲代换的功效与三角代换相似, 但演算较为复杂, 一般令  $x = asht$  或  $x = a\cosh t$ , 可以化简积分计算.

(1) 令  $x = asht$ , 有  $dx = a\cosh t dt$ , 则

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 + x^2} dx &= a^2 \int \cosh^2 t dt = a^2 \int \frac{1}{2} (\cosh 2t + 1) dt \\ &= \frac{a^2}{4} \sinh 2t + \frac{a^2}{2} t + c_1. \end{aligned}$$

因为  $x + \sqrt{a^2 + x^2} = a(\sinh t + \cosh t) = ae^t$ ,

则 
$$t = \ln \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a}.$$

又  $\sinh 2t = 2\sinh t \cosh t = \frac{2x \sqrt{a^2 + x^2}}{a^2},$

故 
$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + c.$$

(2) 令  $x = asht$ , 有  $dx = a\cosh t dt$ , 则

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} &= a^2 \int \sinh^2 t dt = a^2 \int \frac{\cosh 2t - 1}{2} dt \\ &= \frac{a^2}{4} \sinh 2t - \frac{a^2}{2} t + c \end{aligned}$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + c.$$

(3) 因为函数定义域为  $x \geq a$  和  $x < -a$ , 所以:

1°  $x > a$  时, 令  $x = a \operatorname{ch} t$  ( $t > 0$ ), 有  $dx = a \operatorname{sh} t dt$ .

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx &= \int a(\operatorname{ch} t - 1) dt = a \operatorname{sh} t - at + c_1 \\ &= a \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} - at + c_1 \\ &= \sqrt{x^2 - a^2} - a \ln(\sqrt{x^2 - a^2} + x) + c_2 \\ &= \sqrt{x^2 - a^2} - 2a \ln(\sqrt{x-a} + \sqrt{x+a}) + c. \end{aligned}$$

2° 当  $x < -a$  时, 令  $x = -a \operatorname{ch} t$ , 有  $dx = -a \operatorname{sh} t dt$ ,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} &= -a \int (\operatorname{ch} t + 1) dt = -a \operatorname{sh} t - at + c_1 \\ &= -\sqrt{x^2 - a^2} - a \ln(\sqrt{x^2 - a^2} - x) + c_2 \\ &= -\sqrt{x^2 - a^2} - 2a \ln(\sqrt{-x-a} + \sqrt{-x+a}) + c. \end{aligned}$$

即, 当  $|x| > a$  时, 有

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx &= \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{x^2 - a^2} - 2a \ln(\sqrt{|x-a|} + \sqrt{|x+a|}) + c \\ &\quad (\text{式中 } 2 \ln(\sqrt{|x-a|} + \sqrt{|x+a|})) \\ &= 2 \ln \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}}{\sqrt{2}a} + 2 \ln \sqrt{2}a \\ &= \ln \frac{(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a})^2}{2a^2} + \ln 2a^2 = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}). \end{aligned}$$

(4) 令  $x = a \operatorname{ch} t$ , 有  $dx = a \operatorname{sh} t dt$ , 则

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \int \frac{a \operatorname{ch} t}{a \operatorname{ch} t} dt = \int dt = t + c_1 = \operatorname{arch} \frac{x}{a} + c_1 \\ &= \ln \left[ \frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} \right] + c_1 = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + c. \end{aligned}$$

在上面的例题中,我们对每一个题只用一种指定的方法求解.需要指出的是,这并不说明这种解是惟一的,或者是最优的.实际上,大多数题都有多种解法,技巧各有不同,结果有时也迥然相异,但对结果求导,总能得到被积函数.

下面的例题,我们不规定方法,读者可试用其它方法求解.

例 14 计算下列不定积分:

$$\begin{aligned} (1) \int \sqrt{1 - e^{2x}} dx; & \quad (2) \int x \sqrt{\frac{x}{2a - x}} dx; \\ (3) \int \frac{dx}{\sqrt{(x - a)(b - x)}}; & \quad (4) \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}; \\ (5) \int \frac{1 - x^n}{x(1 + x^n)} dx; & \quad (6) \int \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

解 (1) 令  $e^x = \sin t$ , 有  $dx = \frac{\cos t}{\sin t} dt$ , 则

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - e^{2x}} dx &= \int \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt = \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin t} dt \\ &= \int (\csc t - \sin t) dt = \cos t + \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| + c \\ &= \cos t - \ln \left| \frac{\sqrt{1 - \cos t}}{\sqrt{1 + \cos t}} \right| + c \\ &= \sqrt{1 - e^{2x}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1 - e^{2x}} - 1}{\sqrt{1 - e^{2x}} + 1} \right| + c. \end{aligned}$$

(2) 令  $x = 2a \sin^2 t$ , 有  $dx = 4a \sin t \cos t dt$ , 则

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{\frac{x}{2a - x}} dx &= 8a^2 \int \sin^4 t dt = 2a^2 \int (1 - \cos 2t)^2 dt \\ &= 2a^2 \int (1 - 2\cos 2t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4t) dt \\ &= 3a^2 t - 2a^2 \sin 2t + \frac{a^2}{4} \sin 4t + c. \end{aligned}$$

由  $\sin t = \sqrt{\frac{x}{2a}}$ ,  $\cos t = \sqrt{\frac{2a - x}{2a}}$ ,  $\sin 2t = \sqrt{\frac{x(2a - x)}{a}}$ ,  $\sin 4t =$

$$\frac{2(a-x)\sqrt{x(2a-x)}}{a^2}, \text{得}$$

$$I = 3a^2 \arcsin \sqrt{x/2a} - 2a \sqrt{x(2a-x)} \\ + \frac{a-x}{2} \sqrt{x(2a-x)} + c.$$

(3) 令  $x-a = (b-a)\sin^2 t$ , 有  $dx = 2(b-a)\sin t \cos t dt$ , 则

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \\ = \int \frac{1}{(b-a)\sin^2 t} \sqrt{\frac{(b-a)\sin^2 t}{(b-a)\cos^2 t}} \cdot 2(b-a)\sin t \cos t dt \\ = 2 \int dt = 2t + c.$$

由  $x-a = (b-a)\sin^2 t, b-x = (b-a)\cos^2 t \Rightarrow \tan^2 t = \frac{x-a}{b-x}$ ,

故  $\tan t = \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$ , 于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2 \arctan \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + c.$$

$$(4) \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx \\ = \int \frac{\tan^2 x \sec^2 x + \sec^2 x}{\tan^4 x + 1} dx = \int \frac{\tan^2 x + 1}{\tan^4 x + 1} d \tan x \\ = \int \frac{t^2 + 1}{t^4 + 1} dt = \int \frac{1 + 1/t^2}{t^2 + 1/t^2} dt = \int \frac{d(t - 1/t)}{(t - 1/t)^2 + 2} \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t - 1/t}{\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan^2 x - 1}{\sqrt{2} \tan x} + c.$$

(5) 令  $x^n = t$ , 有  $dx = \frac{x dt}{nt}$ , 则

$$\int \frac{1-x^n}{x(1+x^n)} dx = \int \frac{1-t}{x(1+t)} \cdot \frac{x dt}{nt} = \frac{1}{n} \int \frac{1-t}{t(1+t)} dt \\ = \frac{1}{n} \int \left( \frac{1}{t} - \frac{2}{1+t} \right) dt = \frac{1}{n} [\ln t - 2 \ln(1+t)] + c$$

$$= \frac{1}{n} [\ln x^n - 2 \ln(1 + x^n)] + c.$$

(6) 将  $\sin 2nx$  变形为

$$\begin{aligned} \sin 2nx &= \sin 2nx - \sin 2(n-1)x + \sin 2(n-1)x \\ &\quad - \sin 2(n-2)x + \cdots + \sin 2x - \sin 0x \\ &= \sum_{k=1}^n [\sin 2kx - \sin(2k-2)x] \\ &= 2\sin x \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \int \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx &= 2 \int \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x dx = 2 \sum_{k=1}^n (2k-1)x dx \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{2k-1} \sin(2k-1)x + c. \end{aligned}$$

对于初学者来说,用常规方法解题比较可靠,但不一定最简单.非常规方法如剑走偏锋,有时有很好的效果,但不易掌握.

## 二、分部积分法的应用

当被积函数为两类不同函数乘积时,可采用分部积分法计算不定积分.如疑难解析中所指出的,选  $u$  的优先次序为“反、对、幂、三、指”,不按次序,不定积分则难以计算出.

**例 15** 下面的运算错在哪里?说明为什么.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{\sin x} dx &= \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin x} - \int \sin x d \frac{1}{\sin x} \\ &= 1 + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx, \end{aligned}$$

从而得  $0 = 1$ .

**解** 整个运算过程是正确的,恰恰是结论“ $0 = 1$ ”下错了.因为,不定积分的等式不同于数值等式,等式  $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = 1 + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$  表示等式两边原函数在全体意义上的相等,即在等式左边的原函数中任取一个原函数  $f(x)$  时,等式右边的原函数中必有



一个原函数  $1 + g(x)$  与之相等, 而  $f(x)$  与  $g(x)$  都是  $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$  的原函数. 事实上

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + c_1,$$

$$1 + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = 1 + \ln |\sin x| + c_2 = \ln |\sin x| + c_1,$$

即当给定  $c_1$  时, 总有  $c_2 = c_1 - 1$  与之对应. 故不能用数值等式方法得出“ $0 = 1$ ”.

例 16 已知  $f(x)$  的一个原函数是  $\frac{\sin x}{x}$ , 证明:

$$\int x f'(x) dx = \cos x - \frac{2 \sin x}{x} + c.$$

证  $\int x f'(x) dx = \int x df(x) = x f(x) - \int f(x) dx,$

因为  $f(x) = \left( \frac{\sin x}{x} \right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2},$

所以  $\int x f'(x) dx = \frac{x \cos x - \sin x}{x} - \frac{\sin x}{x} + c$   
 $= \cos x - \frac{2 \sin x}{x} + c.$

例 17 设  $\int f(x) dx = F(x) + c$ ,  $f(x)$  可微, 且  $f(x)$  的反函数  $f^{-1}(x)$  存在, 证明:

$$\int f^{-1}(x) dx = x f^{-1}(x) - F[f^{-1}(x)] + c.$$

证  $\int f^{-1}(x) dx = x f^{-1}(x) - \int x d[f^{-1}(x)],$

令  $t = f^{-1}(x)$ , 则  $x = f(t)$ , 于是

$$\int f^{-1}(x) dx = x f^{-1}(x) - \int f(t) dt = x f^{-1}(x) - F(t) + c$$

$$= x f^{-1}(x) - F[f^{-1}(x)] + c.$$

例 18 计算下列不定积分:

$$(1) \int \arctan \sqrt{x} dx; \quad (2) \int \operatorname{arcsch} x dx.$$

解 利用例 17 的结果.

(1) 令  $f^{-1}(x) = \arctan \sqrt{x}$ , 则  $x = \tan^2 t$ , 于是

$$\begin{aligned} \int \arctan \sqrt{x} dx &= x \arctan \sqrt{x} - \int \tan^2 t dt \\ &= x \arctan \sqrt{x} - \int (\sec^2 t - 1) dt \\ &= x \arctan \sqrt{x} - \tan^2 t + t + c \\ &= x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c \\ &= (x + 1) \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + c. \end{aligned}$$

(2) 令  $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsch} x$ , 则  $x = \operatorname{sh} t$ , 于是

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arcsch} x dx &= x \operatorname{arcsch} x - \int \operatorname{sh} t dt = x \operatorname{arcsch} x - \operatorname{ch} t + c \\ &= x \operatorname{arcsch} x - \sqrt{1 + x^2} + c. \end{aligned}$$

例 19 计算不定积分

$$\int [\ln f(x) + \ln f'(x)] [f'^2(x) + f(x)f''(x)] dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= \int \ln[f(x)f'(x)] d[f(x)f'(x)] \\ &= f(x)f'(x) \ln[f(x)f'(x)] \\ &\quad - \int \frac{f(x)f'(x)}{f(x)f'(x)} d[f(x)f'(x)] \\ &= f(x)f'(x) [\ln[f(x)f'(x)] - 1] + c. \end{aligned}$$

例 20 (工科硕士研究生入学试题) 计算下列不定积分:

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx; & \quad (2) \int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx; \\ (3) \int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx; & \quad (4) \int \frac{\arctan x}{x^2(1 + x^2)} dx. \end{aligned}$$

$$\text{解 } (1) \int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx = - \int \ln \sin x \operatorname{dcot} x$$

$$\begin{aligned}
&= -\cot x \ln \sin x + \int \cot^2 x dx \\
&= -\cot x \ln \sin x + \int (\csc^2 x - 1) dx \\
&= -\cot x \ln \sin x - \cot x - x + c.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx &= -\frac{1}{2} \int \arctan e^x de^{-2x} \\
&= -\frac{1}{2} \left[ e^{-2x} \arctan e^x - \int \frac{dx}{e^{2x}(1+e^{2x})} \right] \\
&= -\frac{1}{2} \left[ e^{-2x} \arctan e^x - \int \left( \frac{1}{e^{2x}} - \frac{1}{1+e^{2x}} \right) de^x \right] \\
&= -\frac{1}{2} (e^{-2x} \arctan e^x + e^{-x} + \arctan e^x) + c.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}} dx &= \int \frac{x d(e^x-1)}{\sqrt{e^x-1}} = 2 \int x d\sqrt{e^x-1} \\
&= 2 \left[ x \sqrt{e^x-1} - \int \sqrt{e^x-1} dx \right].
\end{aligned}$$

令  $u = \sqrt{e^x-1}$ , 有  $dx = \frac{2u}{1+u^2} du$ , 则

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{e^x-1} dx &= \int \frac{2u}{1+u^2} \cdot u du = 2 \int \frac{u^2+1-1}{1+u^2} du \\
&= 2u - 2 \int \frac{du}{1+u^2} = 2u - \arctan u + c.
\end{aligned}$$

故 
$$\begin{aligned}
\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}} dx &= 2x \sqrt{e^x-1} - 4 \sqrt{e^x-1} \\
&\quad + 4 \arctan \sqrt{e^x-1} + c.
\end{aligned}$$

$$(4) \int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{\arctan x}{x^2} dx - \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx,$$

其中 
$$\begin{aligned}
\int \frac{\arctan x}{x^2} dx &= - \int \arctan x d \frac{1}{x} \\
&= - \frac{\arctan x}{x} + \int \frac{dx}{x(1+x^2)}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx^2$$

$$= -\frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + c_1.$$

故 
$$\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx = -\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + c.$$

例 21(工学硕士研究生入学试题)

(1) 设  $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ , 计算  $\int f(x) dx$ .

(2) 设  $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$ , 计算  $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx$ .

解 需要先求出  $f(x)$ , 再用分部积分法计算.

(1) 设  $\ln x = t$ , 则  $x = e^t$ ,  $f(t) = [\ln(1+e^t)]/e^t$ , 则

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} dx = - \int \ln(1+e^x) de^{-x} \\ &= -e^{-x} \ln(1+e^x) + \int \frac{1}{1+e^x} dx \\ &= -e^{-x} \ln(1+e^x) + \int \left( 1 + \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx \\ &= -e^{-x} \ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x) + c. \end{aligned}$$

(2) 设  $u = \sin^2 x$ , 有  $\sin x = \sqrt{u}$ ,  $x = \arcsin \sqrt{u}$ ,  $f(x) = \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ , 则

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx &= \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx \\ &= - \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} d(1-x) = -2 \int \arcsin \sqrt{x} d \sqrt{1-x} \\ &= -2 \sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2 \int \sqrt{1-x} \frac{1}{\sqrt{1-x}} d \sqrt{x} \\ &= -2 \sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2 \sqrt{x} + c. \end{aligned}$$

例 22 计算下列不定积分:

$$(1) \int \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} dx; \quad (2) \int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx.$$

解 这两个题的共同点是分母为某函数  $\varphi(x)$  的平方式, 可以设法将分子化为  $\varphi(x)$  的导数形式, 然后将积分变量凑成  $\varphi(x)$ , 再去分母. 最后用分部积分法计算.

(1)  $\varphi(x) = x - \ln x, \varphi'(x) = \frac{x-1}{x}$ , 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} dx &= \int \frac{x - \ln x - (x - 1)}{(x - \ln x)^2} dx \\ &= \int \frac{dx}{x - \ln x} - \int \frac{(x - 1)}{(x - \ln x)^2} dx \\ &= \int \frac{dx}{x - \ln x} - \int \frac{x}{(x - \ln x)^2} d(x - \ln x) \\ &= \int \frac{dx}{x - \ln x} - \int x d\left(\frac{1}{x - \ln x}\right) \\ &= \int \frac{dx}{x - \ln x} - \frac{x}{x - \ln x} - \int \frac{dx}{x - \ln x} = \frac{x}{x - \ln x} + c. \end{aligned}$$

(2)  $\varphi(x) = x \sin x + \cos x, \varphi'(x) = x \cos x$ , 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx &= \int \frac{x}{\cos x} \frac{x \cos x dx}{(x \sin x + \cos x)^2} \\ &= \int \frac{x}{\cos x} \frac{d(x \sin x + \cos x)}{(x \sin x + \cos x)^2} = - \int \frac{x}{\cos x} d\left(\frac{1}{x \sin x + \cos x}\right) \\ &= - \frac{x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x \sin x + \cos x} + \int \frac{(\cos x + x \sin x) dx}{(x \sin x + \cos x) \cos^2 x} \\ &= - \frac{x}{\cos x (x \sin x + \cos x)} + \tan x + c. \end{aligned}$$

例 23 用分部积分法计算下列积分:

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{\arctan(1/x)}{1+x^2} dx; & \quad (2) \int x^2 e^{-x} dx; \\ (3) \int (2x-1) \ln x dx; & \quad (4) \int x^2 \arcsin x dx; \\ (5) \int \sec^3 x dx; & \quad (6) \int \frac{1}{x} \ln(\ln x) dx. \end{aligned}$$

解 事实上, 在解题过程中换元积分法与分部积分法是混合

在一起使用的,使用次数和顺序都没有限制,由读者自行确定.

$$\begin{aligned}
 (1) \int \frac{\arctan(1/x)}{1+x^2} dx &= \int \frac{\arctan(1/x)}{x^2(1+1/x^2)} dx \\
 &= - \int \frac{\arctan(1/x)}{1+(1/x)^2} d \frac{1}{x} = - \int \arctan \frac{1}{x} d \arctan \frac{1}{x} \\
 &= - \frac{1}{2} \left( \arctan \frac{1}{x} \right)^2 + c.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int x^2 e^x dx &= \int x^2 d(-e^x) = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx \\
 &= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx \\
 &= (x^2 - 2x + 2) e^{-x} + c.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int (2x-1) \ln x dx &= \int \ln x d(x^2-x) \\
 &= (x^2-x) \ln x - \int (x^2-x) \frac{1}{x} dx \\
 &= (x^2-x) \ln x - \frac{1}{2} x^2 + x + c.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \int x^2 \arcsin x &= \int \arcsin x d\left(\frac{x^3}{3}\right) \\
 &= \frac{x^3}{3} \arcsin x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= \frac{x^3}{3} \arcsin x + \frac{1}{3} \int x^2 d \sqrt{1-x^2} \\
 &= \frac{x^3}{3} \arcsin x + \frac{x^2}{3} \sqrt{1-x^2} + \frac{2}{9} \sqrt{(1-x^2)^3} + c.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \int \sec^3 x dx &= \int \sec x \tan x = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx \\
 &= \sec x \tan x + \int \sec x (1 - \sec^2 x) dx \\
 &= \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x dx,
 \end{aligned}$$

移项后除以 2,得

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} (\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + c.$$

$$\begin{aligned}
 (6) \int \frac{1}{x} \ln(\ln x) dx &= \ln x \cdot \ln(\ln x) - \int \ln x \cdot \frac{1/x}{\ln x} dx \\
 &= \ln(\ln x) \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} dx = \ln x \cdot \ln(\ln x) - \ln x + c \\
 &= \ln x [\ln(\ln x) - 1] + c.
 \end{aligned}$$

**例 24** 计算下列不定积分:

$$(1) \int \sin(\ln x) dx; \quad (2) \int \cos(\ln x) dx.$$

**解** 此题见例 6 题(1),是用换元积分法的“配对”法解的.现在我们用传统的分部积分法来计算,比较哪种方法更简单.

$$\begin{aligned}
 (1) \int \sin(\ln x) dx &= x \sin(\ln x) - \int x \cos(\ln x) \frac{dx}{x} \\
 &= x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx \\
 &= \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) + \int x \sin(\ln x) \frac{dx}{x} \\
 &= x [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] - \int \sin(\ln x) dx
 \end{aligned}$$

出现循环,移项、除以 2,可得

$$\int \sin(\ln x) dx = \frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + c.$$

(2) 完全类似地,可得

$$\int \cos(\ln x) dx = \frac{x}{2} [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + c.$$

**例 25** 建立以下不定积分的递推公式:

$$\begin{aligned}
 (1) I_n &= \int x^n \cos x dx; & (2) I_n &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}; \\
 (3) I_n &= \int \tan^n x dx; & (4) I_n &= \int \frac{1}{\sin^n x} dx; \\
 (5) I_{n,m} &= \int x^n (\ln x)^m dx; & (6) I_n &= \int (\arcsin x)^n dx.
 \end{aligned}$$

**解** 证明递推公式,常用分部积分法.分部积分法又可分为降幂法与升幂法,依  $dv$  的幂次降升而命名,方式是相同的.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad I_n &= \int x^n d\sin x = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x dx \\
 &= x^n \sin x + n \left[ x^{n-1} \cos x - (n-1) \int x^{n-2} \cos x dx \right] \\
 &= x^n \sin x + nx^{n-1} \cos x - n(n-1)I_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots, \\
 I_0 &= \sin x + c, \quad I_1 = x \sin x + \cos x + c.
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad I_n = \frac{1}{a^2} \int \frac{(x^2 + a^2) - x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^n},$$

而

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^n} &= \frac{-1}{2(n-1)} \int x d \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} \\
 &= \frac{-1}{2(n-1)} \left[ \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} - I_{n-1} \right],
 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
 I_n &= \left[ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{2a^2(n-1)} \right] I_{n-1} + \frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} \\
 &= \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}}, \\
 &\qquad\qquad\qquad n = 2, 3, \dots,
 \end{aligned}$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c.$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad I_n &= \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx \\
 &= \int \tan^{n-2} x d \tan x - \int \tan^{n-2} x dx \\
 &= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}, \quad n = 3, 4, \dots, \\
 I_1 &= -\ln \cos x + c, \quad I_2 = \tan x - x + c.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad I_n &= - \int \frac{d \cot x}{\sin^{n-2} x} = - \frac{\cot x}{\sin^{n-2} x} - \int \frac{\cot x \cdot (n-2) \cos x}{\sin^{n-1} x} dx \\
 &= - \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2) \int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x} dx \\
 &= - \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2) I_n + (n-2) I_{n-2},
 \end{aligned}$$

移项即得

$$I_n = \frac{1}{1-n} \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}.$$



用下面方法同样可以得出

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^n x} dx = I_{n-2} - \frac{1}{n-1} \int \cos x d \frac{1}{\sin^{n-1} x} \\ &= I_{n-2} - \frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} - \frac{1}{n-1} I_{n-2} \\ &= \frac{\cos x}{(1-n)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}, \end{aligned}$$

$$I_1 = \ln \left| \tan x + \frac{x}{2} \right| + c, \quad I_2 = -\cot x + c.$$

$$\begin{aligned} (5) \quad I_{n,m} &= \int (\ln x)^m d \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left[ x^{n+1} (\ln x)^m - m \int (\ln x)^{m-1} x^n dx \right] \\ &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} (\ln x)^m - \frac{m}{n+1} I_{n,m-1}, \\ I_{n,0} &= \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \quad I_n &= x(\arcsin x)^n - n \int (\arcsin x)^{n-1} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= x(\arcsin x)^n + n \int (\arcsin x)^{n-1} d \sqrt{1-x^2} \\ &= x(\arcsin x)^n + n \sqrt{1-x^2} (\arcsin x)^{n-1} \\ &\quad - n \int (n-1) \arcsin^{n-2} x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} dx \\ &= n(\arcsin x)^n + n \sqrt{1-x^2} (\arcsin x)^{n-1} \\ &\quad - n(n-1) I_{n-2}. \end{aligned}$$

**例 26** 用多种方法计算下列不定积分:

$$(1) \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx; \quad (2) \int \frac{dx}{x \sqrt{4-x^2}}.$$

**解** 同一个积分,求积的方法有很多,只要多动脑筋,定能找出一种简便的方法.

(1) 解法 1 令  $\cot x = t, dx = \frac{-dt}{1+t^2}$ , 则

$$\begin{aligned} I &= - \int \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{1}{2} \int \left( \frac{t-1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} \ln|1+t^2| - \frac{1}{2} \arctan t - \frac{1}{2} \ln|1+t| + c. \end{aligned}$$

解法 2 分子分母同乘以  $\cos x - \sin x$ , 得

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin x (\cos x - \sin x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int \left( \frac{\sin 2x}{2\cos 2x} - \frac{1 - \cos 2x}{2\cos 2x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left( 1 + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{1}{\cos 2x} \right) dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \ln|\cos 2x| - \frac{1}{4} \ln|\sec 2x + \tan 2x| + c. \end{aligned}$$

解法 3 
$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin x (\cos x - \sin x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx \\ &= \int \left( \frac{\sin x \cos x}{2\cos^2 x - 1} - \frac{1 - \cos 2x}{2\cos 2x} \right) dx \\ &= -\frac{1}{4} \int \frac{d(2\cos^2 x - 1)}{2\cos^2 x - 1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos 2x} + \frac{1}{2} \int dx \\ &= -\frac{1}{4} \ln|2\cos^2 x - 1| - \frac{1}{4} \ln|\sec 2x + \tan 2x| \\ &\quad + \frac{x}{2} + c. \end{aligned}$$

解法 4 
$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin x - \cos x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \int \frac{-d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} \\ &\quad + \int \frac{(\cos x + \sin x) - \sin x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= -\ln|\sin x + \cos x| + x - I, \end{aligned}$$

移项即得.

解法 5 
$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sin x dx}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \quad \left( \text{令 } x - \frac{\pi}{4} = t \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sin(t + \pi/4)}{\cos t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{\sin t + \cos t}{\cos t} dt \\
&= -\frac{1}{2} \ln |\cos t| + \frac{t}{2} + c.
\end{aligned}$$

解法 6  $I = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{\sin(x + \pi/4 - \pi/4) dx}{\sin x \cos(\pi/4) + \cos x \sin(\pi/4)}$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{\sin(x + \pi/4) - \cos(x + \pi/4)}{2 \sin(x + \pi/4)} dx \\
&= \frac{1}{2} \int \left[ 1 - \frac{\cos(x + \pi/4)}{\sin(x + \pi/4)} \right] dx \\
&= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln |\sin(x + \pi/4)| + c.
\end{aligned}$$

解法 7 令  $\tan \frac{x}{2} = t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ , 则

$$I = \int \left( \frac{1+t}{1+t^2} - \frac{1-t}{1+2t-t^2} \right) dt,$$

解法 8 令  $\tan x = t, dx = \frac{dt}{1+t^2}$ , 则

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\tan x}{\tan x + 1} dx = \int \frac{t dt}{(t+1)(t^2+1)} \\
&= \frac{1}{2} \int \left( \frac{t+1}{t^2+1} - \frac{1}{t+1} \right) dt.
\end{aligned}$$

(2) 解法 1 令  $x = 2 \sin t, dx = 2 \cos t dt$ , 则

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{2 \cos t dt}{2 \sin t \cdot 2 \cos t} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| + c \\
&= \frac{1}{2} \ln \left| \tan \left( \frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{2} \right) \right| + c.
\end{aligned}$$

解法 2 令  $\sqrt{4-x^2} = t, dx = \frac{-t}{\sqrt{4-t^2}} dt$ , 则

$$I = \int \frac{dt}{t^2-4} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + c = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{4-x^2}+2} \right| + c.$$

解法 3 令  $\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = t, dx = \frac{8t dt}{(t^2+1)^2}$ , 则

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}} \right| + c.
 \end{aligned}$$

解法 4 令  $x^2 = \frac{1}{t}$ ,  $\frac{dx}{x} = -\frac{dt}{2t}$ , 则

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{4\sqrt{4-1/t}} = -\frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-t/4}} \\
 &= -\frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt{(t-1/8)^2 - (1/8)^2}} \\
 &= -\frac{1}{4} \ln \left| \left( t - \frac{1}{8} \right) + \sqrt{t^2 - 1/4} \right| + c \\
 &= -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{4-x^2}}{2x^2} \right| + c.
 \end{aligned}$$

解法 5 令  $\sqrt{4-x^2} = tx$ ,  $2\frac{dx}{x} = -\frac{2t}{1+t^2}dt$ , 则

$$\begin{aligned}
 I &= -\int \frac{tdt}{(1+t^2)2t/\sqrt{1+t^2}} = -\frac{1}{2} \ln |t + \sqrt{1+t^2}| + c \\
 &= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{2 + \sqrt{4-x^2}}{x} \right| + c.
 \end{aligned}$$

解法 6 令  $x = \frac{1}{t}$ , 见例 12 题(2).

以上两个例题各有多种解法, 它们的形式虽然各不相同, 但可验证, 其结果是同一函数的原函数. 有的解法没有完整写出, 请读者自行补全.

下面介绍分段函数求不定积分的例子.

例 27 计算下列不定积分:

$$(1) \int |x|e^x dx; \quad (2) \int \max\{1, x^2\} dx.$$

解 由于被积函数为分段函数, 应分段计算. 再利用连续性确定任意常数与分段函数分界点的原函数.

$$(1) \text{ 当 } x \geqslant 0 \text{ 时, } I = \int x e^x dx = (x-1)e^x + c_1,$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } I = \int -x e^x dx = (1-x)e^x + c_2.$$

因为  $|x|e^x$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 其原函数在  $(-\infty, +\infty)$  上存在且连续, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [(x-1)e^x + c_1] = \lim_{x \rightarrow 0^-} [(1-x)e^x + c_2],$$

$$\text{即} \quad -1 + c_1 = 1 + c_2 \Rightarrow c_1 = 2 + c_2.$$

$$\text{于是} \quad \int |x| e^x dx = \begin{cases} (x-1)e^x + 2 + c, & x \geqslant 0, \\ (1-x)e^x + c, & x < 0. \end{cases}$$

$$(2) \text{ 当 } |x| \leqslant 1 \text{ 时, } I = \int dx = x + c_1,$$

$$\text{当 } x > 1 \text{ 时, } I = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c_2,$$

$$\text{当 } x < -1 \text{ 时, } I = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c_3.$$

因为  $\max\{1, x^2\}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 其原函数在  $(-\infty, +\infty)$  上存在且连续, 所以

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left( -\frac{1}{3}x^2 + c_3 \right) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x + c_1),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x + c_1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{3}x^3 + c_2 \right).$$

$$\text{得} \quad \begin{cases} -\frac{1}{3} + c_3 = -1 + c_1, \\ \frac{1}{3} + c_2 = 1 + c_1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = \frac{2}{3} + c_1, \\ c_3 = -\frac{2}{3} + c_1. \end{cases}$$

$$\text{所以} \quad \int \max\{1, x^2\} dx = \begin{cases} x + c, & |x| \leqslant 1, \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3} + c, & x < -1, \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3} + c, & x > 1. \end{cases}$$

例 28 利用化二次三项式为正则型来计算下列不定积分:

$$(1) \int \frac{dx}{a + bx^2} \quad (ab \neq 0); \quad (2) \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - x + 2}};$$

$$(3) \int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1}; \quad (4) \int \frac{x dx}{x^4 - 2x^2 - 1};$$

$$(5) \int \frac{x dx}{x^2 - 2x \cos a + 1};$$

$$(6) \int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 5\cos^2 x}.$$

解 (1) 当  $ab > 0$  时, 有

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a + bx^2} &= \operatorname{sgn} a \frac{1}{\sqrt{|b|}} \int \frac{d(\sqrt{|b|x})}{(\sqrt{|a|})^2 + (\sqrt{|b|x})^2} \\ &= \operatorname{sgn} a \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan \left[ x \sqrt{\frac{b}{a}} \right] + c; \end{aligned}$$

当  $ab < 0$  时, 有

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a + bx^2} &= \operatorname{sgn} a \int \frac{dx}{|a| - |b|x^2} \\ &= \operatorname{sgn} a \frac{1}{\sqrt{|b|}} \int \frac{d(\sqrt{|b|x})}{(\sqrt{|a|})^2 - (\sqrt{|b|x})^2} \\ &= \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{-ab}} \ln \left| \frac{\sqrt{|a|} + x \sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|} - x \sqrt{|b|}} \right| + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - x + 2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x - 1/4)^2 + (\sqrt{15}/4)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left( x - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 - x/2 + 1} \right) + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 - 2x/3 - 1/3} \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{d(x - 1/3)}{(x - 1/3)^2 - (2/3)^2} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \ln \left| \frac{2/3 + (x - 1/3)}{2/3 - (x - 1/3)} \right| + c_1 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{3x+1} \right| + c.$$

$$\begin{aligned} (4) \int \frac{x dx}{x^4 - 2x^2 - 1} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2 - (\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 - (\sqrt{2} + 1)}{x^2 + (\sqrt{2} - 1)} \right| + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \int \frac{dx}{x^2 - 2x \cos a + 1} &= \int \frac{x - \cos a + \cos a}{(x - \cos a)^2 + \sin^2 a} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d[(x - \cos a)^2 + \sin^2 a]}{(x - \cos a)^2 + \sin^2 a} \\ &\quad + \cos a \int \frac{d(x - \cos a)}{(x - \cos a)^2 + \sin^2 a} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x \cos a + 1) + \cot a \arctan \left( \frac{x - \cos a}{\sin a} \right) + c, \\ &\quad a \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 5\cos^2 x} &= \int \frac{d(\tan x)}{3\tan^2 x - 8\tan x + 5} \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{d(\tan x - 4/3)}{(\tan x - 4/3)^2 - (1/3)^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1/3 - (\tan x - 4/3)}{1/3 + (\tan x - 4/3)} \right| + c_1 \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{3\sin x - 5\cos x}{\sin x - \cos x} \right| + c. \end{aligned}$$

### 第三节 有理函数与无理函数的不定积分

#### 主要内容

1. 由两个多项式函数的商所表示的函数称为有理函数, 其一般表示形式为

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m},$$

其中  $n, m$  为正整数,  $a_0, a_1, \cdots, a_n$  和  $b_0, b_1, \cdots, b_m$  为常数,  $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ .

可以用待定系数法或赋值法将有理真分式分解为部分分式. 有理真分式的积分可归结为两种形式的积分:

$$(1) \int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \ln|x-a| + c, & n=1, \\ \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + c, & n>1; \end{cases}$$

$$(2) \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx = A \int \frac{tdt}{(t^2+r^2)^n} + B \int \frac{dt}{(t^2+r^2)^n},$$

其中  $t = x + \frac{p}{2}$ .

当  $n=1$  时, 有

$$\begin{cases} \int \frac{t}{t^2+r^2} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2+r^2) + c, \\ \int \frac{1}{t^2+r^2} dt = \frac{1}{r} \arctan \frac{t}{r} + c. \end{cases}$$

当  $n>1$  时, 有

$$\begin{cases} \int \frac{tdt}{(t^2+r^2)^n} = \frac{1}{2(1-n)(t^2+r^2)^{n-1}} + c, \\ \int \frac{dt}{(t^2+r^2)^n} = \frac{2n-3}{2r^2(n-1)} I_{n-1} + \frac{t}{2r^2(n-1)(t^2+r^2)^{n-1}}. \end{cases}$$

2. 关于  $\sin x, \cos x$  的有理式的不定积分  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  称为三角函数有理式的不定积分.

(1) 常用代换有万能代换(半角代换). 令  $\tan \frac{x}{2} = t$ , 则

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

(2) 若等式  $R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$

或  $R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$

成立, 可利用代换  $\cos x = t$  或  $\sin x = t$  计算积分.



(3) 若等式  $R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$  成立, 可利用代换  $\tan x = t$  计算积分.

但有时利用三角函数关系式和换元积分法过程可能更加简捷. 因此, 在选择解题方法时, 务须认真思考.

### 3. 无理函数的积分

(1)  $\int R\left[x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right] dx$  型积分, 其中  $n > 1, ad - bc \neq 0$ . 一

般令  $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$  即可化为  $t$  的有理函数的积分, 利用有理函数积分法计算积分.

(2)  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$  型积分, 其中  $a, b, c$  满足条件:

$a > 0$  时,  $b^2 - 4ac \neq 0$ ;  $a < 0$  时,  $b^2 - 4ac > 0$ . 一般令  $u = x + \frac{b}{2a}$ ,

$k = \sqrt{|(4ac - b^2)/(4a^2)|}$ , 则二次三项式  $ax^2 + bx + c$  化为  $|a|(u^2 + k^2)$ ,  $|a|(u^2 - k^2)$ ,  $|a|(k^2 - u^2)$ . 积分化为

$$\int R(u, \sqrt{u^2 + k^2}) du, \quad \int R(u, \sqrt{u^2 - k^2}) du,$$

$$\int R(u, \sqrt{k^2 - u^2}) du,$$

分别令  $u = k \tan t, u = k \sec t, u = k \sin t$ , 代换后化为三角函数有理式的积分来计算.

(3) 欧拉代换 对二次三项式  $ax^2 + bx + c$ , 有三种类型的欧拉代换.

第一种类型: 若  $a > 0$ , 令  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{a}x + z$ ;

第二种类型: 若  $c > 0$ , 令  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xz \pm \sqrt{c}$ ;

第三种类型:  $\sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = z(x - x_1)$ .

4. 二项微分式  $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ , 在以下三种情形可化为有理函数的积分(契比雪夫定理):

- (1)  $p$  为整数, 令  $x = z^N$ , 其中  $N$  为分数  $m$  和  $n$  的公分母;  
 (2)  $\frac{m+1}{n}$  为整数, 令  $a + bx^n = z^N$ , 其中  $N$  为分数  $p$  的分母;  
 (3)  $\frac{m+1}{n} + p$  为整数, 令  $ax^{-n} + b = z^N$ , 其中  $N$  为分数  $p$  的分母.

还有其它一些代换, 依具体情形确定.

## 疑 难 解 析

1. 在分解真分式为部分分式时, 如何选择分解的方法?

答 分解真分式为部分分式常用待定系数法和赋值法. 一般来说, 待定系数法比较麻烦, 费时间, 又容易出错, 但适合一切形式的真分式. 如

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1}{x^5 + 2x^3 + x} \\ &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

其中  $A, B, C, D, E$  为待定常数.

将上式右边通分后, 得一恒等式

$$\begin{aligned} &3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1 \\ &= (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A \end{aligned}$$

比较同次幂系数建立方程组, 解方程组得

$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = 1, \quad D = 0, \quad E = -1,$$

于是

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1}{x^5 + 2x^3 + x} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{2x + 1}{x^2 + 1} - \frac{1}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

赋值法比较简单, 但有一定条件限制. 当有理分式分母有实根或者分母有虚根(但是为重根)时, 可用赋值法.

上例的分母有实根  $x = 0$ , 有二重虚根  $\pm i$ , 恒等式可写为

$$3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1$$

$$= A(x^2 + 1)^2 + x(Bx + C)(x^2 + 1) + x(Dx + E).$$

令  $x = 0$ , 得  $1 = A$ ;

令  $x = i$ , 得  $-i = -D + Ei \Rightarrow D = 0, E = -1$ ;

令  $x = 1$ , 得  $9 = 2(B + C) - 3 \Rightarrow B + C = 3$ ;

令  $x = -1$ , 得  $7 = 2(B - C) + 5 \Rightarrow B - C = 1$ .

解得 
$$\begin{cases} B + C = 3, \\ B - C = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 2, \\ C = 1, \end{cases}$$

与待定系数法有相同结果, 但运算相对简单.

## 2. 初等函数的原函数是否还是初等函数?

答 否. 初等函数的原函数不一定是初等函数. 如  $\int e^{-x^2} dx$ ,  $\int \frac{dx}{\ln x}$ ,  $\int \frac{\sin x}{x} dx$  等都不表示初等函数, 不能用有限形式写出.

## 方法、技巧与典型例题分析

### 一、有理函数的不定积分

形如  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_m x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0}$  的函数称为有理函数, 其中  $m, n$  为正整数或零,  $a_i, b_j (i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m)$  为常数, 且  $a_m, b_m$  不等于零. 有理函数为真分式时, 直接用待定系数法或赋值法(见疑难解析 1) 分解为部分分式, 然后用前面讲过的方法计算不定积分; 有理函数为假分式时, 要先变形为一个多项式和一个真分式之和, 再进行分解与积分. 有理真分式的积分可归结为两种形式的积分(见主要内容 1), 读者应熟悉并记住它们的计算公式.

有理函数积分中的某些情形, 采用换元积分法或分部积分法可能会更简便, 这要由具体情形确定, 请读者通过例题细细体会.

例 1 计算下列不定积分:

$$(1) \int \frac{4x^3 - 13x^2 + 3x + 8}{(x+1)(x-2)(x-1)^2} dx; \quad (2) \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx;$$

$$(3) \int \frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1}{x^5 + 3x^3 + x} dx; \quad (4) \int \frac{x^2}{(x^2 - 3x + 2)^2} dx.$$

解 在分解真分式为部分分式时,能用赋值法分解的就不要用待定系数法.为节省篇幅,我们将不写出分解过程.

$$\begin{aligned} (1) & \int \frac{4x^3 - 13x^2 + 3x + 8}{(x+1)(x-2)(x-1)^2} dx \quad (\text{用赋值法,令 } x = -1, 2, 1, 0) \\ &= \int \left[ \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-2} + \frac{5}{x-1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right] dx \\ &= \ln \left| \frac{(x+1)(x-1)^5}{(x-2)^2} \right| + \frac{1}{x-1} + c. \end{aligned}$$

(2) 被积函数为假分式,需先变形为

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 - 16x - 8}{x^3 - 4x},$$

$$\frac{4x^2 - 16x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{2}{x} + \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2} \quad (\text{赋值法,令 } x = 0, 2, -2).$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx &= \int \left( x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2} \right) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 2\ln|x| + 5\ln|x-2| \\ &\quad - 3\ln|x+2| + c. \end{aligned}$$

$$(3) \text{ 因为 } \frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1}{x^5 + 2x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}.$$

先令  $x = 0 \Rightarrow A = 1$ ,再用待定系数法计算,得

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1}{x^5 + 2x^3 + x} dx &= \int \left[ \frac{1}{x} + \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2} \right] dx \\ &= \ln|x| + \ln|x^2+1| + \arctan x - \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2} dx \\ &= \ln|x(x^2+1)| + \arctan x - \left[ \arctan x - \int \frac{x d(x^2+1)}{2(x^2+1)^2} \right] \\ &= \ln|x(x^2+1)| - \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x + c. \end{aligned}$$

注意 解题过程中要结合其它方法(换元积分法、分部积分

法)一起使用.

(4) 注意  $(x^2 - 3x + 2)$  不是二次质因式, 故

$$\frac{x^2}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2}$$

(赋值法, 令  $x = 1, 2, 0, 3$ , 解方程组).

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^2 dx}{(x^2 - 3x + 2)^2} \\ &= \int \left[ \frac{4}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{4}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} \right] dx \\ &= 4 \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - 4 \ln|x-2| - \frac{4}{x-2} + c \\ &= \ln \left( \frac{x-1}{x-2} \right)^4 - \frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-2} + c. \end{aligned}$$

例 2 计算下列不定积分:

$$\begin{aligned} (1) & \int \frac{x-5}{x^3-3x^2-4} dx; & (2) & \int \frac{dx}{x(1+x^2)^2}; \\ (3) & \int \frac{x dx}{(x-1)(x^2+1)}; & (4) & \int \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x+1)} dx. \end{aligned}$$

解 (1)  $\frac{x-5}{x^3-3x^2-4} = \frac{-2/3}{x+1} + \frac{2/3}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2}$   
(令  $x = 2, -1, 0$ ).

$$\begin{aligned} \int \frac{x-5}{x^3-3x^2-4} dx &= \int \left[ -\frac{2/3}{x+1} + \frac{2/3}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} \right] dx \\ &= \frac{2}{3} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| - \frac{1}{x-2} + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{1}{x(1+x^2)^2} &= \frac{(1+x^2)-x^2}{x(1+x^2)^2} = \frac{1}{x(1+x^2)^2} - \frac{x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx &= \int \left[ \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{(1+x^2)^2} \right] dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} + c. \end{aligned}$$

能以拼凑方式达到分解部分分式是一种技巧的展现, 多做练

习将有助于这种技巧的掌握.

$$(3) \quad x = [(x^2 + 1) - (x - 1)^2]/2.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(x-1)(x^2+1)} &= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1) - (x-1)^2}{(x-1)(x^2+1)} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{x-1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|1+x^2| - \frac{1}{2} \arctan x + c. \end{aligned}$$

$$(4) \quad x^2 + 1 = x^2 - x + x + 1 = (x-1)x + (x+1).$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x+1)} dx &= \int \frac{(x-1)x + (x+1)}{(x^2-1)(x+1)} dx \\ &= \int \frac{x dx}{(x+1)^2} + \int \frac{dx}{x^2-1} \\ &= \int \frac{x+1-1}{(x+1)^2} dx + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \\ &= \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c \\ &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + c. \end{aligned}$$

例 3 计算下列不定积分:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int \frac{(x^2+1)dx}{x^4+2x^3+3x^2-2x+1}; & (2) \quad & \int \frac{dx}{x(1+x^3)^2}; \\ (3) \quad & \int \frac{dx}{x^4+1}; & (4) \quad & \int \frac{x^3}{3+x} dx. \end{aligned}$$

解 将被积函数变形后, 用换元积分法或分部积分法计算.

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int \frac{(x^2+1)dx}{x^4+2x^3+3x^2-2x+1} \\ & \quad \xrightarrow{\text{同除以 } x^2} \int \frac{(1+1/x^2)dx}{x^2+2x-3-2/x+1/x^2} \\ & \quad = \int \frac{d(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2(x-1/x)+5} \\ & \quad = \int \frac{d(x-1/x)}{(x-1/x+1)^2+4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x^2+x+1}{2x} + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int \frac{dx}{x(1+x^3)^2} &= \int \frac{x^2 dx}{x^3(1+x^3)^2} \quad (\text{令 } 1+x^3=t) \\
 &= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{(t-1)t^2} = \frac{1}{3} \int \left( \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt \\
 &= \frac{1}{3} \left( \ln|t-1| - \ln|t| - \frac{1}{t} \right) + c \\
 &= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x^3}{x^3+1} \right| + \frac{1}{3(1+x^3)} + c.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int \frac{dx}{x^4+1} &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{1+1/x^2}{x^2+1/x^2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{d(x+1/x)}{(x+1/x)^2-2} \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(x+1/x)}{(x+1/x)^2-2} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + c.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \int \frac{x^3}{3+x} dx &= \int \frac{x^3+27+21}{x+3} dx \\
 &= \int (x^2-3x+9) dx - 27 \int \frac{d(x+3)}{x+3} \\
 &= \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 27\ln|x+3| + c.
 \end{aligned}$$

**例 4** 计算下列不定积分:

$$(1) \int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2} dx;$$

$$(2) \int \frac{3x^2-9}{(x^2-x-2)(x^2-2x+5)^2} dx;$$

$$(3) \int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx; \quad (4) \int \frac{dx}{(x^2+x+8)^2}.$$

**解**

$$\begin{aligned}
 (1) \int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{(2x+2) + 4/3}{(x^2+2x+2)^2} dx \\
 &= \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} + 2 \int \frac{d(x+1)}{[(x+1)^2+1]^2} \\
 &= -\frac{3}{2} \frac{1}{x^2+2x+2}
 \end{aligned}$$

$$+ 2 \left[ \frac{x+1}{2(x^2+2x+2)} + \frac{1}{2} \arctan(x+1) \right] + c$$

$$= \frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)} + \arctan(x+1) + c.$$

$$(2) \int \frac{(3x^2-9)dx}{(x^2-x-2)(x^2-2x+5)^2}$$

$$= \int \frac{(3x^2-9)dx}{(x+1)(x-2)(x^2-2x+5)^2}$$

$$= \int \left[ \frac{1}{32(x+1)} + \frac{1}{25(x-2)} - \frac{57x-75}{800(x^2-2x+5)} \right. \\ \left. - \frac{9x-75}{20(x^2-2x+5)^2} \right] dx,$$

其中  $\int \frac{57x-75}{x^2-2x+5} dx = \int \frac{57(x-1)-18}{(x-1)^2+4} dx$

$$= \frac{57}{2} \ln|x^2-2x+5| - 9 \arctan \frac{x-1}{2} + c_1,$$

$$\int \frac{9x-75}{(x^2-2x+5)^2} dx$$

$$= \frac{9}{2} \int \frac{d(x^2-2x+5)}{(x^2-2x+5)^2} - 66 \int \frac{d(x-1)}{[(x-1)^2+4]^2}$$

$$= -\frac{9}{2} \frac{1}{x^2-2x+5} - \frac{33}{4} \left[ \frac{x-1}{x^2-2x+5} + \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2+4} \right]$$

$$= \frac{15-33x}{4(x^2-2x+5)} - \frac{33}{8} \arctan \frac{x-1}{2} + c_2,$$

故  $\int \frac{(3x^2-9)dx}{(x^2-x-2)(x^2-2x+5)^2}$

$$= \frac{1}{32} \ln|x+1| + \frac{1}{25} \ln|x-2| - \frac{57}{1600} \ln|x^2-2x+5|$$

$$+ \frac{33x-15}{80(x^2-2x+5)} + \frac{87}{400} \arctan \frac{x-1}{2} + c.$$

$$(3) \int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x-6)+16}{x^2-6x+13} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13} + 8 \int \frac{d(x+3)}{(x-3)^2+2^2}$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x^2-6x+13| + 4 \arctan \frac{x-3}{2} + c.$$



$$\begin{aligned}
 (4) \quad \frac{1}{(x^2 + 6x + 8)^2} &= \left[ \frac{(x+4) - (x+2)}{2(x+4)(x+2)} \right]^2 \\
 &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} - \frac{1}{(x+2)(x+4)} \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+2} \right],
 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{dx}{(x^2 + 6x + 8)^2} \\
 &= \frac{1}{4} \int \left[ \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+2} \right] dx \\
 &= \frac{1}{4} \left[ \ln \left| \frac{x+4}{x+2} \right| - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right] + c.
 \end{aligned}$$

例 5 计算下列不定积分:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad &\int \frac{x^{11} dx}{x^8 + 3x^4 + 2}; & (2) \quad &\int \frac{x^7}{(1-x^2)^5} dx; \\
 (3) \quad &\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx; & (4) \quad &\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} dx.
 \end{aligned}$$

解 利用变形和代换求解更为简便.

(1) 令  $x^4 = t$ , 则

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{x^{11} dx}{x^8 + 3x^4 + 2} = \int \frac{x^8 dx^4}{4(x^8 + 3x^4 + 2)} \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{t^2 dt}{t^2 + 3t + 2} = \frac{1}{4} \int \left[ 1 + \frac{1}{t+1} - \frac{4}{t+2} \right] dt \\
 &= \frac{1}{4} [t + \ln|t+1| - 4\ln|t+2|] + c \\
 &= \frac{1}{4} [x^4 + \ln|1+x^4| - 4\ln|2+x^4|] + c.
 \end{aligned}$$

(2) 令  $1 - x^2 = t, x^2 = 1 - t$ , 则

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{x^7 dx}{(1-x^2)^5} = -\frac{1}{2} \int \frac{(1-t)^3}{t^5} dt = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{t^2} - \frac{3}{t^3} + \frac{3}{t^4} - \frac{1}{t^5} \right) dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{(1-x^2)} + \frac{3}{2(1-x^2)^2} - \frac{1}{(1-x^2)^3} + \frac{1}{4(1-x^2)^4} \right] + c.
 \end{aligned}$$

$$(3) \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \int \frac{1 + 1/x^2}{x^2 + 1/x^2} dx = \int \frac{d(x - 1/x)}{(x - 1/x)^2 + 2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x} + c.$$

$$(4) \int \frac{(x^2 - 1)dx}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} = \int \frac{(1 - 1/x^2)dx}{(x^2 + 1/x^2) + (x + 1/x) + 1}$$

$$= \int \frac{d(x + 1/x)}{(x + 1/x)^2 + (x + 1/x) - 1}$$

$$= \int \frac{d(x + 1/x + 1/2)}{[(x + 1/x) + 1/2]^2 - 5/4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{x + 1/x + 1/2 - \sqrt{5}/2}{x + 1/x + 1/2 + \sqrt{5}/2} + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{2x^2 + (1 - \sqrt{5})x + 2}{2x^2 + (1 + \sqrt{5})x + 2} + c.$$

## 二、三角函数有理式的不定积分

三角函数有理式的不定积分也有多种不同的计算方法. 一般来说, 若能利用三角函数的关系式或凑微分法来计算, 会相对简单一些. 而用万能代换、正切代换时, 计算相对麻烦一些. 因此, 要逐步掌握选取计算量最小的方法, 尽量少用万能代换来计算.

**例 6** 用万能代换计算下列不定积分:

$$(1) \int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx; \quad (2) \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x};$$

$$(3) \int \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} dx; \quad (4) \int \frac{\sin^3 x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^4}.$$

**解** 万能代换即半角代换, 令  $\tan \frac{x}{2} = t, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ .

$$(1) \int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx = 4 \int \frac{t}{(1+t)^2} \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= 4 \int \left[ -\frac{1}{2(1+t)^2} + \frac{1}{2(1+t)^2} \right] dt$$

$$= \frac{2}{1+t} + \arctan t + c$$

$$= \frac{2}{1 + \tan x/2} + 2\arctan\left(\tan \frac{x}{2}\right) + c$$

$$= \frac{2}{1 + \tan x/2} + x + c.$$

$$(2) \int \frac{dx}{1 + \cos x + \sin x} = \int \frac{2dt/(1+t^2)}{1 + 2t/(1+t^2) + (1-t^2)/(1+t^2)}$$

$$= \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + c = \ln\left|1 + \tan \frac{x}{2}\right| + c.$$

$$(3) \int \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} dx = \int \frac{2\sin^2(x/2)}{2\cos^2(x/2)} dx = \int \tan^2 \frac{x}{2} dx$$

$$= \int \left(\sec^2 \frac{x}{2} - 1\right) dx = 2\tan \frac{x}{2} - x + c.$$

上述解法实际上并未用万能代换. 若令  $\tan \frac{x}{2} = t$ , 则

$$\int \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} dx = \int \frac{2t^2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{t^2 + 1 - 1}{1+t^2} dt$$

$$= 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = 2t - 2\arctan t + c$$

$$= 2\tan \frac{x}{2} - 2\arctan\left(\tan \frac{x}{2}\right) + c = 2\tan \frac{x}{2} - x + c.$$

$$(4) \int \frac{\sin^3 x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^4}$$

$$= \int \frac{[2\sin(x/2) \cdot \cos(x/2)]^3 dx}{[2\cos^2(x/2) - 2\sin(x/2)\cos(x/2)]}$$

$$= \int \frac{\tan^3(x/2) dx}{2[1 - \tan(x/2)]^4 \cos^2(x/2)} \left(\text{令 } \tan \frac{x}{2} = t\right)$$

$$= \int \frac{t^3 dt}{(1-t)^4} = \int \frac{[(t-1) + 1]^3}{(t-1)^4} dt$$

$$= \int \left[\frac{1}{t-1} + \frac{3}{(t-1)^2} + \frac{3}{(t-1)^3} + \frac{1}{(t-1)^4}\right] dt$$

$$= \ln|t-1| - \frac{3}{t-1} - \frac{3}{2(t-1)^2} - \frac{1}{3(t-1)^3} + c$$

$$= \ln\left|\tan \frac{x}{2} - 1\right| - \frac{3}{\tan(x/2) - 1} - \frac{3}{2[\tan(x/2) - 1]^2}$$

$$- \frac{1}{3[\tan(x/2) - 1]^3} + c.$$

例 7 计算下列不定积分:

$$(1) \int \frac{dx}{1 + \cos x + \sin x}; \quad (2) \int \sqrt{1 + \sin x} dx;$$

$$(3) \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}; \quad (4) \int \frac{\tan x dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}.$$

解 (1) 此题即例 6 题(2), 利用三角函数关系式, 有

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \cos x + \sin x} &= \int \frac{dx}{2\sin(x/2)\cos(x/2) + 2\cos^2(x/2)} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2(x/2)[1 + \tan(x/2)]} = \int \frac{d\tan(x/2)}{1 + \tan(x/2)} \\ &= \ln \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int \sqrt{1 + \sin x} dx &= \int \sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx \\ &= \int \sqrt{\left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2} dx = \int \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) dx \\ &= -2\cos \frac{x}{2} + 2\sin \frac{x}{2} + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x} &= 16 \int \csc^2 2x \left( -\frac{1}{2} \right) d\cot 2x \\ &= -8 \int (1 + \cot^2 2x) d\cot 2x \\ &= -\cot 2x - \frac{8}{3} (\cot 2x)^3 + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int \frac{\tan x dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} &= \int \frac{\tan x}{a^2 \tan^2 x + b^2} d\tan x \\ &= \frac{1}{2a^2} \int \frac{d(a^2 \tan^2 x + b^2)}{a^2 \tan^2 x + b^2} = \frac{1}{2a^2} \ln(a^2 \tan^2 x + b^2) + c. \end{aligned}$$

例 8 计算下列不定积分:

$$(1) \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}}; \quad (2) \int \frac{\cos^2 x - \sin x}{\cos x (1 + \cos x e^{\sin x})} dx;$$

$$(3) \int \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx; \quad (4) \int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x}.$$

解 (1) 因为

$$\begin{aligned}(a^2\cos^2x + b^2\sin^2x)' &= a^2 2\cos x(-\sin x) + 2b^2\sin x\cos x \\ &= (b^2 - a^2)\sin 2x,\end{aligned}$$

所以 
$$\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{a^2\cos^2x + b^2\sin^2x}} = \int \frac{1}{b^2 - a^2} \frac{d(a^2\cos^2x + b^2\sin^2x)}{\sqrt{a^2\cos^2x + b^2\sin^2x}}$$
$$= \frac{1}{b^2 - a^2} \sqrt{a^2\cos^2x + b^2\sin^2x} + c.$$

(2) 因为

$$(\cos x e^{\sin x})' = -\sin x e^{\sin x} + \cos^2 x e^{\sin x} = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x),$$

再将分子、分母同乘以  $e^{\sin x}$ , 得

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^2 x - \sin x}{\cos x (1 + \cos x e^{\sin x})} dx &= \int \frac{d(\cos x e^{\sin x})}{\cos x e^{\sin x} (1 + \cos x e^{\sin x})} \\ &= \int \frac{dt}{t(1+t)} = \int \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt = \ln \left| \frac{t}{1+t} \right| + c \\ &= \ln \left| \frac{\cos x e^{\sin x}}{1 + \cos x e^{\sin x}} \right| + c.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x} &= \int \frac{\tan x dx}{(1 + \tan^3 x)\cos^2 x} = \int \frac{\tan x d\tan x}{1 + \tan^3 x} \\ &\stackrel{\tan x = t}{=} \int \frac{t}{1+t^3} dt = \frac{1}{3} \int \frac{(t+1)^2 - (t^2 - t + 1)}{(t+1)(t^2 - t + 1)} dt \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{t+1}{t^2 - t + 1} dt - \frac{1}{3} \int \frac{1}{t+1} dt \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{2t-1+3}{t^2 - t + 1} + \frac{3}{3} \int \frac{d(t-1/2)}{(t-1/2)^2 + 3/4} \\ &\quad - \frac{1}{3} \ln|t+1| \\ &= \frac{1}{6} \ln|t^2 - t + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \ln|t+1| \\ &= \frac{1}{6} \ln|\tan^2 x - \tan x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2\tan x - 1}{\sqrt{3}} \\ &\quad - \frac{1}{3} \ln|\tan x + 1| + c.\end{aligned}$$

$$(4) \int \frac{dx}{(2 + \cos x)\sin x} = \frac{1}{3} \int \left[ \frac{\sin x}{2 + \cos x} - \frac{2 - \cos x}{\sin x} \right] dx$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{3} \int \frac{d\cos x}{2 + \cos x} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{\sin x} - \frac{1}{3} \int \frac{d\sin x}{\sin x} \\
&= \frac{1}{3} [\ln|2 + \cos x| + 2\ln|\csc x - \cot x| \\
&\quad - \ln|\sin x|] + c.
\end{aligned}$$

例 9 计算下列不定积分:

$$\begin{aligned}
(1) & \int \frac{dx}{2 + \tan^2 x}; & (2) & \int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x dx; \\
(3) & \int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx; & (4) & \int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}} dx.
\end{aligned}$$

解 (1)  $\int \frac{dx}{2 + \tan^2 x} = \int \frac{\cos^2 x}{1 + \cos^2 x} dx = \int \frac{1 + \cos^2 x - 1}{1 + \cos^2 x} dx$   
 $= x - \int \frac{d\tan x}{2 + \tan^2 x} = x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} + c.$

(2)  $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x dx = \int \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2) + 1}{2\cos^2(x/2)} e^x dx$   
 $= \int \left[ \tan \frac{x}{2} + \left( \tan \frac{x}{2} \right)' \right] e^x dx = \int d \left[ e^x \tan \frac{x}{2} \right]$   
 $= e^x \tan \frac{x}{2} + c.$

此题使用了在第二节例 4 题(3)中的方法.

(3)  $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx \xrightarrow{\sin x = t} \int \frac{t dt}{1 + t^4} = \frac{1}{2} \int \frac{dt^2}{1 + (t^2)^2}$   
 $= \frac{1}{2} \arctan t^2 + c = \frac{1}{2} \arctan(\sin^2 x) + c.$

(4)  $\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}} dx \xrightarrow{\cos x = t} \int \frac{\sin x}{(\cos x)^{3/2}} dx = - \int \frac{d\cos x}{(\cos x)^{3/2}}$   
 $= 2(\cos x)^{1/2} + c = \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + c.$

本例题(3)、题(4)选择代换  $\sin x = t, \cos x = t$  的理由请阅读本节主要内容 2 中的(2).

例 10 计算下列不定积分:

$$(1) \int \sqrt{\sin 2x} \cos x dx; \quad (2) \int \sin^2 x \cos^4 x dx.$$

解 (1) 令  $\sqrt{\tan x} = t$ . 因为

$$\sqrt{\sin 2x \cos x} = \sqrt{2} \sqrt{\sin x} (\cos^3 x)^{3/2},$$

而  $dt = d \sqrt{\tan x} = \frac{1}{2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x} (\cos x)^{3/2}}$ , 所以

$$\begin{aligned} \sqrt{\sin 2x \cos x} dx &= 2 \sqrt{2} \frac{\sin x}{\cos x} \cos^4 x d \sqrt{\tan x} \\ &= 2 \sqrt{2} \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right) \cdot \frac{1}{\sec^4 x} d \sqrt{\tan x} = 2 \sqrt{2} \tan^2 x \frac{d \sqrt{\tan x}}{(1 + \tan^2 x)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \int \sqrt{\sin 2x \cos x} dx &= 2 \sqrt{2} \int \frac{t^2 dt}{(1 + t^4)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{4t^3 dt}{t(1 + t^4)^2} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{t} d \frac{1}{1 + t^4} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{t(1 + t^4)} + \int \frac{dt}{t^2(1 + t^4)} \right] \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{t(1 + t^4)} + \int \left( \frac{1}{t^2} - \frac{t^2}{1 + t^4} \right) dt \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \int \frac{t^2}{1 + t^4} dt &= \int \frac{1}{2} \frac{(t^2 + 1) + (t^2 - 1)}{1 + t^4} dt \quad (\text{见例 5(3)}) \\ &= \frac{1}{2 \sqrt{2}} \left[ \arctan \frac{t^2 - 1}{\sqrt{2} t} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t^2 - \sqrt{2} t + 1}{t^2 + \sqrt{2} t + 1} \right| \right] + c_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \int \sqrt{\sin 2x \cos x} dx &= \frac{t^3}{\sqrt{2} (1 + t^4)} + \frac{1}{4} \arctan \frac{t^2 - 1}{\sqrt{2} t} \\ &\quad + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{t^2 - \sqrt{2} t + 1}{t^2 + \sqrt{2} t + 1} \right| + c \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\tan x)^{3/2}}{\sec^2 x} + \frac{1}{4} \arctan \frac{\tan x - 1}{\sqrt{2} \tan x} \\ &\quad + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{\tan x - \sqrt{2} \tan x + 1}{\tan x + \sqrt{2} \tan x + 1} \right| + c. \end{aligned}$$

(2) 因为

$$\begin{aligned} \sin^2 x \cos^4 x &= \frac{1}{4} (2 \sin x \cos x)^2 \cos^2 x = \frac{1}{8} \sin^2 2x (1 + \cos 2x) \\ &= \frac{1}{16} (1 - \cos 4x) + \frac{1}{8} \sin^2 2x \cos 2x, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx \\ &= \frac{x}{16} - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + c.\end{aligned}$$

例 11 建立递推公式  $I_m = \int \frac{dx}{\sin^m x}$  ( $m > 2, \in \mathbf{Z}^+$ )

$$\begin{aligned}\text{解 } I_m &= - \int \frac{1}{(\sin x)^{m-2}} d \cot x \\ &= - \frac{\cot x}{(\sin x)^{m-2}} - (m-2) \int \cot x \frac{\cos x}{(\sin x)^{m-1}} dx \\ &= - \frac{\cot x}{(\sin x)^{m-2}} - (m-2) \int \frac{1 - \sin^2 x}{(\sin x)^m} dx \\ &= - \frac{\cot x}{(\sin x)^{m-2}} - (m-2) \left[ \int \frac{dx}{(\sin x)^m} - \int \frac{dx}{(\sin x)^{m-2}} \right] \\ &= - \frac{\cot x}{(\sin x)^{m-2}} - (m-2) I_m + (m-2) I_{m-2},\end{aligned}$$

$$\text{则 } I_m = - \frac{\cos x}{(m-1)(\sin x)^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1} I_{m-2} \quad (m > 2).$$

### 三、无理函数的不定积分

一般无理函数的根式代换,读者可参看第二节例 9、例 14.事实上,三角代换、双曲代换也是对无理函数的不定积分的代换形式.下面再请读者观察、分析一些问题.

例 12 计算下列不定积分:

$$\begin{aligned}(1) \int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2 + x^4}}; & \quad (2) \int \frac{dx}{\sqrt{x^{14} - x^2}}; \\ (3) \int \sqrt{\frac{x}{1 - x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}; & \quad (4) \int \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x^2 + 1} dx.\end{aligned}$$

解 (1) 将被积函数变形后进行代换

$$\begin{aligned}& \int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2 + x^4}} \\ &= \operatorname{sgn} x \int \frac{(1 - 1/x^2) dx}{(x + 1/x) \sqrt{(x + 1/x)^2 - 1}}\end{aligned}$$



$$= \operatorname{sgn} x \frac{dt}{t \sqrt{t^2 - 1}} = \operatorname{sgn} x \int \frac{-d(1/t)}{\sqrt{1 - (1/t)^2}} \operatorname{sgn} t$$

$$= \int \frac{-d(1/t)}{\sqrt{1 - (1/t)^2}} = -\arcsin \frac{1}{t} + c = -\arcsin \frac{x}{1+x^2} + c.$$

$$(2) \int \frac{dx}{\sqrt{x^{14} - x^2}} = \int \frac{dx}{x^7 \sqrt{1 - x^{-12}}} = \frac{-1}{6} \int \frac{d(x^{-6})}{\sqrt{1 - (x^{-6})^2}}$$

$$= -\frac{1}{6} \arcsin\left(\frac{1}{x^6}\right) + c.$$

$$(3) \int \sqrt{\frac{x}{1-x}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{x^{1/2}}{\sqrt{1-x^{3/2}}} dx = \frac{2}{3} \int \frac{dx^{3/2}}{\sqrt{1-x^{3/2}}}$$

$$= -\frac{4}{3} \sqrt{1-x^{3/2}} + c = -\frac{4}{3} \sqrt{1-x} \sqrt{x} + c.$$

$$(4) \int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} + \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{(x^2+2)}}.$$

而  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \ln|x + \sqrt{x^2+2}| + c_1,$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{(x^2+1)+1}}$$

$$\stackrel{x = \sqrt{2} \tan t}{=} \int \frac{\sqrt{2} \sec^2 t dt}{(2 \tan^2 t + 1) \sqrt{2 \tan^2 t + 2}} = \int \frac{\cos t}{2 \sin^2 t + \cos^2 t} dt$$

$$= \int \frac{d \sin t}{1 + \sin^2 t} = \arctan(\sin t) + c_1$$

$$= \arctan \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + c_2,$$

故  $I = \ln|x + \sqrt{x^2+2}| + \arctan \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + c.$

**例 13** 计算下列不定积分:

$$(1) \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{(1+x^2)^3}}; \quad (2) \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx;$$

$$(3) \int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}; \quad (4) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}.$$

解 (1) 观察被积函数, 提出分母公因式, 得

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{(1+x^2)^3}} &= \int \frac{d(1+x^2)/2}{\sqrt{1+x^2} \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} \\ \xrightarrow{\sqrt{1+x^2}=t} \frac{1}{2} \int \frac{dt^2}{t \sqrt{1+t}} &= \int \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = 2 \int d \sqrt{1+t} \\ &= 2 \sqrt{1+t} + c = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + c.\end{aligned}$$

(2) 先用分部积分法, 再用倒代换, 得

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx &= x \cdot \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} - \int x \cdot \frac{9dx}{x^2 \sqrt{x^2-9}} \\ &= \sqrt{x^2-9} - \int \frac{9dx}{x \sqrt{x^2-9}} = \sqrt{x^2-9} + 3 \int \frac{d2t}{\sqrt{1-(3t)^2}} \\ &= \sqrt{x^2-9} + 3 \arcsin 3t + c. \\ &= \sqrt{x^2-9} + 3 \left( \frac{\pi}{2} - \arccos 3t \right) + c \\ &= \sqrt{x^2-9} - 3 \arccos \frac{3}{x} + c.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}} &= 2 \int \frac{d \sqrt{x}}{\sqrt{4-(\sqrt{x})^2}} \\ &= 2 \int \frac{d(\sqrt{x}/2)}{\sqrt{1-(\sqrt{x}/2)^2}} = 2 \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} + c.\end{aligned}$$

(4) 令  $x = \frac{1}{t}$ ,  $dx = -\frac{dt}{t^2}$ , 则

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}} = - \int \frac{|t|}{\sqrt{t^2+1}} dt.$$

当  $x > 0$  时, 有

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}} &= - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+t^2)}{\sqrt{1+t^2}} = - \sqrt{1+t^2} + c \\ &= - \frac{1}{x} \sqrt{1+x^2} + c,\end{aligned}$$

当  $x < 0$  时, 有

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(1+t^2)}{\sqrt{1+t^2}} = \sqrt{1+t^2} + c \\ &= \frac{1}{|x|} \sqrt{1+t^2} + c = -\frac{1}{x} \sqrt{1+t^2} + c.\end{aligned}$$

所以 
$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{x} \sqrt{1+t^2} + c.$$

**例 14** 用欧拉代换计算下列不定积分:

$$\begin{aligned}(1) & \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}; & (2) & \int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 + 2x - 8}}; \\ (3) & \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}; & (4) & \int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx.\end{aligned}$$

**解** (1) 用第一类型欧拉代换. 令  $\sqrt{x^2 + 2x + 5} = x - z$ , 则

$$x = \frac{z^2 - 5}{2(z + 1)}, \quad dx = \frac{z^2 + 2z + 5}{2(z + 1)^2} dz.$$

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} &= -\frac{1}{4} \int \frac{(z^2 - 5)^2}{(z + 1)^3} dz \\ &= -\frac{1}{4} \int \left[ \frac{16}{(z + 1)^3} + \frac{16}{(z + 1)^2} - \frac{4}{z + 1} - 4 + (z + 1) \right] dz \\ &= \frac{2}{(z + 1)^2} + \frac{4}{z + 1} + \ln|z + 1| - \frac{z^2}{8} + \frac{3}{4}z + c \\ &= \frac{x - 3}{2} \sqrt{x^2 + 2x + 5} + \ln|x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 5}| + c.\end{aligned}$$

(2) 用第三类型欧拉代换. 令  $\sqrt{x^2 + 2x - 8} = z(x + 4)$ , 则

$$x = \frac{4z^2 + 2}{1 - z^2}, \quad dx = \frac{12z}{(1 - z^2)^2} dz,$$

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 + 2x - 8}} &= \int \frac{z + 1}{2(1 - 2z)} \cdot \frac{12z}{(1 - z^2)^2} dz \\ &= \int \frac{6z dz}{(1 - 2z)(z + 1)(z - 1)^2} \\ &= \int \left[ \frac{9}{2(z - 1)} - \frac{1}{2(z + 1)} - \frac{8}{2z - 1} - \frac{3}{(z - 1)^2} \right] dz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{9}{2} \ln|z-1| - \frac{1}{2} \ln|z+1| - 4 \ln|z-1| + \frac{3}{z-1} + c_1 \\
&= \frac{1}{2} \ln|x+1-\sqrt{x^2+2x-8}| \\
&\quad + 4 \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+2x-8}-x+8}{x-4} \right| \\
&\quad - \frac{1}{2} \ln|\sqrt{x^2+2x-8}+x| + c.
\end{aligned}$$

(3) 用第二类型欧拉代换. 令  $\sqrt{1-2x-x^2} = xz-1$ , 则

$$x = \frac{2(z-1)}{z^2+1}, \quad dx = \frac{2(1+2z-z^2)}{(z^2+1)^2} dz,$$

于是

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = \int \frac{1+2z-z^2}{z(z-1)(z^2+1)} dz \\
&= \int \left[ \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2+1} \right] dz = \ln \left| \frac{z-1}{z} \right| - \arctan z + c \\
&= \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}-x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} \right| \\
&\quad - 2 \arctan(1+\sqrt{1-2x-x^2}) + c.
\end{aligned}$$

(4) 用第三类型欧拉代换. 令  $\sqrt{x^2+3x+2} = z(x+1)$ , 则

$$x = \frac{2-z^2}{z^2-1}, \quad dx = -\frac{2z}{(z^2-1)^2} dz,$$

于是

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}} dx = \int \frac{2z(2-z-z^2)}{(z^2-z-2)(z^2-1)^2} dz \\
&= \int \left[ \frac{-17}{108(z-1)} + \frac{5}{18(z+1)^2} + \frac{1}{3(z+1)^3} + \frac{3}{4(z-1)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{16}{27(z-2)} \right] dz \\
&= -\frac{17}{108} \ln|z+1| - \frac{5}{18} \frac{1}{(z+1)} - \frac{1}{6} \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{3}{4} \ln|z-1| \\
&\quad - \frac{16}{27} \ln|z-2| + c \left( z = \frac{1}{x+1} \sqrt{x^2+3x+2} \right).
\end{aligned}$$

例 15 计算下列不定积分:

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{2} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}; (2) \int \frac{dx}{x \sqrt{x^4 + 2x^2 - 1}}.$$

解 (1) 分子分母同乘以  $-\sqrt{2} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ , 得

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sqrt{2} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} \\ &= \int \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin x + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + c. \end{aligned}$$

(2) 设  $x > 0$ , 令  $\frac{1}{x} = \sqrt{t}$  (若设  $x < 0$ , 则令  $\frac{1}{x} = -\sqrt{t}$ , 结果相同), 得

$$x = -\frac{dt}{2t\sqrt{t}}, \quad \sqrt{x^4 + 2x^2 - 1} = \frac{\sqrt{1+2t-t^2}}{t},$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad & \int \frac{dx}{x \sqrt{x^4 + 2x^2 - 1}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1+2t-t^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(1-t)}{\sqrt{2-(1-t)^2}} = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1-t}{\sqrt{2}}\right) + c \\ &= \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}\right) + c \quad (|x| > \sqrt{\sqrt{2}-1}). \end{aligned}$$

二项微分式  $\int x^m(a+bx^n)^p dx$  ( $m, n, p$  为有理数) 在下列三种情形可化为有理函数的积分(契比雪夫定理):

(1)  $p \in \mathbb{Z}$ . 设  $x = z^N$ ,  $N$  为分数  $m$  和  $n$  的公分母.

(2)  $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ . 设  $a+bx^n = z^N$ ,  $N$  为分数  $p$  的分母.

(3)  $\left(\frac{m+1}{n} + p\right) \in \mathbb{Z}$ . 利用代换  $ax^{-n} + b = z^N$ ,  $N$  为分数  $p$  的分母.

例 16 计算下列不定积分:

$$(1) \int \frac{x dx}{\sqrt{x} \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}};$$

$$(2) \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}};$$

$$(3) \int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx.$$

解 (1)  $\frac{x}{\sqrt{x} \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}} = x(1 + x^{2/3})^{-1}$ ,  $m = 1$ ,  $n = \frac{2}{3}$ ,  $p = -\frac{1}{2}$ ,  $\frac{m+1}{n} = 3$ , 是二项微分式的情形(2). 可令  $1 + x^{2/3} = z^2$ , 则有  $x = (z^2 - 1)^{3/2}$ ,  $dx = 3z(z^2 - 1)^{1/2} dz$ , 得

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{x} \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}} &= 2 \int (z^2 - 1)^2 dz = \frac{3}{5} z^5 - 2z^3 + 3z + c \\ &= \frac{3}{5} \left( \sqrt{1 + \sqrt[3]{x}} \right)^5 - 2 \left( \sqrt{1 + \sqrt[3]{x}} \right)^3 + 3 \sqrt{1 + \sqrt[3]{x}} + c. \end{aligned}$$

(2)  $\frac{1}{\sqrt[4]{1 + x^4}} = x^0(1 + x^4)^{-1/4}$ ,  $m = 0$ ,  $n = 4$ ,  $p = -\frac{1}{4}$ ,  $\frac{m+1}{n} + p = 0$ , 是二项微分式的情形(3). 可令  $x^{-4} + 1 = z^4$ , 则有  $z = \frac{1}{x} \sqrt[4]{1 + x^4}$  ( $z > 0, x > 0$ ),  $x = (z^4 - 1)^{-1/4}$ ,  $dx = -z^3, (z^4 - 1)^{-5/4} dz$ , 得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}} &= - \int \frac{z^2}{z^4 - 1} dz \\ &= \int \left[ \frac{1}{4(z+1)} - \frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{2(z^2+1)} \right] dz \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{z+1}{z-1} \right| - \frac{1}{2} \arctan z + c. \end{aligned}$$

将  $z = \frac{1}{x} \sqrt[4]{1 + x^4}$  代入即得结果.

(3)  $\frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} = x^{1/2} (1 + x^{1/3})^{-2}$ ,  $m = \frac{1}{2}$ ,  $n = \frac{1}{3}$ ,  $p = -2$ ,  $p$  为整数, 是二项微分式的情形(1). 可令  $x = z^6$ , 则有  $dx =$

$6z^5dz$ ,  $\sqrt{x} = z^3$ ,  $\sqrt[3]{x} = z^2$ , 得

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x} dx}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} &= 6 \int \frac{z^3}{(z^2 + 1)^2} dz \\ &= 6 \int \left[ z^4 - 2z^2 + 3 + \frac{1}{(z^2 - 1)} - \frac{1}{z^2 + 1} \right] dz \\ &= \frac{6}{5} z^5 - 4z^3 + 18z - 24 \arctan z + \frac{3z}{z^2 + 1} + 3 \arctan z + c \\ &= \frac{6}{5} x^{5/6} - 4x^{1/2} + 18x^{1/6} - 24 \arctan(x^{1/6}) + \frac{3x^{1/6}}{1 + x^{1/3}} + c.\end{aligned}$$

计算  $\int \frac{dz}{(z^2 - 1)^2}$  时, 要用到积分

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} \quad (a \neq 0)$$

的递推公式.

$$\text{由于 } 4a(ax^2 + bx + c) = (2ax + b)^2 + 4ac - b^2,$$

$$\text{即 } b^2 - 4ac = (2ax + b)^2 - 4a(ax^2 + bx + c),$$

$$\begin{aligned}\text{故 } I_n &= \frac{1}{b^2 - 4ac} \left[ \int \frac{(2ax + b)^2 dx}{(ax^2 + bx + c)^n} - \int \frac{4a dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} \right] \\ &= \frac{1}{b^2 - 4ac} \left[ (2ax + b) \cdot \frac{-1}{(n-1)(ax^2 + bx + c)^{n-1}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2a}{n-1} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} \right] \\ &\quad - \frac{4a}{b^2 - 4ac} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} \\ &= \frac{2ax + b}{(n-1)(4ac - b^2)(ax^2 + bx + c)^{n-1}} \\ &\quad - \frac{2(2n-3)a}{(n-1)(b^2 - 4ac)} I_{n-2}.\end{aligned}$$

## 第六章 定积分及其应用

### 第一节 定积分概念与可积条件

#### 主要内容

1. 分割 在闭区间 $[a, b]$ 内任取 $n-1$ 个点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把 $[a, b]$ 分为 $n$ 个小的闭区间 $[x_{i-1}, x_i]$ , 小区间长度

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

称这些分点或这些闭子区间构成对区间 $[a, b]$ 的一个分割, 用记号 $T$ 表示.

$\|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} (\Delta x_i)$  称为分割 $T$ 的细度.

在分割 $T$ 的各个小区间上各任取一点

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

对定义在 $[a, b]$ 上的函数 $f$ 和 $[a, b]$ 上的一个分割 $T$ , 作和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

和式称为 $f$ 在 $[a, b]$ 上属于分割 $T$ 的一个积分和, 又称为黎曼和, 记作 $\sum(T)$ .

2. 定积分定义 设 $f$ 是定义在 $[a, b]$ 上的一个有界函数,  $I$ 是一个确定的常数. 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得对于 $[a, b]$ 上的任何分割 $T$ , 只要它的细度 $\|T\| < \delta$ , 就有分割 $T$ 的所有积分和 $\sum(T)$ 都满足



$$\left| \sum(T) - I \right| < \epsilon,$$

则称函数  $f$  在区间  $[a, b]$  上黎曼可积. 数  $I$  称为  $f$  在  $[a, b]$  上的定积分(黎曼积分), 记作

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

$a$  和  $b$  称为定积分的下限和上限.

3. 可积的必要条件 若函数  $f$  在  $[a, b]$  上可积, 则  $f$  在  $[a, b]$  上有界.

4. 达布和 设函数  $f$  在  $[a, b]$  上有界, 设

$$M = \sup_{x \in [a, b]} \{f(x)\}, \quad m = \inf_{x \in [a, b]} \{f(x)\}.$$

对  $[a, b]$  上的任一分割  $T, \Delta_i = [x_i, x_{i-1}], i = 1, 2, \dots, n$ , 有

$$M_i = \sup_{x \in \Delta_i} \{f(x)\}, \quad m_i = \inf_{x \in \Delta_i} \{f(x)\},$$

则称和数  $\sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$  和  $\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$  分别为函数  $f$  关于分割  $T$  的达布上和与达布下和, 统称为达布和. 即

$$S(T) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad s(T) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i.$$

5. 达布和的性质

(1) 对同一分割  $T, S(T)$  是所有积分和  $\sum(T)$  的上确界,  $s(T)$  是所有积分和  $\sum(T)$  的下确界. 即

$$s(T) = \inf_{\xi_i} \left\{ \sum(T) \right\}, \quad S(T) = \sup_{\xi_i} \left\{ \sum(T) \right\},$$

且  $m(b-a) \leq s(T) \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq S(T) \leq M(b-a).$

(2) 对分割  $T$  添加新的分点(称分点加密)后的分割  $T'$ , 上和不增, 下和不减. 即

$$\begin{aligned} s(T) &\leq s(T') \leq s(T) + p(M-m) \|T\|, \\ S(T) &\geq S'(T') \geq S(T) - p(M-m) \|T\|. \end{aligned}$$

(3) 对任意两个分割  $T'$  与  $T''$  叠加而成的分割  $T = T' + T''$  (重复的分点只取一次), 有

$$\begin{aligned}s(T) &\geq s(T'), & s(T) &\geq s(T''); \\ S(T) &\leq S(T'), & S(T) &\leq S(T'').\end{aligned}$$

(4) 对任意两个分割  $T$  与  $T'$ , 恒有

$$s(T) < S(T').$$

并记  $s = \sup_T \{s(T)\}$ ,  $S = \inf_T \{S(T)\}$ , 称  $s$  为  $f$  在  $[a, b]$  上的下积分,  $S$  为  $f$  在  $[a, b]$  上的上积分.

(5)  $m(b-a) \leq s \leq S \leq M(b-a)$ .

6. 达布定理 对任意有界函数  $f$ , 有

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} S(T) = S, \quad \lim_{\|T\| \rightarrow 0} s(T) = s.$$

7. 黎曼可积的充分必要条件

(1) 可积的第一充要条件 定义在  $[a, b]$  上的有界函数  $f$  可积的充要条件是:  $s = S$ .

(2) 可积的第二充要条件 定义在  $[a, b]$  上的有界函数  $f$  可积的充要条件是:  $\forall \varepsilon > 0, \exists$  某一分割  $T$ , 使得

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0.$$

(3) 第二充要条件的另一形式 定义在  $[a, b]$  上的有界函数  $f$  可积的充要条件是:  $\exists \varepsilon > 0, \exists$  某一分割  $T$ , 使得

$$S(T) - s(T) < \varepsilon.$$

称  $\omega_i = M_i - m_i$  为  $f$  在  $\Delta_i$  上的振幅.

8. 可积函数类

(1) 若  $f$  为闭区间  $[a, b]$  上的连续函数, 则  $f$  在  $[a, b]$  上可积.

(2) 若  $f$  是闭区间  $[a, b]$  上只有有限个间断点的有界函数, 则  $f$  在  $[a, b]$  上可积.

(3) 若  $f$  是闭区间  $[a, b]$  上的单调函数, 则  $f$  在  $[a, b]$  上可积.

## 疑难解析

### 1. 怎样理解定积分定义与它的几何意义?

答 定积分定义强调了分割的任意性和对于所有积分和  $\sum(T)$  都满足  $|\sum(T) - I| < \epsilon$ , 使积分和的极限比一般的极限要求更高, 因为不仅分割是任意的, 而且在一种确定分割下,  $\xi_i$  的取法也是任意的.

定积分只与被积函数和积分区间有关, 而与积分变量无关. 但在同一问题中, 不可随意更改积分变量符号.

极限记号下  $\|T\| \rightarrow 0$  表示分割越来越细的极限过程, 但不能用  $n \rightarrow \infty$  代替. 因为  $n \rightarrow \infty$  不能保证  $\|T\| \rightarrow 0$ .

当  $f(x) \geq 0$  时, 定积分的几何意义是以  $y = f(x)$  为曲边, 直线  $x = a, x = b$  和  $x$  轴为边的曲边梯形面积; 当  $f(x) \leq 0$ , 则定积分的几何意义是曲边梯形面积的负值. 一般情况下, 定积分的几何意义是  $x$  轴上方面积与下方面积负值的代数和.

### 2. 引入达布上和与达布下和有什么意义?

答 积分和  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$  在函数  $f$  和区间  $[a, b]$  确定的情况下仍然有很多的变化, 因为分割  $T$  是任意的,  $\xi_i$  的选取是任意的.

而达布上和  $S(T)$  与达布下和  $s(T)$  只与分割  $T$  有关, 与  $\xi_i$  的取法无关, 使得存在

$$s(T) \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq S(T),$$

因而可以利用迫敛性(夹逼准则)来讨论积分和的极限. 即若

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} S(T) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} s(T) = I,$$

则

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = I = \int_a^b f(x) dx.$$

### 3. 有界函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的上、下积分与 $f$ 在 $[a, b]$ 上的

定积分存在什么关系?

答 通常称  $s = \sup_T \{s(T)\}$  和  $S = \inf_T \{S(T)\}$  为  $f$  在  $[a, b]$  上的上积分与下积分. 即

$$s = \int_a^b f(x) dx = \sup_T \{s(T)\}, \quad S = \int_a^b f(x) dx = \inf_T \{S(T)\}.$$

如同序列的上、下极限与序列的极限间关系一样, 我们有

$$f \text{ 在 } [a, b] \text{ 上可积 } \Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

用上、下积分定义定积分有助于:

(1) 回避对积分和与积分和极限的讨论, 易直接讨论分割  $T$  的上、下确界.

(2) 在证明定积分性质和函数可积性时, 过程可以更为简捷.

(3) 上、下积分具有“外测度”与“内测度”的思想, 有利于与后续课程(如《实变函数》)的衔接.

## 方法、技巧与典型例题分析

### 一、定积分的概念

例 1 将区间  $[a, b]$   $n$  等分, 并取  $\xi_i$  为小区间的中点, 求下列函

数  $f(x)$  在给定区间上的积分和  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ :

$$(1) f(x) = 1 + x, [-1, 4]; \quad (2) f(x) = x^2, [0, 4].$$

解 (1)  $\Delta x_i = \frac{5}{n}, \xi_i = -1 + \left(i - \frac{1}{2}\right) \frac{5}{n}$ , 则

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n \left\{ 1 + \left[ -1 + \left(i - \frac{1}{2}\right) \frac{5}{n} \right] \right\} \frac{5}{n} \\ &= \frac{25}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(i - \frac{1}{2}\right) = 12 \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$(2) \Delta x_i = \frac{4}{n}, \xi_i = \frac{4(i-1)}{n} + \frac{2}{n}, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{4(i-1)}{n} + \frac{2}{n} \right)^2 \cdot \frac{4}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{4^2}{n^3} (2i-1)^2 \\ &= \frac{4^2}{n^3} \cdot \frac{n}{3} (4n^2 - 1) = \frac{16}{3} \frac{4n^2 - 1}{n^2}.\end{aligned}$$

例 2 将区间  $[a, b]$   $n$  等分, 求下列函数在指定区间上达布下和与达布上和:

(1)  $f(x) = x^3, [-2, 3]$ ; (2)  $f(x) = \sqrt{x}, [0, 1]$ ;

(3)  $f(x) = 2^x, [0, 10]$ .

解 (1) 因为  $\Delta x_i = \frac{5}{n}$ ,  $f(x)$  在  $[-2, 3]$  上严格单调增加, 所以

$$m_i = \left[ -2 + (i-1) \frac{5}{n} \right]^3, \quad M_i = \left[ -2 + i \frac{5}{n} \right]^3.$$

则

$$\begin{aligned}s &= \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left[ -2 + (i-1) \frac{5}{n} \right]^3 \cdot \frac{5}{n} \\ &= \frac{65}{4} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S &= \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left[ -2 + i \frac{5}{n} \right]^3 \cdot \frac{5}{n} \\ &= \frac{65}{4} + \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}.\end{aligned}$$

(2) 因为  $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ ,  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上严格单调增加, 所以

$$m_i = \sqrt{\frac{i-1}{n}}, \quad M_i = \sqrt{\frac{i}{n}}.$$

则

$$s = \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i-1}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i-1}{n}},$$

$$S = \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}}.$$

(3) 因为  $\Delta x_i = \frac{10}{n}$ ,  $f(x)$  在  $[0, 10]$  上严格单调增加, 所以

$$m_i = 2^{10(i-1)/n}, \quad M_i = 2^{10i/n}.$$

则 
$$s = \sum_{i=1}^n 2^{10(i-1)/n} \cdot \frac{1}{n} = 10230/[n(2^{10/n} - 1)],$$

$$S = \sum_{i=1}^n 2^{10i/n} \cdot \frac{10}{n} = 10230 \cdot 2^{10/n}/[n(2^{10/n} - 1)].$$

例 3 用定积分定义计算下列积分:

(1)  $\int_0^1 a^x dx;$  (2)  $\int_0^{\pi/2} \sin x dx;$

(3)  $\int_0^x \cos t dt;$  (4)  $\int_a^b \frac{dx}{x^2} \quad (0 < a < b).$

解 设将区间  $n$  等分, 并取  $\xi_i$  为  $\Delta_i$  右端点.

$$\begin{aligned} (1) \int_0^1 a^x dx &= \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n-1} a^{\xi_i} \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} a^{i/n} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{a - 1}{a^{1/n} - 1} = (a - 1) / \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a^{1/n} - 1}{1/n} \right) = \frac{a - 1}{\ln a}. \end{aligned}$$

$$(2) \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{2n}, \text{ 而}$$

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \left( \sin \frac{nx}{2} \cdot \sin \frac{n+1}{2}x \right) / \sin \frac{x}{2},$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \int_0^{\pi/2} \sin x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \cdot \left( \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{n+1}{4n}\pi \right) / \sin \frac{\pi}{4n} \\ &= \sin \frac{\pi}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{(n+1)\pi}{4n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} / \sin \frac{\pi}{4n} \\ &= \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot 2 = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int_0^x \cos t dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \cos \frac{ix}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \left( \sin \frac{x}{2} \cos \frac{(n-1)x}{2n} \right) / \sin \frac{x}{2n} \\ &= \sin \frac{x}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{n-1}{2n}x \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} / \sin \frac{x}{2n} \\ &= \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cdot 2 = \sin x. \end{aligned}$$

(4)  $\int_a^b \frac{dx}{x}$  的解法稍有不同. 对  $[a, b]$   $n$  等分,  $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ , 令

$$\xi_i = \sqrt{x_i \cdot x_{i+1}} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x_i x_{i+1}} (x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}} \right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}, \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad \int_a^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

**例 4** 证明: 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上无界, 则函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上不可积.

**证** 用反证法. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 则  $\exists I \in \mathbf{R}$ , 对  $\epsilon = 1 > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 且  $\forall T$ , 只要  $\|T\| < \delta$ , 就有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < 1 \quad \text{或} \quad \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| < |I| + 1.$$

由于  $f(x)$  在  $[a, b]$  上无界, 则对某一分割  $T_0$ ,  $f(x)$  必在某  $[x_{i-1}, x_i]$  上无界, 即  $|f(\xi_i)| > M$ . 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ f(\xi_1) \Delta x_1 + \sum_{i=2}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right] = \infty$$

(为简单计, 不妨设  $|f(\xi_1)| > M$ ),

而  $f(x)$  可积时, 积分和的极限为常数. 推出矛盾.

故, 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上无界,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上一定不可积.

**例 5** 设  $f(x), F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且当  $a < x < b$  时,  $F'(x) = f(x)$ . 用定义证明:  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 且

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**证** 由题意, 要证  $\forall \epsilon > 0$ , 成立

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - (F(b) - F(a)) \right| < \epsilon.$$

$\forall$  分割  $T$ ,  $F(b) - F(a)$  可写为

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] \quad (\text{拉格朗日中值定理})$$

$$= \sum_{i=1}^n F'(\eta_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum f(\eta_i)\Delta x_i,$$

则

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - (F(b) - F(a)) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - f(\eta_i)]\Delta x_i \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |f(\xi_i) - f(\eta_i)|\Delta x_i \quad (\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]). \end{aligned}$$

$f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 必一致连续. 故  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $\xi_i, \eta_i \in [a, b]$ , 且  $|\xi_i - \eta_i| < \delta$  时, 有  $|f(\xi_i) - f(\eta_i)| < \frac{\epsilon}{b-a}$ , 故只要  $\|T\| < \delta$ , 就有

$$\sum_{i=1}^n |f(\xi_i) - f(\eta_i)|\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{b-a}\Delta x_i = \epsilon.$$

所以, 命题成立.

## 二、函数的可积性

这部分问题理论性较强, 叙述也要求十分严密, 但讨论的方式是可以多样的. 应注意选择适当的方法, 使问题简洁明了. 一般证明函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的可积性时, 常用:  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使

$\forall T$ , 只要  $\|T\| < \delta$ , 就有  $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \epsilon$ . 这里,  $\omega_i = M_i - m_i$  (也可

以用别的形式). 而证明  $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i$  常从两个方面着手:

- (1) 证明在任一  $\Delta_i$  上,  $\omega_i$  一致地小于  $\epsilon$ ;
- (2) 证明所有小区间长  $\Delta x_i$  一致地小于  $\epsilon$ .

也可将  $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i$  分成两部分, 以上两种情形各占一部分 (如例 10).

**例 6** 设  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 试说明任意改变  $f$  在有限个点上的值不影响它的可积性和积分  $\int_a^b f(x)dx$  的值.

**解** 设  $f$  改变有限个点上的值后的函数为  $f^*$ , 则  $f^*$  在  $[a, b]$



上有有限个第一类可去间断点,所以  $f^*$  在  $[a, b]$  上可积. 又在一点处函数的积分为零,由于间断点个数有限,从而积分  $\int_a^b f(x)dx$  的值不变.

例 7 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调,但有无限多个不连续点,  $f$  是否可积?

解 可能可积. 例如

$$f(x) = \begin{cases} 1/2^{n-1}, & x \in (1/2^n, 1/2^{n-1}), \quad n \in \mathbf{N}, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在  $[0, 1]$  上严格递增且有界,是可积的. 但在  $[0, 1]$  上有无限个不连续点:  $\{1/2^n\}, n = 1, 2, \dots$ .

$$\text{又如 } f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sin(\pi/x)), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ 也在 } [0, 1] \text{ 上可积,}$$

但有无穷多个不连续点:  $\left\{\frac{1}{n}\right\}, n = 1, 2, \dots$ .

例 8 若函数  $f(y)$  与  $y = \varphi(x)$  都可积,它们的复合函数  $f[\varphi(x)]$  是否可积?

解 不一定可积. 例如函数

$$f(y) = \begin{cases} 0, & y = 0, \\ 1, & y \neq 0 \end{cases}$$

在  $[0, 1]$  上可积. 黎曼函数

$$y = \varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 是无理数}, \\ 1, & x = 0, \\ 1/n, & x = \frac{m}{n}, \end{cases} \quad m \text{ 与 } n \text{ 是互质整数}$$

在  $[0, 1]$  上也可积. 但它们的复合函数

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} 0, & x \text{ 是无理数}, \\ 1, & x \text{ 是有理数} \end{cases}$$

在  $[0, 1]$  上都不可积.

例 9 讨论在区间  $[0, 1]$  上的狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

的可积性.

**解** 由无理数与有理数在实数域上的稠密性知,不论用何种分割  $T$ ,在  $\Delta_i$  中总是既有有理数又有无理数.因此,当所有  $\xi_i$  均为无理数时,有

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n D(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} 0 \cdot \sum_{i=1}^n D(\xi_i) \Delta x_i = 0,$$

而当所有  $\xi_i$  均为有理数时,有

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n D(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} 1 \sum_{i=1}^n D(\xi_i) \Delta x_i = 1,$$

由于两个极限分别存在但不相等,故狄利克雷函数不可积.

**例 10** 证明:黎曼函数

$$R(x) = \begin{cases} 1/q, & x = p/q \text{ 为既约分数,} \\ 0, & x \text{ 为 } 0, 1 \text{ 及无理数} \end{cases}$$

在  $[0, 1]$  上可积.

**证** 用第二充要条件证.  $\forall \varepsilon > 0$ , 取充分大的  $q$ , 使  $\frac{1}{q} < \frac{\varepsilon}{2}$ . 则在  $[0, 1]$  内使  $R(x) = \frac{1}{q} \geq \frac{\varepsilon}{2}$  的点只有有限个, 设为  $0 \leq r_1 < r_2 < \cdots < r_k \leq 1$ .

对  $[0, 1]$  作分割  $T$ , 使细度  $\|T\| < \frac{\varepsilon}{2k}$ . 将  $T$  的小区间分为两类, 其中  $\{\Delta_{i'}\}$  为含有  $\{r_i\}$  中点的小区间,  $\{\Delta_{i''}\}$  为不含  $\{r_i\}$  中点的小区间, 则在  $\Delta_{i'}$  (至多  $m \leq 2k$  个) 上  $f(x)$  的振幅  $\omega_{i'}$  满足

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq \omega_{i'} \leq \frac{1}{2},$$

而  $\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} \leq \frac{1}{2} \sum_{i'} \Delta x_{i'} < \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2k} = \frac{\varepsilon}{2}$ . 在  $\Delta_{i''}$  上  $f(x)$  的振幅  $\omega_{i''} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , 而  $\sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i''} \Delta x_{i''} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . 所以

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i = \sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} + \sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} < \varepsilon.$$

故  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上黎曼可积, 且  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ .

**例 11** 证明: 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上黎曼可积, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有无穷多个连续点.

**证** 由  $f(x)$  在  $[a, b]$  上黎曼可积, 则  $\forall [\alpha, \beta] \subset [a, b], f(x)$  在  $[\alpha, \beta]$  上也黎曼可积. 于是  $\forall \varepsilon > 0, \exists [a_1, b_1] \subset [a, b], b_1 - a_1 < \frac{b-a}{2}$ , 使  $f(x)$  在  $[a_1, b_1]$  上的振幅  $\omega_1 < \varepsilon$  (否则, 可推出  $f(x)$  在  $[a, b]$  上不可积). 而  $\forall \frac{\varepsilon}{2}, \exists [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1], b_2 - a_2 < \frac{b-a}{2^2}$ , 使  $f(x)$  在  $[a_2, b_2]$  上的振幅  $\omega_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ . 如此等等, 可得一闭区间列  $\{[a_n, b_n]\}$ , 构成一个闭区间套. 于是, 由闭区间套定理知, 有  $\xi_i \in [a_i, b_i]$  ( $i = 1, 2, \dots$ ),  $\xi_i$  是  $[a_i, b_i]$  内点, 所以  $f(x)$  在  $\xi_i$  连续, 从而  $f(x)$  有无穷多个连续点. 即在  $(a, b)$  内任何子区间上, 都有  $f(x)$  的连续点.

**例 12** 证明: 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上黎曼可积, 且  $\int_a^b f(x) dx > 0$ , 则  $\exists$  区间  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ , 在  $[\alpha, \beta]$  上  $f(x) > 0$ .

**证** 用反证法. 若对任何  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ , 都有  $\xi \in [\alpha, \beta]$ , 使  $f(\xi) \leq 0$ , 则对  $[a, b]$  的任一分割  $T$ , 在每个  $\Delta_i$  上都可找到  $\xi_i$ , 使  $f(\xi_i) \leq 0$ , 从而

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i \Delta x_i \leq 0.$$

这与  $\int_a^b f(x) dx > 0$  矛盾.

**例 13** 证明: 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上黎曼可积, 则  $\int_a^b f^2(x) dx = 0 \iff$  对  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的一切连续点, 有  $f(x) = 0$ .

**证 必要性** 用反证法. 设  $f(x)$  在某点  $x_0$  连续, 且  $f(x_0) \neq 0$ , 则存在  $\delta > 0$ , 有  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a, b]$  (若  $x_0$  为端点, 可考虑

左或右邻域), 使当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x)| > \frac{1}{2}|f(x_0)|$ . 于是

$$\int_a^b f^2(x) dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x) dx > \delta f^2(x_0) > 0.$$

从而与题设矛盾.

**充分性** 因为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 则由例 11 知, 在  $(a, b)$  内任一闭子区间上, 都有  $f(x)$  的连续点. 对  $[a, b]$  上的任一分割

$T$ , 均可选到  $\xi_i \in \Delta_i$ , 使  $f(\xi_i) = 0$ . 于是  $\sum_{i=1}^n f^2(\xi_i) \Delta x_i = 0$ , 即

$$\int_a^b f^2(x) dx = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f^2(\xi_i) \Delta x_i = 0.$$

同样可得, 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上黎曼可积, 且  $f(x) \geq 0$ , 则

$$\int_a^b f^2(x) dx = 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0, \quad x \in [a, b] \quad (x \text{ 为连续点}).$$

**例 14** 证明: 有界函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积的充要条件 (可积的第三充要条件) 是:  $\forall \epsilon > 0$  与  $\eta > 0, \exists \delta > 0, \forall T$ , 当  $\|T\| < \delta$  时, 振幅  $\omega_{i'} \geq \eta$  的小区间的总长  $\sum_i \Delta x_{i'} < \epsilon$ .

**证 必要性** 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 则  $\forall \epsilon > 0$  和  $\eta > 0$ ,  $\exists \delta > 0, \forall T$ , 当  $\|T\| < \delta$  时,  $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \epsilon \eta$ . 设  $\omega_{i'} \geq \eta$ , 则有

$$\eta \sum_{i'} \Delta x_{i'} \leq \sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} \leq \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \epsilon \eta.$$

所以  $\sum_{i'} \Delta x_{i'} < \epsilon$ .

**充分性** 以  $\omega$  记  $f$  在  $[a, b]$  上的振幅.

当  $\omega_i \geq \eta$  时, 表示  $\omega_i = \omega_{i'}$  对应小区间的长度是  $\Delta x_{i'}$ ,

当  $\omega_i < \eta$  时, 表示  $\omega_i = \omega_{i''}$ , 对应小区间的长是  $\Delta x_{i''}$ ,

则  $\forall \epsilon > 0$  与  $\eta > 0$  (令  $\eta \leq \epsilon$ ),  $\exists \delta > 0, \forall T$ , 当  $\|T\| < \delta$  时, 有  $\omega_{i'} \geq \eta, \sum_{i'} \Delta x_{i'} < \epsilon$ . 有

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i &= \sum_i \omega_i' \Delta x_i' + \sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} \\
&< \omega \sum_{i'} \omega_i' \Delta x_i' + \eta \sum_i \omega_{i''} \Delta x_{i''} \\
&< \omega \epsilon + \eta(b-a) \leq (\omega + b-a)\epsilon.
\end{aligned}$$

所以,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积.

**例 15** 设  $f(x)$  在  $[A, B]$  上连续,  $\varphi(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 且当  $x \in [a, b]$  时,  $A \leq \varphi(x) \leq B$ , 证明: 复合函数  $f[\varphi(x)]$  可积.

**证** 因为  $f(x)$  在  $[A, B]$  上连续, 则由康托尔定理知  $f(x)$  在  $[a, b]$  内一致连续. 即  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 对  $[A, B]$  内任意两点  $x'$  和  $x''$ , 只要  $|x' - x''| < \delta$ , 必有  $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ .

又  $\varphi(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 则对任一分割  $T$ , 只要  $\|T\| < \eta$ , 就有  $\sum_i \omega_i(\varphi) \Delta x_i < \delta \epsilon$ .

把  $\sum_i \omega_i(\varphi) \Delta x_i$  分为两部分. 一部分为  $\omega_i(\varphi) \geq \delta$  的各项组成的, 记作  $\sum_i' \omega_i(\varphi) \Delta x_i$ ; 另一部分为  $\omega_i(\varphi) < \delta$  的各项组成的, 记作  $\sum_i'' \omega_i(\varphi) \Delta x_i$ . 显然,  $\delta \sum_i' \Delta x_i \leq \sum_i' \omega_i(\varphi) \Delta x_i \leq \sum_i \omega_i(\varphi) \Delta x_i < \delta \epsilon$ , 故  $\sum_i' \Delta x_i < \epsilon$ .

由于  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 所以  $f(x)$  有界, 即  $|f(x)| \leq M$ . 故当  $\omega_i(\varphi) \geq \delta$  时,  $\omega_i(f(\varphi)) \leq 2M$ ; 当  $\omega_i(\varphi) < \delta$  时,  $\omega_i(f(\varphi)) \leq \epsilon$ . 于是

$$\begin{aligned}
\sum \omega_i(f(\varphi)) \Delta x_i &= \sum_i' \omega_i(f(\varphi)) \Delta x_i + \sum_i'' \omega_i(f(\varphi)) \Delta x_i \\
&= 2M \sum_i' \Delta x_i + \epsilon \sum_i'' \Delta x_i \\
&< 2M\epsilon + \epsilon(b-a) = (2M + b-a)\epsilon,
\end{aligned}$$

即  $f[\varphi(x)]$  在  $[a, b]$  上可积.

**例 16** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $\int_a^b f(x) x^n dx = 0$  ( $n = 0$ ,

$1, \dots, n-1$ ), 证明:  $f(x) \equiv 0$  或在  $(a, b)$  内至少  $n$  次改变符号.

证 若  $f(x) \equiv 0$ , 则  $\int_a^b f(x)x^n dx = 0$  是显然的. 若  $f(x) \not\equiv 0$ , 用反证法证明:  $f(x)$  在  $(a, b)$  内至少  $n$  次变号.

因为, 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  内至多  $n-1$  次变号, 则必存在  $k$  个分点  $\{x_k\}$  ( $1 \leq k \leq n-1$ ), 使  $f(x)$  在每个区间  $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{k-1}, x_k), (x_k, b)$  内不恒为零且不变号, 但在相邻两区间上不同号, 从而

$$f(x)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)$$

在  $(a, b)$  内符号一致. 从而, 由题设知

$$\int_a^b f(x)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)dx = 0.$$

根据保号性定理,  $f(x)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k) \equiv 0$ , 即  $f(x) \equiv 0$ , 与  $f(x) \not\equiv 0$  矛盾.

例 17 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 且  $f(x) > 0$ , 证明:

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

证 用反证法. 因为  $f(x) > 0$ , 若  $\int_a^b f(x)dx > 0$  不成立, 则必有  $\int_a^b f(x)dx = 0$ , 现在来推出矛盾.

取  $\varepsilon_i = \frac{1}{i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). 再取一分割  $T$ , 使对任何  $\xi_i \in \Delta_i$ , 都有  $0 < \sum f(\xi_i)\Delta x_i < \varepsilon_1(b-a)$ , 则有不等式  $0 < S(T) \leq \varepsilon_1(b-a)$  成立. 从而知, 至少有一个  $M_i = \sup_{x \in \Delta_i} |f(x)| \leq \varepsilon_1$  (不妨设为  $M_{i_0}$ ) (否则一切  $M_i > \varepsilon_1$ , 则  $\sum M_i \Delta x_i > \varepsilon_1(b-a)$ , 推出矛盾). 于是在  $\Delta_{i_0}$  上, 有  $f(x) \leq \varepsilon_1$ .

再在  $\Delta_{i_0}$  上取区间  $[a_1, b_1]$  (使  $b_1 - a_1 < \varepsilon_1$ ), 则在  $[a_1, b_1]$  上, 恒有  $0 < f(x) \leq \varepsilon_1$ . 由

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a_1} + \int_{a_1}^{b_1} + \int_{b_1}^b = 0,$$

而  $\int_a^{a_1}, \int_{a_1}^{b_1}, \int_{b_1}^b$  均不小于零, 知  $\int_{a_1}^{b_1} f(x) dx \geq 0$ .

再对  $[a_1, b_1]$  重复以上论证, 可以得到区间  $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a, b], (b_2 - a_2 < \epsilon_2)$ , 且在  $[a_2, b_2]$  上, 恒有  $0 < f(x) \leq \epsilon_2$ .

不断重复以上论证, 就可得到一个闭区间套  $\{[a_n, b_n]\}$ , 满足

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n], b_n - a_n < \epsilon_n = \frac{1}{n},$$

$$0 < f(x) \leq \epsilon_n \quad (x \in [a_n, b_n]).$$

由闭区间套定理, 必存在惟一的  $\xi \in [a_n, b_n] (n = 1, 2, \cdots)$  (即  $\xi \in [a, b]$ ), 使得  $f(\xi) \leq \epsilon_n = \frac{1}{n} (n = 1, 2, \cdots)$ . 故  $f(\xi) \leq 0$ , 与原假设  $f(x) > 0$  矛盾.

所以, 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 且  $f(x) > 0$ , 必有

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

此命题的逆命题不成立, 但例 12 所述命题成立.

**例 18** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 证明:  $e^{f(x)}$  在  $[a, b]$  上可积.

**证** 对  $[a, b]$  作分割  $T$ , 在  $\Delta_i$  内取两点  $x'$  和  $x''$ . 由微分中值定理, 有

$$|e^{f(x')} - e^{f(x'')}| = e^{\xi} |f(x') - f(x'')|,$$

$\xi$  在  $x', x''$  之间. 因为可积函数必有界, 故设  $|f(x)| < M$ , 则

$$|e^{f(x')} - e^{f(x'')}| = e^M |f(x') - f(x'')|.$$

以  $\omega_i$  与  $\omega'_i$  分别记  $f(x)$  和  $e^{f(x)}$  为在  $\Delta_i$  上的振幅, 则对  $\Delta_i$  内任意  $x'$  和  $x''$ , 对上述不等式取上确界, 得

$$\omega'_i \leq e^M \omega_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1).$$

由此可知

$$\sum_{i=1}^{n-1} \omega'_i \Delta x_i \leq e^M \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i.$$

由可积的第二充要条件知,  $\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0$ . 因此

$$0 \leq \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n-1} \omega'_i \Delta x_i \leq e^M \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0,$$

即  $\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n-1} \omega'_i \Delta x_i = 0$ ,  $e^{f(x)}$  在  $[a, b]$  上可积.

## 第二节 定积分的性质

### 主要内容

定积分有如下性质:

1. 若  $f$  在  $[a, b]$  上可积, 则  $kf$  在  $[a, b]$  上可积, 且

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

2. 若  $f, g$  在  $[a, b]$  上可积, 则  $f \pm g$  在  $[a, b]$  上也可积, 且

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

3. 若  $f, g$  在  $[a, b]$  上可积, 则  $fg$  在  $[a, b]$  上也可积. 一般地,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx.$$

4. 有界函数  $f$  在  $[a, c], [c, b]$  上都可积的充要条件是:  $f$  在  $[a, b]$  上可积, 并有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

此性质称为定积分的区间可加性, 且有

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

5. 设  $f$  与  $g$  均在  $[a, b]$  上可积, 且对  $x \in [a, b]$ , 有  $f(x) \leq g(x)$ , 则



$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \quad (\text{保序性})$$

6. 若  $f$  在  $[a, b]$  上可积, 则  $|f|$  在  $[a, b]$  上也可积, 且

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx. \quad (\text{绝对可积性})$$

7. (积分第一中值定理) 若  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 则在  $[a, b]$  上至少存在一点  $\xi$ , 使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

8. (推广的积分第一中值定理) 若  $f$  与  $g$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 且  $g(x)$  在  $[a, b]$  上不变号, 则在  $[a, b]$  上至少存在一点  $\xi$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

9. (积分第二中值定理) 若在区间  $[a, b]$  上  $f$  为非负的单调减少函数, 而  $g$  是可积函数, 则至少存在一点  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^{\xi} g(x)dx.$$

推论 1 若在  $[a, b]$  上  $f$  为非负的单调增加函数,  $g$  为可积函数, 则至少存在一点  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b) \int_{\xi}^b g(x)dx.$$

推论 2 若在  $[a, b]$  上  $f$  为单调函数,  $g$  为可积函数, 则至少存在一点  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^{\xi} g(x)dx + f(b) \int_{\xi}^b g(x)dx.$$

定理与两个推论统称为积分第二中值定理.

## 疑 难 解 析

### 1. 为什么要规定

$$\int_b^a f(x)dx = 0 \quad \text{和} \quad \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx?$$

答 定积分定义强调了函数  $f(x)$  定义在区间  $[a, b]$  上, 而  $a$  只是一点, 为了运算方便与一致性, 规定  $\int_a^a f(x)dx = 0$ . 又定义中要求  $b > a$ , 所以  $\int_b^a$  无实际意义, 也是运算上的要求和统一, 令  $\Delta x_i$  为负值, 规定  $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ . 这样对积分上限和积分下限的大小不再有要求, 从而给计算和论证带来极大的便利.

## 2. 积分中值的意义是什么?

答 积分中值也叫积分均值, 是有限个数的算术平均值概念对连续函数的推广.

若函数  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 当对分割  $T$  进行  $n$  等分时,  $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ , 取  $\xi_i$  为  $\Delta_i$  的右端点  $x_i$ , 则对应的  $n$  个函数值  $f(\xi_i)$  的算术平均值.

$$\begin{aligned}\bar{y}_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.\end{aligned}$$

当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\bar{y}_n$  的极限值定义为  $f$  在  $[a, b]$  上的平均值  $\bar{y}$ , 即

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{y}_n = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

通常称  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx (= f(\xi))$  为函数  $f$  在  $[a, b]$  上的积分中值, 连续函数  $y = f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的平均值就等于该函数在  $[a, b]$  上的积分中值.

## 3. 试说明积分第二中值定理的几何意义.

答 当  $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$  时, 第二中值定理等式左边  $\int_a^b f(x)g(x)dx$  表示一个空间曲顶柱体的体积(见图 6.1). 该曲顶

柱体的底是  $xoy$  平面的曲边梯形:  $0 \leq y \leq g(x), a \leq x \leq b$ . 曲顶是空间柱面  $z = f(x)$ , 被积函数  $A(x) = g(x)f(x)$  恰为正交于  $x$  轴的长方形截面的面积. 而等式右边也可以认为是一个柱体的体积, 其底面是  $xoy$  平面上的曲边梯形:  $0 \leq y \leq g(x), a \leq x \leq \xi$ , 其高为  $f(a)$ . 这时等式表示存在某一  $\xi \in [a, b]$ , 使得上述两个柱体的体积相等.

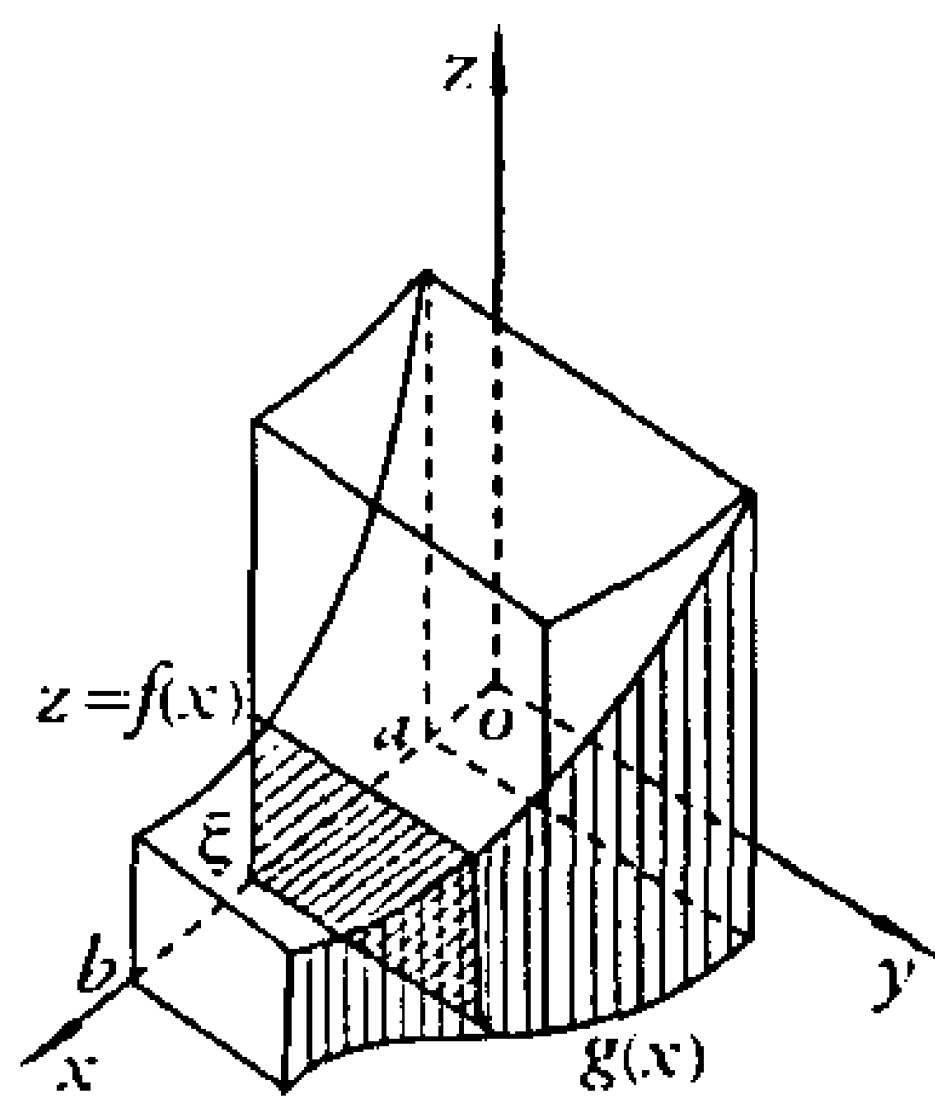


图 6.1

## 方法、技巧与典型例题分析

### 一、利用定积分求极限

利用定积分求极限, 一般要将极限式化为积分和式  $\sum f(\xi_i) \Delta x_i$ , 从中确定被积函数  $f(x)$ , 而由  $\sum \Delta x_i$  确定积分区间, 从而得到定积分  $\int_a^b f(x) dx$ . 计算定积分即得极限值.

例 1 利用定积分求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right);$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} \quad (p > 0);$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sqrt{1+1/n} + \sqrt{1+2/n} + \cdots + \sqrt{1+n/n} \right);$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \tan \frac{\pi}{4n} + \tan \frac{2\pi}{4n} + \cdots + \tan \frac{n-1}{4n} \pi \right);$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin a + \sin(a+b/n) + \cdots + \sin[a+(n-1)/n \cdot b]}{n};$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}}{n^{3/2}};$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} [\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2-2^2} + \cdots + \sqrt{n^2-(n-1)^2}].$$

解 (1) 原式 =  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+i/n} \cdot \frac{1}{n},$

知  $f(\xi_i) = \frac{1}{1+i/n}, \Delta x_i = \frac{1}{n},$

所以 原式 =  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x| \Big|_0^1 = \ln 2.$

(2) 原式 =  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+(i/n)^2}} \cdot \frac{1}{n},$

知  $f(\xi_i) = \frac{1}{\sqrt{1+(i/n)^2}}, \Delta x_i = \frac{1}{n},$

所以原式 =  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2}).$

(3) 原式 =  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \left( \frac{1}{n} \right)^p + \left( \frac{2}{n} \right)^p + \cdots + \left( \frac{n}{n} \right)^p \right]$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left( \frac{i}{n} \right)^p \cdot \frac{1}{n},$

知  $f(\xi_i) = \left( \frac{i}{n} \right)^p, \Delta x_i = \frac{1}{n},$

所以 原式 =  $\int_0^1 (x)^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}.$

(4) 原式 =  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1+i/n} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \sqrt{1+x} dx$   
 $= \frac{2}{3} (1+x)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1).$

(5) 原式 =  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \tan \frac{i\pi}{4n} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{n-1} \tan \frac{i\pi}{4n} \cdot \frac{\pi}{4n}$   
 $= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \tan x dx = -\frac{4}{\pi} \ln |\cos x| \Big|_0^{\pi/4}$   
 $= \frac{4}{\pi} \ln \sqrt{2} = \frac{2}{\pi} \ln 2.$

(6) 原式 =  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sin \left( a + \frac{ib}{n} \right) \cdot \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \sin(a + bx) dx = -\frac{1}{b} \cos(a + bx) \Big|_0^1 \\
&= -\frac{1}{b} [\cos(a + b) - \cos a].
\end{aligned}$$

$$(7) \text{ 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{i/n} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned}
(8) \text{ 原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \sqrt{1 - (i/n)^2} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx \\
&= \left[ \frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x \right] \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

例 2 利用定积分求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) f\left(\frac{2}{n}\right) \cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}, \text{ 其中 } f(x) \text{ 在 } [0, 1] \text{ 上连续, 且 } f(x) > 0;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right) \right]^{1/n};$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sin(\pi/n)}{n+1} + \frac{\sin(2\pi/n)}{n+1/2} + \cdots + \frac{\sin \pi}{n+1/n} \right].$$

解 由于题(1)、题(2)、题(3)的通项是积的形式, 要先取对数, 化积为和, 再利用定积分求出极限.

$$\begin{aligned}
(1) \text{ 令 } a_n &= \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}, \text{ 则} \\
\ln a_n &= \ln \frac{1}{n} + \frac{1}{n} [\ln(n+1) + \ln(n+2) + \cdots + \ln(n+n)] \\
&= \frac{1}{n} [\ln(n+1) + \cdots + \ln(n+n) - n \ln n] \\
&= \frac{1}{n} \{ [\ln(n+1) - \ln n] + [\ln(n+2) - \ln n] \\
&\quad + \cdots + [\ln(n+n) - \ln n] \} \\
&= \sum_{i=1}^n [\ln(n+i) - \ln n] \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \ln \frac{n+i}{n} \cdot \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{故} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n &= \int_0^1 \ln(1+x) dx \\
 &= [x \ln(1+x) - x + \ln(1+x)] \Big|_0^1 \\
 &= 2\ln 2 - 1 = \ln \frac{4}{e},
 \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{\ln \frac{4}{e}} = \frac{4}{e}.$$

(2) 令  $a_n = \sqrt[n]{f(1/n)f(2/n)\cdots f(n/n)}$ , 则

$$\begin{aligned}
 \ln a_n &= \frac{1}{n} \left[ \ln f\left(\frac{1}{n}\right) + \ln f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln f\left(\frac{n}{n}\right) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \ln f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n},
 \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \int_0^1 \ln f(x) dx,$$

$$\text{所以} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{\int_0^1 \ln f(x) dx}.$$

(3) 令  $a_n = \left[ \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right) + \cdots \left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right) \right]^{1/n}$ , 则

$$\begin{aligned}
 \ln a_n &= \frac{1}{n} \left[ \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \ln \left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right) + \cdots + \ln \left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{i^2}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{n},
 \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \int_0^1 \ln(1+x^2) dx = \frac{\pi}{4} + \ln 2 - 2,$$

$$\text{所以} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{\int_0^1 \ln(1+x^2) dx} = e^{\ln 2 + \pi/4 - 2} = 2e^{\pi/4 - 2}.$$

(4) 令  $a_n = \frac{\sin(\pi/n)}{n+1} + \frac{\sin(2\pi/n)}{n+1/2} + \cdots + \frac{\sin \pi}{n+1/n}$ ,

$$\begin{aligned}
 \text{则有} \quad \frac{1}{n+1} \left( \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \pi \right) &< a_n \\
 &< \frac{1}{n} \left( \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \pi \right).
 \end{aligned}$$

$$\text{而} \quad \frac{1}{n} \left( \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \pi \right) = \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} \cdot \frac{1}{n},$$

$$\frac{1}{n+1} \left( \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \pi \right) = \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \left( \frac{n}{n+1} \right),$$

$$\begin{aligned} \text{有 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} \cdot \frac{1}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} \cdot \frac{1}{n} \left( \frac{n}{n+1} \right) \\ &= \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi}, \end{aligned}$$

所以,由夹逼准则得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sin(\pi/n)}{n+1} + \frac{\sin(2\pi/n)}{n+1/2} + \cdots + \frac{\sin \pi}{n+1/n} \right] = \frac{2}{\pi}.$$

例3 用定积分求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2^{i/n} \frac{1}{n+1/i}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2 + \cos(k\pi/n)};$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sqrt{(nx+k)(nx+k+1)} \quad (x > 0).$$

解 (1) 因为

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n 2^{i/n} < \sum_{i=1}^n 2^{i/n} \frac{1}{n+1/i} < \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2^{i/n},$$

$$\text{即 } \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2^{i/n} < \sum_{i=1}^n 2^{i/n} \frac{1}{n+1/i} < \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2^{i/n},$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2^{i/n} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2^{i/n} = \int_0^1 2^x dx = \left[ 2^x \frac{1}{\ln 2} \right]_0^1 = \frac{1}{\ln 2}, \end{aligned}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2^{i/n} \frac{1}{n+1/i} = \frac{1}{\ln 2}.$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 因为 } \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} &= e^{\ln(\sqrt[n]{n!}/n)} = e^{[\ln(n!/n^n)]/n} \\ &= e^{[\ln(1/n) + \ln(2/n) + \cdots + \ln(n/n)]/n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} [\ln(1/n) + \ln(2/n) + \cdots + \ln(n/n)]/n} \\ &= e^{\int_0^1 \ln x dx} = e^{\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \ln x dx} = e^{\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [x \ln x - x]_{\epsilon}^1} = e^{-1}.\end{aligned}$$

以下两题要用弃掉高阶无穷小的方法来做.

(3) 因为  $\sin \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n}(1 + \alpha_n)$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ ), 所以

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2 + \cos(k\pi/n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n) \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2 + \cos(k\pi/n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2 + \cos(k\pi/n)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n) \\ &= \pi \int_0^1 \frac{dx}{2 + \cos \pi x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left[ \left( \tan \frac{\pi x}{2} \right) / \sqrt{3} \right] \Big|_0^1 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

(4) 因为  $\sqrt{\left(x + \frac{k}{n}\right)\left(x + \frac{k+1}{n}\right)} \sim x + \frac{1}{n}\left(k + \frac{1}{2}\right)$ , 所以

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sqrt{(nx + k)(nx + k + 1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ x + \frac{1}{n} \left( k + \frac{1}{2} \right) \right] \\ &= \int_0^1 (x + t) dt = x + \frac{1}{2} \quad (x > 0).\end{aligned}$$

例 4 利用定积分定义求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[1^\alpha + 3^\alpha + \cdots + (2n+1)^\alpha]^{\beta+1}}{[2^\beta + 4^\beta + \cdots + (2n)^\beta]^{\alpha+1}} \quad (\alpha, \beta \neq -1);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{1/n} - 1) \sum_{i=0}^{n-1} b^{i/n} \sin b^{(2i+1)/2n} \quad (a > 1).$$

解 (1) 将分子、分母化为两个定积分来处理.

$$\begin{aligned}&\frac{[1^\alpha + 3^\alpha + \cdots + (2n+1)^\alpha]^{\beta+1}}{[2^\beta + 4^\beta + \cdots + (2n)^\beta]^{\alpha+1}} \\ &= 2^{\alpha-\beta} \frac{\left\{ \frac{2}{n} \left[ \left( \frac{1}{n} \right)^\alpha + \left( \frac{3}{n} \right)^\alpha + \cdots + \left( \frac{2n+1}{n} \right)^\alpha \right] \right\}^{\beta+1}}{\left\{ \frac{2}{n} \left[ \left( \frac{2}{n} \right)^\beta + \left( \frac{4}{n} \right)^\beta + \cdots + \left( \frac{2n}{n} \right)^\beta \right] \right\}^{\alpha+1}}\end{aligned}$$



$$= 2^{\alpha-\beta} \frac{\left\{ \sum_{i=1}^n [(2i-1)/n]^2 \cdot 2/n + [(2n+1)/n]^2 \cdot 2/n \right\}^{\beta+1}}{\left[ \sum_{i=1}^n (2i/n)^2 \cdot 2/n \right]^{\alpha+1}},$$

所以 原式 =  $2^{\alpha-\beta} \frac{\left( \int_0^2 t^2 dt \right)^{\beta+1}}{\left( \int_1^2 t^2 dt \right)^{\alpha+1}} = 2^{\alpha-\beta} \frac{(\beta+1)^{\beta+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}.$

(2) 因为原式 =  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left( \sin b^{\frac{2i+1}{2n}} \right) \left( b^{\frac{i+1}{n}} - b^{\frac{i}{n}} \right)$  可看作函数  $\sin x$  在  $[1, b]$  上按分割  $1 = b^{0/n} < b^{1/n} < \dots < b^{n/n} = b$  所作的积分和, 小区间长  $\Delta x_i = b^{\frac{i+1}{n}} - b^{\frac{i}{n}}, 0 \leq \lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \leq b(b^{1/n} - 1) \rightarrow 0$ .  $\xi_i = b^{\frac{2i+1}{2n}}$  是小区间  $[b^{i/n}, b^{(i+1)/n}]$  两端点的比例中项. 所以

$$\text{原式} = \int_1^b \sin x dx = \cos 1 - \cos b.$$

## 二、定积分的估值与比较

简单的定积分估值可以直接由不等式

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

得出, 而较精密的估值可用推广的积分中值定理和第二积分中值定理来估计.

**例 5** 估计下列各积分的值:

$$(1) \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \arctan x dx; \quad (2) \int_0^2 e^{x^2-x} dx.$$

**解** 可先求  $f(x)$  在积分区间上的最大值与最小值, 再考虑区间长度, 即得.

(1) 因为

$$f'(x) = \arctan x + \frac{x}{x^2+1} > 0, \quad x \in [1/\sqrt{3}, \sqrt{3}],$$

所以  $f(x)$  严格单调增加, 最小值  $m = f(1/\sqrt{3}) = \pi/(6\sqrt{3})$ , 最大值  $M = f(\sqrt{3}) = \pi/\sqrt{3}$ . 因此

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &\leq \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \arctan x dx \\ &\leq \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\end{aligned}$$

即 
$$\frac{\pi}{9} \leq \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \arctan x dx \leq \frac{2\pi}{3}.$$

(2) 因为  $f'(x) = e^{x^2-x}(2x-1)$ , 有惟一驻点  $x = \frac{1}{2}$ , 当  $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  时,  $f'(x) < 0$ , 当  $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$  时,  $f'(x) > 0$ , 故有最小值  $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-1/2}$ . 而由  $f(x)$  在  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  与  $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$  上的单调性, 比较  $f(0)$  与  $f(2)$ , 得最大值  $M = f(2) = e^2$ . 所以

$$2e^{-1/2} \leq \int_0^2 e^{x^2-x} dx \leq 2e^2.$$

**例 6** 利用第一积分中值定理估计下列定积分:

(1)  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + (\cos x)/2}$ ; (2)  $\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx.$

**解** (1) 因为  $\frac{1}{1+1/2} \leq \frac{1}{1+(\cos x)/2} \leq \frac{1}{1-1/2}$ , 即

$$\frac{2}{3} \leq \frac{1}{1+(\cos x)/2} \leq 2,$$

则 
$$\frac{2}{3} \cdot 2\pi \leq \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+(\cos x)/2} \leq 2 \cdot 2\pi,$$

即 
$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+(\cos x)/2} = \frac{4\pi}{3}(2\theta), \quad |\theta| < 1.$$

(2) 因为  $\frac{x^9}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} \leq x^9$  ( $0 \leq x \leq 1$ ), 所以

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 x^9 dx \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx \leq \int_0^1 x^9 dx,$$

即 
$$\frac{1}{10\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx \leq \frac{1}{10}.$$

**例 7** 利用第二积分中值定理估计下列定积分:

$$(1) \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx; \quad (2) \int_a^b \sin x^2 dx \quad (0 < a < b).$$

解 (1) 设  $f(x) = \sin x, g(x) = \frac{1}{x}$ ,  $f(x)$  与  $g(x)$  都在  $[100\pi, 200\pi]$  上有界且可积,  $g(x)$  为单调减少函数且非负, 则依第二积分中值定理, 有

$$I = g(100\pi) \int_{100\pi}^{\xi} \sin x dx = \frac{1}{100\pi} \int_{100\pi}^{\xi} \sin x dx.$$

又 
$$0 < \int_{100\pi}^{\xi} \sin x dx < 2,$$

故 
$$\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{2\theta}{100\pi} = \frac{\theta}{100\pi} \quad (0 < \theta < 1).$$

(2) 令  $f(x) = x \sin x^2, g(x) = \frac{1}{x}$ , 则  $f(x)$  与  $g(x)$  都在  $[a, b]$  上可积, 且  $g(x)$  在  $[a, b]$  内严格单调减少, 故依第二积分中值定理, 有

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \frac{1}{x} x \sin x^2 dx = g(a) \int_a^{\xi} \frac{1}{2} \sin x^2 dx^2 \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{2} (-\cos x^2) \Big|_a^{\xi} = \frac{1}{2a} (\cos a^2 - \cos \xi^2) \\ &= \frac{1}{a} \sin \frac{\xi^2 + a^2}{2} \sin \frac{\xi^2 - a^2}{2} = \frac{\theta}{a} \quad (|\theta| \leq 1). \end{aligned}$$

例 8 比较下列定积分值的大小:

(1)  $\int_0^1 \frac{x}{1+x} dx$  和  $\int_0^1 \ln(1+x) dx$ ;

(2)  $\int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$  和  $\int_0^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$ .

解 (1) 作辅助函数  $\varphi(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x), x \in [0, 1]$ , 则

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = -\frac{x}{(1+x)^2} \leq 0,$$

即  $f(x)$  在积分区间上严格单调减少, 所以

$$\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \leq 0, \quad \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x).$$

由定积分性质, 有  $\int_0^1 \frac{x}{1+x} dx \leq \int_0^1 \ln(1+x) dx$ .

若  $\int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \int_0^1 \ln(1+x) dx$ , 则在  $[0, 1]$  上恒有  $\frac{x}{1+x} = \ln(1+x)$ , 但这是不可能的, 故必有

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x} dx < \int_0^1 \ln(1+x) dx.$$

(2) 对积分  $\int_0^{2\pi} e^{-x^2} \cos x^2 dx$  作代换  $x = \pi + u$ , 则

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx &= \int_0^{2\pi} e^{-(\pi+u)^2} \cos^2(\pi+u) du \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-(\pi+u)^2} \cos^2 u du = \int_0^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx. \end{aligned}$$

当  $0 \leq x \leq \pi$  时,  $e^{-x^2} \leq e^{-(\pi+u)^2}$ , 故

$$\int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx \geq \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx.$$

**例 9** 确定下列定积分的符号:

$$(1) \int_0^{2\pi} \sin x dx; \quad (2) \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx; \quad (3) \int_{-2}^2 x^3 2^x dx.$$

**解** 将积分变形后, 讨论积分区间内被积函数的符号, 确定定积分的符号.

$$\begin{aligned} (1) \int_0^{2\pi} x \sin x dx &= \int_0^{\pi} x \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} x \sin x dx \quad (x = t + \pi) \\ &= \int_0^{\pi} x \sin x dx - \int_0^{\pi} (t + \pi) \sin t dt \\ &= \int_0^{\pi} (x - x - \pi) \sin x dx = -\pi \int_0^{\pi} \sin x dx. \end{aligned}$$

因为在  $[0, \pi]$  上,  $\sin x \geq 0$ , 所以

$$\int_0^{2\pi} x \sin x dx < 0.$$

$$(2) \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx \quad (x = t + \pi)$$

$$= \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx - \int_0^\pi \frac{\sin t}{t + \pi} dt = \pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{x(x + \pi)} dx.$$

由积分第一中值定理知

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi^2 \sin \xi}{\xi(\xi + \pi)} > 0, \quad 0 < \xi < \pi.$$

$$\begin{aligned} (3) \int_{-2}^2 x^3 2^x dx &= \int_{-2}^0 x^3 e^x dx + \int_0^2 x^3 e^x dx \quad (x = -t) \\ &= \int_2^0 t^3 e^{-t} dt + \int_0^2 x^3 e^x dx = \int_0^2 x^3 (e^x - e^{-x}) dx. \end{aligned}$$

同上题, 有  $\int_{-2}^2 x^3 2^x dx = 2\xi^3(e^\xi - e^{-\xi}) > 0.$

**例 10** 设  $x > 0$ , 证明: 存在  $0 < \theta < 1$ , 使

$$\int_0^x e^t dt = xe^{\theta x}, \quad \text{且} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta = 1.$$

**证** 由积分中值定理知, 存在  $0 < \theta < 1$ , 使  $\int_0^x e^t dt = xe^{\theta x}$ . 又

由定积分计算得  $\int_0^x e^t dt = e^x - 1$ , 故有

$$xe^{\theta x} = e^x - 1 \Rightarrow \theta = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x},$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln \frac{e^x - 1}{x} \right) / x \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - 1} \left( \frac{e^x - 1}{x} \right)' \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) = 1. \end{aligned}$$

**例 11** 令  $\int_0^x f(t) dt = xf(\theta x)$ , 求  $\theta$ . 设

$$(1) f(t) = t^n (n > -1); \quad (2) f(t) = \ln t.$$

**解** (1) 因为  $\int_0^x t^n dt = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ , 所以

$$\frac{1}{n+1} x^{n+1} = x^{n+1} \theta^n \Rightarrow \theta = \sqrt[n]{1/(n+1)}.$$

(2) 因为  $\int_0^x \ln t dt = x(\ln x - 1)$ , 所以

$$x(\ln x - 1) = x \ln \theta x \Rightarrow \theta = \frac{1}{e}.$$

### 三、求定积分的极限

例 12 证明下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = 0.$$

证 (1) 由积分第一中值定理,  $\exists \xi_n \in (0, 1)$ , 使

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{1}{1+\xi_n} \int_0^1 x^n dx \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$  ( $\xi_n$  与  $n$  有关).

(2) 由积分第一中值定理,  $\exists \xi_n \in (n, n+p)$  使

$$0 \leq \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{\xi_n} \int_n^{n+p} \sin x dx \leq \frac{\sin \xi_n}{\xi_n} \cdot p \rightarrow 0$$

所以  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = 0.$

例 13 证明: 若  $f(x)$  是  $[0, +\infty)$  上的连续函数, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 则有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = A.$$

证 因为  $f(x)$  连续, 所以  $|f(x)| \leq M, x \in [0, +\infty)$

$$\text{又 } \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^{\sqrt{x}} f(t) dt + \frac{1}{x} \int_{\sqrt{x}}^x f(t) dt.$$

$$\text{其中 } \left| \frac{1}{x} \int_0^{\sqrt{x}} f(t) dx \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^{\sqrt{x}} |f(t)| dt \leq \frac{M}{x} \sqrt{x} \rightarrow 0 \\ (x \rightarrow +\infty);$$

又第二个积分使用积分第一中值定理, 得

$$\frac{1}{x} \int_{\sqrt{x}}^x f(t) dt = \frac{1}{x} (x - \sqrt{x}) f(\xi_x), \quad \xi_x \in (\sqrt{x}, x).$$

因为  $x \rightarrow +\infty, \sqrt{x} \rightarrow +\infty$ , 所以  $\xi_x \rightarrow +\infty$ , 于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_{\sqrt{x}}^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) f(\xi_x) = A.$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = 0 + A = A.$$

此极限可以理解为  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上的平均值. 本例的条件即平均值存在的条件.

**例 14** 证明下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \sqrt{t} \sin t dt = 0; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = 0.$$

**证** (1) 本题可由积分第二中值定理来证, 设  $f(t) = \sqrt{t}$ ,  $g(t) = \sin t$ ,  $\exists \xi_x \in (0, x)$ , 使

$$\begin{aligned} 0 &< \left| \frac{1}{x} \int_0^x \sqrt{t} \sin t dt \right| = \frac{\sqrt{x}}{x} \left| \int_{\xi_x}^x \sin t dt \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} |\cos \xi_x - \cos x| \leq \frac{2}{\sqrt{x}} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

本例也说明例 13 的命题一般并不可逆.

(2) 设  $\epsilon$  为任意小的正数, 令

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2-\epsilon} \sin^n x dx + \int_{\pi/2-\epsilon}^{\pi/2} \sin^n x dx.$$

由积分第一中值定理,  $\exists \xi \in [0, \frac{\pi}{2} - \epsilon]$ , 使

$$\begin{aligned} 0 &< \int_0^{\pi/2-\epsilon} \sin^n x dx = \sin^n \xi \int_0^{\pi/2-\epsilon} dx \\ &\leq \frac{\pi}{2} \sin^n \xi \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

又 
$$0 < \int_{\pi/2-\epsilon}^{\pi/2} \sin^n x dx \leq \int_{\pi/2-\epsilon}^{\pi/2} dx = \epsilon,$$

所以 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = 0.$$

**例 15** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $x_0 \in [a, b]$ , 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{nx_0}^{nx_0+1} f\left(\frac{x}{n}\right) dx = f(x_0).$$

**证** 由积分第一中值定理,  $\exists \xi_n \in [nx_0, nx_0 + 1]$ , 作代换  $t = x/n$ , 使

$$I = n \int_{x_0}^{x_0+1/n} f(t) dt = n \cdot f(\xi_n) \cdot \frac{1}{n} = f(\xi_n).$$

又  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = x_0$ , 由  $f(x)$  的连续性知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{nx_0}^{nx_0+1} f\left(\frac{x}{n}\right) dx = f(x_0).$$

例 16 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上非负连续, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x) dx} = \max_{a \leq x \leq b} f(x).$$

证 设  $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x) > 0$  (否则  $M = 0$ ), 则  $f(x) \equiv 0$ , 上式显然成立. 由保号性知,  $\exists [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ , 使

$$0 < M - \varepsilon \leq f(x) \leq M, \quad x \in [\alpha, \beta],$$

于是  $(M - \varepsilon)^n \leq f^n(x) \leq M^n, \quad x \in [\alpha, \beta].$

$$(M - \varepsilon)^n (\beta - \alpha) \leq \int_a^b f^n(x) dx \leq \int_a^b f^n dx \leq M^n (b - a),$$

$$\text{即 } (M - \varepsilon) \sqrt[n]{\beta - \alpha} \leq \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x) dx} \leq M \sqrt[n]{b - a}.$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\beta - \alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b - a} = 1$ , 所以由  $\varepsilon$  的任意性, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x) dx} = M = \max_{a \leq x \leq b} f(x).$$

例 17 设  $f(x) \in$  在  $[1, e]$  上可积, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \int_1^{1+1/n} f(x^n) dx \right] = \int_1^e \frac{f(t)}{t} dt.$$

证 令  $x^n = t, dx = \frac{1}{n} \sqrt[n]{t} / t dt$ , 则由积分第一中值定理得

知  $\exists \xi_n \in \left[ 1, \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]$ , 使

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{(1+1/n)^n} \frac{\sqrt[n]{t}}{t} \cdot f(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\xi_n} \int_1^{(1+1/n)^n} \frac{f(t)}{t} dt = \int_1^e \frac{f(t)}{t} dt. \end{aligned}$$

例 18 证明: 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 则有 (黎曼引理)



$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = 0.$$

证  $\forall \varepsilon > 0, \exists$  对  $[a, b]$  的分割  $T$ , 使  $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$ . 记  $m_i = \inf_{\Delta x_i} f(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 于是

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \sin \lambda x dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - m_i] \sin \lambda x dx + \sum_{i=1}^n m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin \lambda x dx. \end{aligned}$$

而  $|f(x) - m_i| \leq \omega_i, x \in \Delta_i, i = 1, 2, \dots, n$ , 且

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \sin \lambda(x) dx \right| = \frac{1}{\lambda} |\cos t_1 \lambda - \cos t_2 \lambda| \leq \frac{2}{\lambda}.$$

故又有 
$$\left| \int_a^b f(x) \sin \lambda x \right| \leq \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i + \frac{2}{\lambda} \sum_{i=1}^n |m_i|,$$

当分割  $T$  随  $\varepsilon$  确定后,  $\sum_{i=1}^n |m_i|$  为一常值. 故当  $\lambda > \frac{4}{\varepsilon} \sum_{i=1}^n |m_i|$  时,

$$\frac{2}{\lambda} \sum_{i=1}^n |m_i| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ 从而知}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = 0 \left( \left| \int_a^b f(x) \sin \lambda x \right| dx < \varepsilon \right).$$

请读者用同样方法自己证出第二个等式. 实际上也可以用分部积分法计算定积分后, 再用估值性得出:

$$\begin{aligned} &\int_a^b f(x) \cos \lambda x dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_a^b f(x) d \sin \lambda x = \frac{1}{\lambda} [f(x) \sin \lambda x] \Big|_a^b - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(x) \sin \lambda x dx \\ &= \frac{1}{\lambda} [f(b) \sin(\lambda b) - f(a) \sin(\lambda a)] - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(x) \sin \lambda x dx, \end{aligned}$$

显然 
$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} [f(b) \sin(\lambda b) - f(a) \sin(\lambda a)] = 0.$$

又  $f'(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $|f'(x)| \leq M, x \in [a, b]$ , 故

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \left| \int_a^b f'(x) \sin \lambda x dx \right| &\leq \frac{1}{\lambda} \int_a^b |f'(x) \sin \lambda x| dx \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \int_a^b |f'(x)| dx \leq \frac{1}{\lambda} m(b-a) \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

所以  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = 0$ .

这里,  $f(x)$  应在  $[a, b]$  上有连续导数.

**例 19** 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^{2\pi} \sin^{2n} x dx \right) / \left( \int_0^{2\pi} \sin^{2n+1} x dx \right) = 1$ .

**证** 用迫敛性证明. 因为当  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  时,  $0 \leq \sin x \leq 1$ , 故

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x, \\ \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx &\leq \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x dx. \end{aligned}$$

不等式各项同除以第一项, 有

$$1 \leq \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx} \leq \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx}.$$

又由定积分的瓦里士(Wallis)公式, 知

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x dx = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

所以上述不等式的后项等于  $\frac{2n+1}{2n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$ . 在上述不等式两边取极限, 由夹逼准则得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx \right) / \left( \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx \right) = 1.$$

**例 20** 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} e^x \cos^n x dx = 0$ .

**证**  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ , 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan \frac{1}{n} = 0$ , 知  $\exists N_1 > 0$ , 使当  $n > N_1$  时,  $0 < x_n < \delta$ , 则在  $[0, \delta]$  上有

$$f(x) = e^x \cos^n x \leq e^{x_n} \cos^n x_n = M_n.$$

因为当  $f'(x) = e^x \cos^{n-1} x (\cos x - n \sin x) = 0$  且  $n \geq 2$  时,  $x$

$= \frac{\pi}{2}, \arctan \frac{1}{n} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , 有

$$\max f(x) = e^{\arctan(1/n)} \left( \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \right)^n \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 1$ , 所以  $\exists N_2 > 0$ , 当  $n > N_2$  时, 有  $0 < M_n < 2$ . 取  $n > \max\{N_1, N_2\}$  有

$$0 < \int_0^\delta f(x) dx \leq \int_0^\delta M_n dx = M_n \cdot \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

而在  $n > N_1$  时,  $f(x)$  在  $\left[\delta, \frac{\pi}{2}\right]$  上单调减少, 只需

$$n > N_3 = \ln \left( \frac{2\varepsilon}{2\pi - \varepsilon} e^{-\pi/4} \right) / \ln \cos \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\begin{aligned} \text{就有 } 0 < \int_\delta^{\pi/2} f(x) dx &< e^\delta \cos^b \delta \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \delta \right) \\ &= \frac{1}{4} e^{\varepsilon/4} \left( \cos \frac{\varepsilon}{4} \right)^n (2\pi - \varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$$\text{或} \quad \left( \cos \frac{\varepsilon}{4} \right)^n < \frac{2\varepsilon}{(2\pi - \varepsilon) e^{\varepsilon/4}}.$$

所以, 当  $n > N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$  时, 有

$$0 < \int_0^{\pi/2} f(x) dx < \int_0^\delta f(x) dx + \int_\delta^{\pi/2} f(x) dx < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} e^x \cos^n x dx = 0.$$

**例 21** 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{n^2}^{n^2+n} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-1/x} dx = 1$ .

**证** 由积分中值定理,  $\exists n^2 \leq \xi_n \leq n^2 + n$ , 使

$$\int_{n^2}^{n^2+n} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-1/x} dx = \frac{1}{\sqrt{\xi_n}} e^{-1/\xi_n} \cdot n.$$

$$\text{又 } f'(x) = \frac{1}{x \sqrt{x}} e^{-1/x} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) < 0 \quad (x > 2),$$

所以, 当  $x > 2$  时  $f(x)$  严格单调减少, 即

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}e^{-1/(n^2+n)} \leq \frac{n}{\sqrt{\xi_n}}e^{-1/\xi_n} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2}}e^{-1/n^2} = e^{-1/n^2}.$$

由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}e^{-1/(n^2+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-1/n^2} = 1$ , 故依迫敛性, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{n^2}^{n^2+n} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-1/x} dx = 1.$$

例 22 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2} f(x) dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \int_0^1 \frac{hf(x)}{h^2+x^2} dx &= \int_0^{h^{1/4}} \frac{hf(x)}{h^2+x^2} dx + \int_{h^{1/4}}^1 \frac{hf(x)}{h^2+x^2} dx \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

而由积分中值定理, 得

$$\begin{aligned} I_1 &= f(\xi) \int_0^{h^{1/4}} \frac{h}{h^2+x^2} dx = f(\xi) \arctan \frac{x}{h} \Big|_0^{h^{1/4}} \\ &= f(\xi) \arctan(1/h^{1/4}) \rightarrow f(0) \cdot \frac{\pi}{2} \\ &\quad (\xi \in (0, h^{1/4}), h \rightarrow 0^+), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \int_{h^{1/4}}^1 \frac{hf(x)}{h^2+x^2} dx \right| \leq M \int_{h^{1/4}}^1 \frac{h}{h^2+x^2} dx \quad (|f(x)| \leq M) \\ &= M [\arctan(1/h) - \arctan(1/h^{3/4})] h \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0^+). \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2} f(x) dx = 0 + \frac{\pi}{2} f(0) = \frac{\pi}{2} f(0).$$

例 23 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续且严格单调减少,  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 0$ . 证明:  $\forall \delta \in (0, 1)$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{\delta}^1 (f(x))^n dx}{\int_0^{\delta} (f(x))^n dx} = 0.$$

证 因为  $f(x)$  严格单调减少,  $0 < f(\delta) < f(\delta/2)$ ,  $\left[ f(\delta)/f(\delta/2) \right]^n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). 由迫敛性,  $\forall \delta \in (0, 1)$ , 有

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{\int_{\delta}^1 [f(x)]^n dx}{\int_0^{\delta} [f(x)]^n dx} \leq \frac{\int_{\delta}^1 [f(x)]^n dx}{\int_0^{\delta/2} [f(x)]^n dx} \leq \frac{\int_{\delta}^1 [f(x)]^n dx}{\int_0^{\delta/2} \left[ f\left(\frac{\delta}{2}\right) \right]^n dx} \\
&\leq \left[ f(\delta) / f\left(\frac{\delta}{2}\right) \right]^n \cdot \frac{1 - \delta}{\delta/2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),
\end{aligned}$$

所以, 原式 = 0.

例 24 已知  $f(t)$  可微,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ , 求

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+2} t \left( \sin \frac{3}{t} \right) f(t) dt.$$

解 依积分中值定理,  $\exists \xi \in [x, x+2]$ , 使得

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+2} t \left( \sin \frac{3}{t} \right) f(t) dx &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \xi \sin \left( \frac{3}{\xi} \right) f(\xi) \cdot 2 \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} 6 \left( \sin \frac{3}{\xi} / \frac{3}{\xi} \right) \cdot f(\xi) = 6.
\end{aligned}$$

例 25 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} x^2 e^{-x^2} dx; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} \frac{e^x}{x^n} dx.$$

解 (1) 因为  $f'(x) = 2xe^{-x^2} - 2x^3e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}(1 - x^2) < 0$ , 所以在  $[n, n+1]$  上, 由估值性, 得

$$(n+1)^2 e^{-(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} x^2 e^{-x^2} dx \leq n^2 e^{-n^2}.$$

$$\text{而} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^2 e^{-(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n^2} = 0$$

(由洛必达法则  $x^2/e^{x^2} \rightarrow 0$ ),

$$\text{故} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} x^2 e^{-x^2} dx = 0.$$

(2) 因为  $n > 0$  时,  $1/x^n$  在  $[n, n+1]$  上连续,  $e^x > 0$ , 所以由推广的积分中值定理,  $\exists \xi \in [n, n+1]$ , 使得

$$\int_n^{n+1} \frac{e^x}{x^n} dx = \frac{1}{\xi^n} \int_n^{n+1} e^x dx = \frac{e^n}{\xi^n} (e - 1).$$

$$\text{又} \quad 0 \leq \frac{e^n}{n^n} (e-1) \leq \frac{2e^n}{n^n} = 2 \left( \frac{e}{n} \right)^n < \left( \frac{e}{3} \right)^n \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty),$$

$$\text{故} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} \frac{e^x}{x^n} dx = 0.$$

#### 四、关于定积分的等式和不等式的证明

关于定积分有许多著名的和常用的等式和不等式,几乎每个等式和不等式都有很多种证明方法.可以用定义、可积条件、定积分性质、定理,借助已知等式或不等式,计算定积分以及借助各种技巧来证明.做证明题首先要熟悉概念,其次是熟悉技巧,要了解命题的条件,依据条件选择证明的方法和提出证明的依据,使证明清晰严密,无懈可击.

**例 26** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,且单调增加,证明:

$$\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

**证法 1** 用定积分性质证.由  $f(x)$  的单调性,有

$$\left( x - \frac{a+b}{2} \right) \left[ f(x) - f\left( \frac{a+b}{2} \right) \right] \geq 0,$$

$$\text{故} \quad \int_a^b \left( x - \frac{a+b}{2} \right) \left[ f(x) - f\left( \frac{a+b}{2} \right) \right] dx \geq 0.$$

$$\text{又} \quad \int_a^b \left( x - \frac{a+b}{2} \right) f\left( \frac{a+b}{2} \right) dx \\ \stackrel{t = x - (a+b)/2}{=} f\left( \frac{a+b}{2} \right) \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} t dt = 0,$$

解上式两边积分式,即得

$$\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

**证法 2** 用积分第一中值定理证.

$$\int_a^b \left( x - \frac{a+b}{2} \right) f(x) dx \\ = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left( x - \frac{a+b}{2} \right) f(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left( x - \frac{a+b}{2} \right) f(x) dx.$$

依积分第一中值定理,  $\exists \xi_1 \in \left[0, \frac{a+b}{2}\right], \xi_2 \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ , 使

$$\begin{aligned} I &= f(\xi_1) \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx + f(\xi_2) \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx \\ &= -f(\xi_1) \frac{(b-a)^2}{2} + f(\xi_2) \frac{(b-a)^2}{2} \quad (\text{由 } f(x) \text{ 的单调性}) \\ &= \frac{(b-a)^2}{2} [f(\xi_2) - f(\xi_1)] \geq 0. \end{aligned}$$

**证法 3** 用积分第二中值定理证. 因为  $f(x)$  单调增加, 所以  $\exists \xi \in [a, b]$ , 使

$$\begin{aligned} I &= f(a) \int_a^{\xi} \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx + f(b) \int_{\xi}^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx \\ &= f(a) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx + [f(b) - f(a)] \int_{\xi}^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx \\ &= [f(b) - f(a)] \left[ \frac{b^2 - \xi^2}{2} - \frac{a+b}{2}(b - \xi) \right] \\ &= [f(b) - f(a)] \frac{b - \xi}{2} (\xi - a) \geq 0. \end{aligned}$$

**证法 4** 由  $f(x)$  的单调性知,  $\forall t, x \in [a, b]$ , 有

$$(t - x)[f(t) - f(x)] \geq 0.$$

在上式中固定  $x$ , 对  $t$  从  $a$  到  $b$  积分, 得

$$\int_a^b t f(t) dt - x \int_a^b f(t) dt + x f(x)(b - a) - f(x) \frac{b^2 - a^2}{2} \geq 0.$$

再将上式对  $x$  从  $a$  到  $b$  积分, 得

$$\begin{aligned} (b - a) \int_a^b t f(t) dt - \frac{b^2 - a^2}{2} \int_a^b f(t) dt + (b - a) \int_a^b x f(x) dx \\ - \frac{b^2 - a^2}{2} \int_a^b f(x) dx \geq 0. \end{aligned}$$

将上式中变量  $t$  改为  $x$ , 即可化简得

$$\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

**证法 5** 用变上限积分(下节内容)证. 令

$$F(x) \triangleq \int_a^x t f(t) dt - \frac{a+x}{2} \int_a^x f(t) dt,$$

显然  $F(a) = 0$ . 而对  $x \in (a, b]$ , 有

$$\begin{aligned} F'(x) &= xf(x) - \frac{1}{2} \int_a^x f(t) dt - \frac{a+x}{2} f(x) \\ &= \frac{x-a}{2} f(x) - \frac{1}{2} \int_a^x f(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^x [f(x) - f(t)] dt \geq 0. \end{aligned}$$

即  $F(x)$  单调增加,  $F(x) \geq 0, F(b) \geq 0$ . 因此

$$\int_a^b xf(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

本例的物理意义是: 如果曲线  $y = f(x)$  单调上升, 则密度均匀的曲边梯形  $\{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$  的质心不可能落在直线  $x = \frac{a+b}{2}$  的左边.

因为篇幅的关系, 我们在以后的每例中仍然只选讲一种证明方法, 读者可尝试其它方法.

**例 27** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上满足  $f'(x) \geq m \geq 0, |f(x)| \leq \pi$ , 证明:  $\left| \int_a^b \sin f(x) dx \right| \leq \frac{2}{m}$ .

**证** 因为  $f(x)$  严格单调增加, 所以  $f(x)$  在  $[a, b]$  上至多有一零点  $c$ , 从而

$$\int_a^b \sin f(x) dx = \int_a^b \frac{1}{f'(x)} \sin f(x) f'(x) dx = \int_a^c + \int_c^b.$$

由积分第一中值定理和分部积分法

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{f'(\xi)} \int_a^c \sin f(x) df(x) + \frac{1}{f'(\eta)} \int_c^b \sin f(x) df(x) \\ &= \frac{1}{f'(\eta)} [1 - \cos f(b)] - \frac{1}{f'(\xi)} [1 - \cos f(a)], \end{aligned}$$

所以  $\left| \int_a^b \sin f(x) dx \right| \geq \frac{2}{m}$ .

**例 28** 设  $b > a > 0, \theta > 0$ , 证明:  $\exists |\xi| < 1$ , 使

$$\int_a^b \frac{e^{-\theta x} \sin x}{x} dx = \frac{2\xi}{a}.$$



证 令  $f(x) = \frac{e^{-\theta x}}{x}$ ,  $g(x) = \sin x$ , 则  $g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 又  $f'(x) = \frac{1 + \theta x}{x^2} e^{-\theta x} < 0$ , 所以  $f(x)$  在  $[a, b]$  上严格单调减少非负. 于是, 由积分第二中值定理知,  $\exists \eta \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b \frac{e^{-\theta x} \sin x}{x} dx = f(a) \int_a^\eta g(x) dx = \frac{e^{-\theta a}}{a} (\cos a - \cos \eta),$$

即 
$$\left| \int_a^b \frac{e^{-\theta x} \sin x}{x} dx \right| < \frac{2}{a}.$$

令  $\xi = \frac{a}{2} \int_a^b \frac{e^{-\theta x} \sin x}{x} dx$ , 则有  $|\xi| < 1$ , 且

$$\int_a^b \frac{e^{-\theta x} \sin x}{x} dx = \frac{2\xi}{a}.$$

例 29 设  $f(x)$  在  $[2, 4]$  上连续且可导, 且  $f(2) = f(4) = 0$ ,

证明:  $\max_{x \in [2, 4]} |f'(x)| \geq \left| \int_2^4 f(x) dx \right|.$

证 取  $x \in [2, 4]$ , 在  $[2, x]$  和  $[x, 4]$  上分别对  $f(x)$  使用拉格朗日中值定理, 则  $\exists \xi_1 \in [2, x], \xi_2 \in [x, 4]$ , 使得

$$f(x) - f(2) = f'(\xi_1)(x - 2) \Rightarrow f(x) = f'(\xi_1)(x - 2),$$

$$f(4) - f(x) = f'(\xi_2)(4 - x) \Rightarrow f(x) = f'(\xi_2)(x - 4),$$

令  $M = \max_{x \in [2, 4]} |f'(x)|$ , 则

$$|f(x)| \leq M(x - 2), \quad |f(x)| \leq M(4 - x).$$

故 
$$\begin{aligned} \left| \int_2^4 f(x) dx \right| &\leq \int_2^4 |f(x)| dx \\ &\leq \int_2^3 M(x - 2) dx + \int_3^4 M(4 - x) dx = \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M, \end{aligned}$$

即 
$$\max_{x \in [2, 4]} |f'(x)| \geq \left| \int_2^4 f(x) dx \right|.$$

例 30 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上具有连续的二阶导数, 证明:  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right) + \frac{1}{24} (b - a)^3 f''(\xi).$$

证 设  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , 则  $F'(x) = f(x)$ ,  $F''(x) = f'(x)$ ,  $F'''(x) = f''(x)$ . 将  $F(x)$  在  $x_0 = \frac{1}{2}(a+b)$  展为二阶泰勒公式, 得

$$F(b) = F(x_0) + F'(x_0)(b-x_0) + \frac{F''(x_0)}{2!}(b-x_0)^2 + \frac{F'''(\xi_1)}{3!}(b-x_0)^3 (x_0 < \xi_1 < b),$$

$$F(a) = F(x_0) + F'(x_0)(a-x_0) + \frac{F''(x_0)}{2!}(a-x_0)^2 + \frac{F'''(\xi_2)}{3!}(a-x_0)^3 (a < \xi_2 < x_0).$$

将上面两式相减, 由于  $b-x_0 = \frac{1}{2}(b-a) = -(a-x_0)$ , 故

$$F(b) - F(a) = 2F'(x_0) \frac{1}{2}(b-a) + \frac{1}{48}(b-a)[F'''(\xi_1) - F'''(\xi_2)].$$

因为  $f''(x)$  连续, 由介值定理,  $\exists \xi \in [\xi_1, \xi_2]$ , 使

$$F'''(\xi_1) + F'''(\xi_2) = f''(\xi_1) + f''(\xi_2) = 2f''(\xi),$$

$$F'(x_0) = f(x_0) = f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

所以  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$  (牛顿-莱布尼茨公式)

$$= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi).$$

例 29 与例 30 的证明是用微分学的中值定理完成的.

例 31 证明: 若函数  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $[0,1]$  上有相同的单调性, 则

$$\int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx \leq \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

证 因为  $f(x), g(x)$  在  $[0,1]$  上可积, 所以  $f(x) \cdot g(x)$  在  $[0,1]$  上也可积. 现将  $[0,1]$   $n$  等分,  $\Delta_i = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ , 取  $\xi_i = \frac{i}{n}$ ,  $i$

$= 1, 2, \dots, n$ . 由于  $f(x), g(x)$  有相同的单调性, 所以

$$\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \sum_{i=1}^n g\left(\frac{i}{n}\right) \leq n \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) g\left(\frac{i}{n}\right),$$

即 
$$\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) g\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n}.$$

故由定积分定义, 对不等式取  $n \rightarrow \infty$  的极限, 得

$$\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 g(x) dx \leq \int_0^1 f(x) g(x) dx.$$

例 32 证明: 若函数  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $[a, b]$  上非负连续, 且  $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , 则有不等式

$$\int_a^b f(x) g(x) dx \leq \left( \int_a^b [f(x)]^p dx \right)^{1/p} \left( \int_a^b [g(x)]^q dx \right)^{1/q}$$

成立. 不等式称赫尔德积分不等式.

当  $p = q = 2$  时, 不等式称施瓦兹积分不等式.

证 赫尔德积分不等式可用定积分定义和不等式  $AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$  ( $A \geq 0, B \geq 0$ ) (见第四章第四节例 18) 证, 也可以用定积分的单调性与上述不等式来证. 本例利用定积分定义与赫尔德积分不等式 (见第一章第三节例 11) 来证.

对  $[a, b]$  作等分  $T, \Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ , 取  $\xi_i = x_i, i = 1, 2, \dots, n$ . 由赫尔德积分不等式, 有

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) g(\xi_i) \leq \left( \sum_{i=1}^n [f(\xi_i)]^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n [g(\xi_i)]^q \right)^{1/q},$$

其中  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1$ . 上式两边乘以  $\frac{b-a}{n}$ , 得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n f(\xi_i) g(\xi_i) \frac{b-a}{n} \\ & \leq \left( \sum_{i=1}^n [f(\xi_i)]^p \frac{b-a}{n} \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n [g(\xi_i)]^q \frac{b-a}{n} \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

由于  $[f(x)]^p, [g(x)]^q, f(x)g(x)$  均连续, 故在  $[a, b]$  上可积, 取  $n$

→ ∞ 的极限, 依定积分定义, 有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left( \int_a^b [f(x)]^p \right)^{1/p} \left( \int_a^b [g(x)]^q \right)^{1/q}.$$

例 33 设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 证明: 施瓦兹积分不等式

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left( \int_a^b f^2(x)dx \right)^{1/2} \left( \int_a^b g^2(x)dx \right)^{1/2}.$$

证 除当作赫尔德积分不等式特例外, 还可以用实二次三项式的判别式来证.

设  $\int_a^b g^2(x)dx \neq 0$ , 则对实变量  $\lambda$  的二次三项式, 有

$$\begin{aligned} & \int_a^b [f(x) + \lambda g(x)]^2 dx \\ &= \lambda^2 \int_a^b g^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx \geq 0, \end{aligned}$$

其判别式非正, 即

$$\left( \int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 - \left( \int_a^b f^2(x)dx \right) \left( \int_a^b g^2(x)dx \right) \leq 0,$$

故 
$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left( \int_a^b f^2(x)dx \right)^{1/2} \left( \int_a^b g^2(x)dx \right)^{1/2}.$$

例 34 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有一阶连续导数, 且  $f(a) = 0$ , 证明:

$$\int_a^b f^2(x)dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 dx - \frac{1}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 (x-a)^2 dx.$$

证 由题设知  $f(x) = \int_a^x f'(t)dt$  ( $a \leq x \leq b$ ).

依赫尔德积分不等式, 得

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \left[ \int_a^x f'(t)dt \right]^2 \leq \int_a^x [f'(t)]^2 dt \cdot \int_a^x 1^2 dx \\ &= (x-a) \int_a^x [f'(t)]^2 dt. \end{aligned}$$

对上式两边从  $a$  到  $b$  积分, 用分部积分法, 可得

$$\begin{aligned} \int_a^b f^2(x)dx &\leq \int_a^b \left[ (x-a) \int_a^x [f'(t)]^2 dt \right] dx \\ &= \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 dx - \frac{1}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 (x-a)^2 dx. \end{aligned}$$

例 35 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有连续的导函数, 且  $f(a) = 0$ , 证明:

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|dx \leq \frac{b-a}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

证 令  $g(x) = \int_a^x |f'(t)|dt$  ( $a \leq x \leq b$ ), 则  $g'(x) = |f'(x)|$ , 由  $f(a) = 0$  知

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(a)| = \left| \int_a^x f'(t)dt \right| \\ &\leq \int_a^x |f'(t)|dt = g(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \int_a^b |f(x)f'(x)|dx &\leq \int_a^b g(x)g'(x)dx = \int_a^b g(x)dg(x) \\ &= \frac{1}{2}g^2(x) \Big|_a^b = \frac{1}{2} \left( \int_a^b |f'(t)|dt \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \int_a^b 1 \cdot |f'(t)|dt \right)^2. \end{aligned}$$

由施瓦兹积分不等式, 有

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)f'(x)|dx &\leq \frac{1}{2} \int_a^b 1^2 dx \int_a^b |f'(t)|^2 dt \\ &\leq \frac{b-a}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 dx. \end{aligned}$$

例 36 证明: 若函数  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $[a, b]$  上非负连续, 且  $p > 1$ , 则有不等式

$$\begin{aligned} &\left( \int_a^b [f(x) + g(x)]^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left( \int_a^b [f(x)]^p dx \right)^{1/p} + \left( \int_a^b [g(x)]^p dx \right)^{1/p} \end{aligned}$$

成立. 不等式称为闵可夫斯基积分不等式.

证 利用赫尔德积分不等式和  $q(p-1) = p$ , 有

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + g(x)]^p dx &= \int_a^b [f(x) + g(x)][f(x) + g(x)]^{p-1} dx \\ &= \int_a^b f(x)[f(x) + g(x)]^{p-1} dx + \int_a^b g(x)[f(x) + g(x)]^{p-1} dx \\ &\leq \left( \int_a^b [f(x)]^p dx \right)^{1/p} \left( \int_a^b [f(x) + g(x)]^{q(p-1)} dx \right)^{1/q} \\ &\quad + \left( \int_a^b [g(x)]^p dx \right)^{1/p} \left( \int_a^b [f(x) + g(x)]^{q(p-1)} dx \right)^{1/q} \end{aligned}$$

$$= \left\{ \left( \int_a^b [f(x)]^p dx \right)^{1/p} + \left( \int_a^b [g(x)]^p dx \right)^{1/p} \right\} \\ \cdot \left( \int_a^b [f(x) + g(x)]^p dx \right)^{1/p},$$

或 
$$\left( \int_a^b [f(x) + g(x)]^p dx \right)^{1-1/q} \\ \leq \left( \int_a^b [f(x)]^p dx \right)^{1/p} + \left( \int_a^b [g(x)]^p dx \right)^{1/p},$$

即 
$$\left( \int_a^b [f(x) + g(x)]^p dx \right)^{1/p} \\ \leq \left( \int_a^b [f(x)]^p dx \right)^{1/p} + \left( \int_a^b [g(x)]^p dx \right)^{1/p}.$$

**例 37** 证明:若  $f(x)$  在  $[0,1]$  上单调减少,则  $\forall a \in (0,1)$ , 不等式  $a \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^a f(x) dx$  成立.

**证** 因为,所证不等式可化为

$$a \int_0^1 f(x) dx = a \int_0^a f(x) dx + a \int_a^1 f(x) dx \leq \int_0^a f(x) dx,$$

故只需证 
$$\frac{1}{1-a} \int_a^1 f(x) dx \leq \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx.$$

又  $f(x)$  单调减少,所以

$$\frac{1}{1-a} \int_a^1 f(x) dx \leq \frac{1}{1-a} \int_a^1 f(a) dx = f(a),$$

而 
$$\frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx \geq \frac{1}{a} \int_0^a f(a) dx = f(a),$$

故 
$$\frac{1}{1-a} \int_a^1 f(x) dx \leq \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx.$$

**例 38** 设  $a > 0$ ,  $f'(x)$  在  $[0,a]$  上连续,证明:

$$|f(0)| \leq \frac{1}{a} \int_0^a |f(x)| dx + \int_0^a |f'(x)| dx.$$

**证** 由积分第一中值定理知,  $\exists \xi \in [0,a]$ , 使

$$\int_0^a |f(x)| dx = a f(\xi).$$

而 
$$f(\xi) - f(0) = \int_0^\xi f'(x) dx,$$

即 
$$f(0) = f(\xi) - \int_0^\xi f'(x)dx,$$

故 
$$\begin{aligned} |f(0)| &= \left| f(\xi) - \int_0^\xi f'(x)dx \right| \leq |f(\xi)| \left| \int_0^\xi f'(x)dx \right| \\ &\leq |f(\xi)| + \int_0^\xi |f'(x)|dx \\ &\leq \frac{1}{a} \int_0^a |f(x)|dx + \int_0^a |f'(x)|dx. \end{aligned}$$

例 39 设  $\varphi(t)$  在  $[a, b]$  上连续,  $E = \varphi([a, b])$ ,  $f(x)$  在  $E$  上为可微凸函数, 证明:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f[\varphi(t)]dt > f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(t)dt\right).$$

证 令  $c = \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(t)dt$ , 则命题转化为证

$$\int_a^b f[\varphi(x)]dt \geq (b-a)f(c).$$

由题设知,  $f(x)$  为可微凸函数, 故  $\forall x \in E$ , 有

$$f(x) \geq f(c) + f'(c)(x-c).$$

于是  $f[\varphi(t)] \geq f(c) + f'(c)[\varphi(t)-c],$

$$\begin{aligned} \int_a^b f[\varphi(t)]dt &\geq (b-a)f(c) + f'(c) \int_a^b \varphi(t)dt - f'(c)c(b-a) \\ &= (b-a)f(c), \end{aligned}$$

故 
$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f[\varphi(t)]dt > f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(t)dt\right).$$

例 40 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f(a) = 0, |f'(x)| \leq k$ , 证明:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \frac{(b-a)^2}{2}k.$$

证 依拉格朗日中值定理, 有

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a), \quad \xi \in (a, x) \subset (a, b).$$

对上式两边在  $[a, b]$  上积分, 得

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a)dx + \int_a^b (x-a)f'(\xi)dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq f(a)(b-a) + \int_a^b |(x-a)f'(\xi)|dx \\
&= f(a)(b-a) + \int_a^b (x-a)|f'(\xi)|dx \\
&\leq f(a)(b-a) + k \int_a^b (x-a)dx \\
&\leq k \int_a^b (x-a)dx = \frac{(b-a)^2}{2}k.
\end{aligned}$$

例 41 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二次可导, 且  $f''(x) > 0$ , 证明:

$$\int_a^b f(x)dx \geq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

证 利用泰勒公式, 将  $f(x)$  在  $x_0 = \frac{1}{2}(a+b)$  处展为一阶泰勒公式, 因为  $f''(x) > 0$ , 故

$$f(x) \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right).$$

对上式两边在  $[a, b]$  上积分, 得

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx + \int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)dx.$$

而 
$$\begin{aligned}
\int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)dx &= f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)dx \\
&= f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{1}{2} \left[ \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \right]_a^b \\
&= \frac{1}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \left[ \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \right] = 0,
\end{aligned}$$

故 
$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

例 42 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上非负连续, 证明:

$$e^{\int_0^1 \ln f(x)dx} \leq \int_0^1 f(x)dx.$$

证 由题设知  $f(x)$  和  $\ln f(x)$  在  $[0, 1]$  上可积, 将  $[0, 1]$   $n$  等分, 作积分和

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right),$$



$$\int_0^1 \ln f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln f\left(\frac{i}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[ \prod_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \right]^{1/n},$$

$$\text{所以 } e^{\int_0^1 \ln f(x) dx} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[ \prod_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \right]^{1/n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \prod_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \right]^{1/n}.$$

利用不等式  $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ , 得

$$\left[ \prod_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \right]^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right),$$

$$\text{故 } e^{\int_0^1 \ln f(x) dx} \leq \int_0^1 f(x) dx.$$

### 五、利用定积分研究函数

利用定积分研究函数的性态, 往往要和以前学过的许多知识结合起来, 因而具有一定的难度. 这就要求我们对概念要理解和融会贯通, 对方法和技巧要深知并熟练掌握. 只要努力, 这是容易做到的.

**例 43** 设  $F(x) = \int_0^a f(x+y) dy$ ,  $a > 0$ ,  $f(u)$  为处处有定义且单调增加的连续函数. 讨论  $F(x)$  的增减性.

**解** 任取  $x_1, x_2$ , 使  $x_1 < x_2$ , 则  $x_1 + y < x_2 + y$ . 故

$$f(x_2 + y) - f(x_1 + y) \geq 0.$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } F(x_2) - F(x_1) &= \int_0^a f(x_2 + y) dy - \int_0^a f(x_1 + y) dy \\ &= \int_0^a [f(x_2 + y) - f(x_1 + y)] dy \geq 0. \end{aligned}$$

所以,  $F(x)$  是单调增加函数.

**例 44** 设  $f(x)$  为奇函数,  $f(x)$  可微, 证明:  $f'(x)$  与  $\int_0^x f(t) dt$  都是偶函数.

**证** 奇函数的导数是偶函数, 偶函数的导数是奇函数, 可以用定义 (见第三章第一节例 1) 证明  $f'(x)$  为偶函数.

下面证  $\int_0^x f(t)dt$  是偶函数. 令  $\varphi(x) = \int_0^x f(t)dt$ , 则

$$\begin{aligned}\varphi(-x) &= \int_0^{-x} f(t)dt \stackrel{t=-u}{=} - \int_0^x f(-u)du \\ &= \int_0^x f(u)du = \varphi(x).\end{aligned}$$

所以,  $\varphi(x) = \int_0^x f(t)dt$  是偶函数.

**例 45** 设  $f(x)$  在  $[x, +\infty)$  连续可导, 且

$$f'(x) = \frac{1}{1+f^2(x)} \left[ \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\ln\left(x + \frac{1}{x}\right)} \right],$$

证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在.

**证** 因为  $x \geq 1$  时,  $\ln\left(x + \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$ , 所以  $f'(x) \geq 0$ , 即  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上单调增加. 又

$$\begin{aligned}f'(x) &\leq \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\ln\left(x + \frac{1}{x}\right)} \leq \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \leq \frac{1}{2\sqrt{x^3}}.\end{aligned}$$

故

$$\int_1^x f'(x)dx \leq \int_1^x \frac{1}{2\sqrt{x^3}}dx.$$

比较定积分值, 得  $f(x) - f(1) \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1$ . 知  $f(x) \leq f(1) + 1$ , 即  $f(x)$  有上界. 由于函数  $f(x)$  单调增加且有上界, 所以  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在.

**例 46** 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上连续可导, 且  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  和  $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$  均收敛. 证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ .

**证** 因为  $f(x) = \int_a^x f'(t)dt + f(a)$ , 而  $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$  收敛, 即

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f'(t)dt$  存在, 因而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ .

用反证法证  $A \neq 0$ . 设  $A > 0$  ( $A < 0$  同样可证), 则对  $A \exists M > 0$ , 使当  $x \geq M$  时, 有  $f(x) > \frac{A}{2}$ . 此时

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(t)dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \int_0^M f(t)dt + \int_M^x f(t)dt \right] \\ &> \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \int_0^M f(t)dt + \int_M^x \frac{A}{2}dt \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A}{2}(x - M) + \int_a^M f(t)dt = +\infty, \end{aligned}$$

从而推出与假设矛盾, 所以  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

例 47 设  $f(x) = \begin{cases} \int_0^x \sin \frac{1}{t} dt, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$  证明:  $f'(0) = 0$ .

证 先证  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0$  (事实上, 这里  $x$  既表示增量, 又表示  $U^\circ(0)$  内点).

设  $x > 0$  ( $x < 0$  类似可证), 由积分第二中值定理,  $\exists \xi_x \in \left[ \frac{1}{2x}, \frac{1}{x} \right]$ , 使得

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(2x) - f(x)}{x} \right| &= \left| \frac{1}{x} \int_x^{2x} \sin \frac{1}{t} dt \right| \stackrel{u=1/t}{=} \frac{1}{x} \left| \int_{1/2x}^{1/x} \frac{\sin 2u}{u^2} du \right| \\ &= \frac{4x^2}{x} \left| \int_{1/2x}^{\xi_x} \sin u du \right| = 4x \left| \cos \frac{1}{2x} - \cos \xi_x \right| \\ &\leq 8x \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0^+). \end{aligned}$$

当  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = A$  时, 有  $f'(0) = A$ , 故  $f'(0) = 0$ .

实际上, 若  $f'(0)$  存在, 则由

$$\frac{f(2x) - f(x)}{x} = 2 \frac{f(2x) - f(0)}{2x} - \frac{f(x) - f(0)}{x},$$

当  $x \rightarrow 0$  时, 有  $A = 2f'(0) - f'(0) = f'(0)$ .

例 48 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $\int_a^b f(x)dx = 0$ ,  $\int_a^b x f(x)dx$

$= 0$ , 证明: 至少存在两点  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , 使  $f(x_1) = f(x_2) = 0$ .

证 由于  $\int_a^b f(x)dx = 0$ , 所以  $f(x)$  必在  $[a, b]$  上变号. 由根的存在定理,  $\exists x_1 \in [a, b], f(x_1) = 0$ .

又设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上只有惟一零点  $x_1$ , 则  $(x - x_1)f(x)$  在  $[a, b]$  上不变号, 从而

$$\int_a^b (x - x_1)f(x)dx \neq 0 \Rightarrow \int_a^b xf(x)dx \neq 0$$

与题设矛盾. 因此至少有两点  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , 使

$$f(x_1) = f(x_2) = 0,$$

例 49 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且满足  $f(1) = k \int_0^{1/k} xe^{1-x} f(x)dx$  ( $k > 1$ ). 证明: 至少存在一点  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = (1 - 1/\xi)f(\xi)$ .

证 由  $f(1) = k \int_0^{1/k} xe^{1-x} f(x)dx$  及积分中值定理知, 至少存在一点  $\xi_1 \in [0, 1/k] \subset [0, 1]$ , 使得

$$f(1) = k \int_0^{1/k} xe^{1-x} f(x)dx = \xi_1 e^{1-\xi_1} f(\xi_1).$$

在  $[\xi_1, 1]$  上, 令  $\varphi(x) = xe^{1-x} f(x)$ , 则  $\varphi(x)$  在  $[\xi_1, 1]$  上连续, 在  $(\xi_1, 1)$  内可导, 且

$$\varphi(\xi_1) = f(1) = \varphi(1),$$

由罗尔定理知, 至少存在一点  $\xi \in (\xi_1, 1) \subset (0, 1)$ , 使得

$$\varphi'(\xi) = e^{1-\xi} [f(\xi) - \xi f(\xi) + \xi f'(\xi)] = 0,$$

即

$$f'(\xi) = (1 - 1/\xi)f(\xi).$$

例 50 设  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续, 在  $(0, 2)$  内二阶可导, 且  $f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right), f(2) = 2 \int_{1/2}^1 f(x)dx$ . 证明:  $\exists \xi \in (0, 2)$ , 使得  $f''(\xi) = 0$ .

证 由积分中值定理知,  $\exists \xi_1 \in [1/2, 1]$ , 使

$$f(2) = 2 \int_{1/2}^1 f(x) dx = 2 \left( 1 - \frac{1}{2} \right) f(\xi_1) = f(\xi_1).$$

对  $f(x)$  在  $(\xi_1, 2)$  内使用罗尔定理知,  $\exists \xi_2 \in (\xi_1, 2) \subset (1/2, 2)$ , 使  $f(\xi_2) = 0$ .

又由  $f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right)$  知, 依罗尔定理,  $\exists \xi_3 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ , 使得  $f'(\xi_3) = 0$ . 于是, 在  $(\xi_3, \xi_2)$  内再次使用罗尔定理知,  $\exists \xi \in (\xi_3, \xi_2) \subset (0, 2)$ , 使  $f''(\xi) = 0$ .

**例 51** 已知两曲线  $y = f(x)$  与  $y = \int_0^{\arctan x} e^{-t^2} dt$  在点  $(0, 0)$  处的切线相同. 写出此切线方程, 并求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{2}{n}\right)$ .

**解** 由题设知  $f(0) = 0, f'(0) = \frac{e^{-(\arctan x)^2}}{1+x^2} \Big|_{x=0} = 1$ , 故所求切线方程为

$$y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x.$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{f(2/n) - f(0)}{2/n} = 2f'(0) = 2$ .

**例 52** 函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上可导,  $f'(0) = 1$ , 且满足不等式

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1} \int_0^x f(t) dt = 0.$$

(1) 求导数  $f'(x)$ ;

(2) 证明: 当  $x \geq 0$  时, 有  $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$ .

**解** (1) 因为  $(x+1)f'(x) + (x+1)f(x) - \int_0^x f(t) dt = 0$ , 两边对  $x$  求导, 得

$$(x+1)f''(x) = -(x+2)f'(x).$$

设  $u = f'(x)$ , 则建立微分方程求解之, 有

$$\frac{du}{dx} = -\frac{x+2}{x+1}u \Rightarrow f'(x)u = \frac{1}{x+1}ce^{-x}.$$

由  $f(0) = 1, f'(0) + f(0) = 0$ , 知  $f'(0) = -1 \Rightarrow c = -1$ . 于是

$$f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x+1}.$$

证 (2) 由  $\int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0) = f(x) - 1$  知,  $f(x) = 1 - \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}dt$ . 又当  $x \geq 0$  时, 有

$$0 \leq \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}dt \leq \int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x},$$

所以

$$e^{-x} \leq f(x) \leq 1.$$

### 第三节 变上限积分与定积分的计算

#### 主要内容

1. 若函数  $f(t)$  在  $[a, b]$  上可积,  $\forall x \in [a, b]$ , 定义变动上限积分函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

类似定义变动下限积分函数

$$\Psi(x) = \int_x^b f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

$\Phi(x)$  和  $\Psi(x)$  统称为变限积分. 还可定义复合变限积分:

$$\int_a^{u(x)} f(x)dt, \quad \int_{v(x)}^b f(t)dt, \quad \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt.$$

2. 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 则  $\Phi(x)$  与  $\Psi(x)$  是  $[a, b]$  上的连续函数.

3. 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $\Phi(x)$  与  $\Psi(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 且

$$\Phi'(x) = f(x), \quad \Psi'(x) = -f(x),$$

$$\frac{d}{dx} \int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt = f[u(x)]u'(x) - f[v(x)]v'(x).$$

4. 微积分学基本定理 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则变动上限积分  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in [a, b]$  在  $[a, b]$  上可导, 且  $\Phi'(x) = f(x)$ .

定理说明: 只要  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上必有原函数, 且  $\Phi(x)$  即为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的一个原函数.

5. 牛顿 - 莱布尼茨公式 设  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 若  $F$  是  $f$  在  $[a, b]$  上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

6. 换元积分定理 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $\varphi(t)$  满足条件:

(1)  $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ , 且  $a \leq \varphi(t) \leq b, t \in [\alpha, \beta]$ ,

(2)  $\varphi(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  上有连续的导数,

则有定积分换元公式

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt.$$

7. 分部积分定理 若  $u(x), v(x)$  是  $[a, b]$  上的两个有连续导数的函数, 则有定积分的分部积分公式

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

若在  $[a, b]$  上有连续的  $u^{(n+1)}(x)$  和  $v^{(n+1)}(x)$ , 则有推广的分部积分公式

$$\begin{aligned} \int_a^b u \cdot v^{(n+1)} dx &= [u \cdot v^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \cdots + (-1)^n u^{(n)}v] \Big|_a^b \\ &\quad + (-1)^{n+1} \int_a^b u^{(n+1)}v dx, \quad n = 1, 2, \cdots. \end{aligned}$$

8. 一些常用公式

(1) 若  $f$  在  $[-a, a]$  上可积, 则

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 0, & f \text{ 为奇函数,} \\ 2\int_0^a f(x)dx, & f \text{ 为偶函数.} \end{cases}$$

(2) 若  $f$  是  $(-\infty, +\infty)$  上以  $T$  为周期的函数, 且在任意区间  $[a, a+T]$  上可积, 则有

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

即定积分与  $a$  无关.

(3) 若  $f(t)$  为连续函数, 则有代换公式

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx,$$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \pi \int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx.$$

(4) 若  $f(t)$  为连续函数, 则有瓦里士公式

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx &= \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx \\ &= \begin{cases} \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n = 2m+1 \text{ (即 } n \text{ 为奇数),} \\ \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}, & n = 2m \text{ (即 } n \text{ 为偶数).} \end{cases} \end{aligned}$$

## 疑难解析

### 1. 怎样理解定积分的定义?

答 定积分(或称黎曼积分)是黎曼于 1854 年提出来的. 定积分定义是一个构造性定义, 它利用对区间  $[a, b]$  的一个分割  $T$ , 将  $[a, b]$  分为  $n$  个小区间  $\Delta_i$ , 并在  $\Delta_i$  上任取一点  $\xi_i$ , 构造一个积分和式  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ , 称为黎曼和. 当  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使当  $\forall T$ , 只要  $\|T\| < \delta$ , 有  $\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - I \right| < \epsilon$ , 则称  $f$  在  $[a, b]$  上可积,



$I$  即为  $f$  在  $[a, b]$  上的定积分.

黎曼积分允许被积函数有不连续点, 但又不允许有“太多”的不连续点. 黎曼积分的可积函数受到一定限制.

黎曼可积函数的积分运算不完全是微分(求导)运算的逆运算. 即存在那样的黎曼可积函数  $f(x)$  (如  $[a, b]$  上有有限个第一类间断点的函数), 在进行积分运算  $\left(\int_a^x f(t) dt\right)$  后再进行微分运算  $\left(\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt\right)$ , 不能还原为函数  $f(x)$ .

在  $[a, b]$  上的黎曼可积的函数列  $\{f_n(x)\}$ , 它的极限函数  $f(x)$  (即  $\forall x \in [a, b], \{f_n(x)\}$  都收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ ) 在  $[a, b]$  上不一定仍然黎曼可积.

以上是定积分存在的缺陷. 此缺陷导致了勒贝格积分的产生, 从而推广了黎曼积分.

## 2. 使用换元积分定理要注意哪些问题?

答 换元积分定理即定积分的第二换元法. 因为第一换元法实际上不写出中间变量, 所以不考虑积分限的变更与变量间的对应问题. 第二换元积分法则要注意:

(1) 要保证  $\varphi(t)$  的值域包含在  $f(x)$  的连续范围内, 并在端点有对应  $\varphi(\alpha) = a$  和  $\varphi(\beta) = b$ , 但不一定要求  $x = \varphi(t)$  是单调且一一对应的.

(2) 变换后定积分  $\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$  的上限  $\beta$  和下限  $\alpha$  必须与原积分上限  $b$  和下限  $a$  相对应, 同  $\alpha, \beta$  的正、负、大、小无关.

## 方法、技巧与典型例题分析

本节的内容比较多, 特别是变动上限积分函数与定积分计算涉及的面较广. 下面我们逐个问题加以讨论.

## 一、变动上限积分函数

变动上限积分的特殊性是：它是一个函数，而且还可以是一个复合函数。因此，研究变动上限积分就要像研究函数的全面性态那样，认真讨论、分析和论证。还可以利用学过的所有方法并结合定积分概念来考察。

### 1. 利用变限积分函数求极限和论证极限

利用变限积分函数求极限，可以应用洛必达法则和定积分不等式进行。在解题中注意验证条件。

例 1 求下列极限：

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx; & \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt}{x^3}; \\ (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \int_0^x e^{x^2} dx \right)^2}{\int_0^x e^{2x^2} dx}; & \quad (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} \int_0^x t^2 e^{t^2} dt; \\ (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt}{x^3}. \end{aligned}$$

解 (1) 因为洛必达法则不能直接用于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ ，所以先求出  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ ，然后依海涅定理，得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ ，故由

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \ln(1 + 1/\sqrt{t}) dt}{\sqrt{x}} \left( \frac{\infty}{\infty} \right) \\ & \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(1 + 1/\sqrt{x})}{1/\sqrt{x}} \left( \frac{0}{0} \right) \\ & \stackrel{L'}{=} 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( -\frac{1}{2} x^{-3/2} \right) / (1 + 1/\sqrt{x})}{-\frac{1}{2} x^{-3/2}} = 2, \end{aligned}$$

得 原极限 = 2.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt}{x^3} \left( \frac{0}{0} \right) \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \sin x}{3x^2} = \frac{2}{3}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \int_0^x e^{x^2} dx \right)^2}{\int_0^x e^{2x^2} dx} \left( \frac{\infty}{\infty} \right) \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{x^2} \int_0^x e^{x^2} dx}{e^{2x^2}}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^{x^2} dx}{e^{x^2}} \left( \frac{\infty}{\infty} \right) \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = 0.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} \int_0^x t^2 e^{t^2} dt \left( \frac{\infty}{\infty} \right) \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{x^2}}{e^{x^2} + xe^{x^2} \cdot 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1 + 2x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt}{x^3} \left( \frac{0}{0} \right) \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin^2 x) \cos x}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin^2 x)}{\sin^2 x} \cdot \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

例 2 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x (1 + \sin 2t)^{1/t} dt}{x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan x)^2 dx}{\sqrt{x^2 + 1}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} t^{3/2} dt}{\int_0^x t(t - \sin t) dt}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan x} dx}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin x} dx}.$$

解 (1) 原极限  $\left( \frac{0}{0} \right) \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2} = e^2.$$

$$(2) \text{原极限} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{x} \left( \frac{\infty}{\infty} \right) \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\arctan x)^2 = \frac{\pi^2}{4}.$$

$$(3) \text{ 原极限 } \left( \frac{0}{0} \right) \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2)^{3/2} 2x}{x(x - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^3}{x - \sin x},$$

依泰勒公式  $x - \sin x = x^3/6 + o(x^3)$ , 则

$$\text{原极限} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^3}{x^3/6} = 12.$$

$$\begin{aligned} (4) \text{ 原极限 } & \left( \frac{0}{0} \right) \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x \sqrt{\tan(\sin x)}}{\sec^2 x \sqrt{\sin(\tan x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)} \right]^{1/2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{\tan(\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\tan x} \cdot \frac{\tan x}{\sin(\tan x)} \right]^{1/2} = 1. \end{aligned}$$

例 3 确定常数  $a, b$  的值, 使  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{a}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} \int_0^x e^{-t^2} dt \right]$  为有限值, 并求出极限.

解 利用泰勒公式  $e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4 + o(t^5)$ , 则

$$\begin{aligned} \text{原极限} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{b}{x^5} \int_0^x \left( 1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4 + o(t^5) \right) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{a}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{b}{x^5} \left( x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^6) \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( a - \frac{b}{3} \right) \frac{1}{x^2} + (1 + b) \frac{1}{x^4} + \frac{b}{10} + o(x) \right]. \end{aligned}$$

要使极限为有限值, 应有  $a - \frac{b}{3} = 0, 1 + b = 0$ , 故  $a = -\frac{1}{3}, b = -1$ , 于是

$$\text{原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{b}{10} + o(x) \right] = \frac{1}{10}.$$

例 4 确定  $a, b, c$ , 使得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x [\ln(1 + t^2)]/t dt} = c \quad (c \neq 0).$$

解 因为  $x \rightarrow 0$  时,  $ax - \sin x \rightarrow 0$ , 但  $c \neq 0$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt = 0,$$

故  $b = 0$ . 由洛必达法则, 有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x [\ln(1+t^3)]/t dt} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_0^x [\ln(1+t^3)]/t dt} \quad \left( \frac{0}{0} \right) \\ &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} (a - \cos x) / \left[ \frac{\ln(1+x^3)}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(a - \cos x)}{x^3} \quad (\text{无穷小代换}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{x^2} = c. \end{aligned}$$

因分母当  $x \rightarrow 0$  时极限为零, 故  $\lim_{x \rightarrow 0} (a - \cos x) = 0$ , 解得  $a = 1$ .

从而

$$c = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

例 5 讨论以下函数的连续性:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2(e^x - 1)}{e^x - 1}, & x > 0, \\ 2, & x = 0, \\ \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt, & x < 0. \end{cases}$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2(e^x - 1)}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2(e^x - 1)}{2(e^x - 1)} \cdot 2 = 2 = f(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt \quad \left( \frac{0}{0} \right) \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x^2 = 1 \neq 2.$$

所以,  $f(x)$  在  $x = 0$  处间断.

## 2. 求变限积分函数的导数

求变限积分函数的导数, 只需用公式

$$\frac{d}{dx} \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x).$$

其中  $f(t)$  为连续函数,  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  为可导函数.

例 6 求下列变限积分函数的导数:

$$(1) \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}};$$

$$(2) \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt;$$

$$(3) \int_{2x}^{\cos x} t \sin t^2 dt;$$

$$(4) e^{-\int_0^x e^{-t^2} dt} \int_0^x f(t) dt.$$

解 (1)  $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}.$

$$\begin{aligned} (2) \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt \\ &= -\sin x \cos(\pi \cos^2 x) - \cos x \cos(\pi \sin^2 x) \\ &= -\sin x [\cos(\pi - \pi \cos^2 x)] - \cos x \cos(\pi \sin^2 x) \\ &= (\sin x - \cos x) \cos(\pi \sin^2 x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \frac{d}{dx} \int_{2x}^{\cos x} t \sin t^2 dt \\ &= -\sin x \cdot \cos x \sin(\cos x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot \sin 4x^2 \\ &= -\frac{1}{2} [\sin 2x \sin(\cos x)^2 + 8x \sin 4x^2]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \frac{d}{dx} \left[ e^{-\int_0^x e^{-t^2} dt} \int_0^x f(t) dt \right] \\ &= e^{-\int_0^x e^{-t^2} dt} \cdot (-e^{-x^2}) \int_0^x f(t) dt + e^{-\int_0^x e^{-t^2} dt} \cdot f(x) \\ &= e^{-\int_0^x e^{-t^2} dt} \left[ f(x) - e^{-x^2} \int_0^x f(t) dt \right]. \end{aligned}$$

例 7 求下列方程确定函数的导数:

$$(1) \int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0, \text{求 } \frac{dy}{dx};$$

$$(2) \int_1^y \frac{\sin t}{t} dt + \int_{1/x}^1 e^{-t^2} dt = 0, \text{求 } \frac{dy}{dx} \Big|_{x=1}.$$

解 利用隐函数求导方法.

(1) 两边对  $x$  求导, 得

$$e^y \frac{dy}{dx} + \cos x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{e^y}.$$

(2) 两边对  $x$  求导, 得

$$\frac{\sin y}{y} \frac{dy}{dx} - e^{-1/x^2} \left( -\frac{1}{x^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2 \sin y} e^{-1/x^2}.$$

由于  $x = 1$  时,  $\int_1^y \frac{\sin t}{t} dt = 0$ , 故  $y = 1$ , 代入得

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = -\frac{1}{1 \cdot \sin 1} e^{-1} = -\frac{1}{e \sin 1}.$$

**例 8** 求下列函数的导数:

(1)  $y = y(x)$  由方程  $\sin x - \int_1^{y-x} e^{-t^2} dt$  确定, 求  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ;

(2)  $x = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ , 求  $\frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^2 x}{dy^2}$ ;

(3)  $x = \int_0^t \sin u du, y = \int_0^t \cos u du$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ ;

(4)  $x = \int_0^{t^2} \sin u^2 du, y = \cos t^4$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

**解** 题(1)、题(2) 是隐函数求导问题, 题(3)、题(4) 是参数方程求导问题.

(1) 两边对  $x$  求导, 得

$$\cos x - e^{(y-x)^2} (y' - 1) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{(y-x)^2} \cos x + 1,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\sin x e^{(y-x)^2} + 2(y-x) \left( \frac{dy}{dx} - 1 \right) e^{(y-x)^2} \cos x$$

$$= e^{(y-x)^2} [2(y-x) \cos^2 x e^{(y-x)^2} - \sin x].$$

(2) 两边对  $x$  求导, 得

$$1 = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{1+y^2},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{\sqrt{1+y^2}} \sqrt{1+y^2} = y.$$

两边对  $y$  求导, 得

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}},$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{y}{1+y^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{(1+y^2)^3}}.$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\cos t}{\sin t} = \cot t.$$

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-\sin t^4 \cdot 4t^3}{\sin t^4 \cdot 2t} = -2t^2.$$

例 9 设  $f(x)$  为定义于  $x \geq 1$  上的如下连续函数, 求  $\frac{dF}{dx}$ .

$$F(x) = \int_0^x \left( \frac{2}{t} + \ln t \right) f(t) dt.$$

解 将积分号内  $x$  移到积分号外后求导, 得

$$\frac{dF}{dx} = \left( -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} \right) \int_0^x f(t) dt + \left( \frac{2}{x} + \ln x \right) f(x).$$

例 10 设  $f(x) = \int_0^{g(x)} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$ , 求  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ , 其中

$$g(x) = \int_0^{\cos x} [1 + \sin(t^2)] dt.$$

解 因为

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{g'(x)}{\sqrt{1+g^3(x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+g^3(x)}} [1 + \sin(\cos^2 x)] (-\sin x), \end{aligned}$$

而

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^0 [1 + \sin(t^2)] dt = 0,$$

所以

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = [1 + \sin 0](-1) = -1.$$

例 11 设  $f(x) = \int_0^x \left[ \int_1^{\sin t} \sqrt{1+u^4} \right] dt$ , 求  $f''(x)$ .

解 因为, 依分部积分法, 有

$$f(x) = \left[ t \int_1^{\sin t} \sqrt{1+u^4} du \right] \Big|_0^x - \int_0^x t \sqrt{1+\sin^4 t} \cos t dt$$



$$= x \int_1^{\sin x} \sqrt{1+u^4} du - \int_0^x t \sqrt{1+\sin^4 t} \cos t dt,$$

故  $f'(x) = \int_1^{\sin x} \sqrt{1+u^4} du, \quad f''(x) = \sqrt{1+\sin^4 x} \cos x.$

例 12 设  $f(x)$  连续, 求  $\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt.$

解 因为  $\int_0^x t f(x^2 - t^2) dt \xrightarrow{u=x^2-t^2} \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du.$

所以  $\frac{d}{dx} \left[ \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt \right] = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} f(u) du = x f(x^2).$

### 3. 用变限积分函数研究函数

利用变限积分函数研究函数的性态在理论上更具备充分性, 因而反映的函数性质也更有说服力. 在利用变限积分函数研究函数时, 一定要先考察函数的可积性, 并严格应用求导或求积法则.

例 13 研究  $f(x)$  在  $x=0$  的连续性与可导性.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{\int_0^{x^2} \cos t^2 dt}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

解 因为  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{x} \xrightarrow{L'} \frac{\sin x}{1} = 0,$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \cos t^2 dt}{x} \xrightarrow{L'} \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x^4 \cdot 2x = 0,$$

所以  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ , 函数在  $x=0$  连续.

$$\text{又 } f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \cos t^2 dt}{x^2}$$

$$\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \cos x^4}{2x} = 1.$$

所以  $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ , 函数在  $x = 0$  不可导.

例 14 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续且满足如下方程, 求  $f(2)$ .

$$\int_0^{x^2(x+1)} f(t) dt = x.$$

解 方程两边对  $x$  求导, 得

$$f[x^2(1+x)] \cdot (2x + 3x^2) = 1,$$

显然, 当  $x = 1$  时,  $f[x^2(1+x)] = f(2)$ . 故

$$f(2) = \frac{1}{2x + 3x^2} \Big|_{x=1} = \frac{1}{5}.$$

例 15 对函数  $f(x)$  求  $f'(0)$ .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

解  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt}{x^3} \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

例 16 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内  $f'(x) < 0$ , 证明:

$F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt$  在  $(a, b)$  内是单调减少函数.

证 依积分中值定理,  $\exists \xi \in [a, x] \subset [a, b]$ , 使

$$\int_a^x f(t) dt = f(\xi)(x-a) \Rightarrow F(x) = f(\xi).$$

$$\begin{aligned} \text{又 } F'(x) &= -\frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x f(t) dt + \frac{1}{x-a} f(x) \\ &= \frac{1}{x-a} [f(x) - f(\xi)], \end{aligned}$$

由  $f'(x) < 0$  知  $f(x)$  单调减少,  $f(x) - f(\xi) < 0$ , 所以  $F'(x) < 0$ .

0, 故  $F(x)$  是单调减少函数.

例 17 证明: 若  $f(x)$  是周期等于  $T$  的连续函数, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

证  $\forall x > T, \exists n \in \mathbb{N}$ , 使  $nT \leq x \leq (n+1)T$ , 而  $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow n \rightarrow +\infty$ . 且知  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上有界. 设  $x = nT + u, 0 < u < T$ , 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nT + u} \int_0^{nT+u} f(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT + u} \left[ \int_0^T + \int_T^{2T} + \cdots + \int_{nT}^{nT+u} \right] f(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT + u} \left[ n \int_0^T f(t) dt + \int_{nT}^{nT+u} f(t) dt \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT + u} \left[ n \int_0^T f(t) dt + \int_0^u f(t) dt \right] \left( \int_0^u f(t) dt \text{ 有界} \right) \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \end{aligned}$$

例 18 设  $f(x)$  是以  $T$  为周期的连续函数, 证明:  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  是以  $T$  为周期函数或者是周期函数与线性函数之和.

$$\begin{aligned} \text{证 } F(x+T) &= \int_a^{x+T} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+T} f(t) dt \\ &= F(x) + \int_0^T f(t) dt = F(x) + c. \end{aligned}$$

当  $c = 0$  时,  $F(x+T) = F(x)$ , 故  $F(x)$  是以  $T$  为周期的周期函数.

当  $c \neq 0$  时, 记  $\varphi(x) = F(x) - \frac{c}{T}x$ , 则

$$\begin{aligned} \varphi(x+T) &= F(x+T) - \frac{c}{T}(x+T) = F(x+T) - c - \frac{c}{T}x \\ &= F(x) - \frac{c}{T}x = \varphi(x), \end{aligned}$$

即  $\varphi(x)$  是以  $T$  为周期的周期函数. 所以

$$F(x) = \varphi(x) + \frac{c}{T}x$$

是周期函数与线性函数之和.

例 19 设  $\varphi(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt, x \in (-1, 1)$ , 证明:

$$\varphi(x) + \varphi(-x) = \frac{1}{2}\varphi(x^2).$$

证  $[\varphi(x) + \varphi(-x)]'$

$$\begin{aligned} &= \left[ \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt \right]' + \left[ \int_0^{-x} \frac{\ln(1-t)}{t} dt \right]' \\ &= \frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x} \ln(1-x^2), \end{aligned}$$

$$\text{又 } \left[ \frac{1}{2}\varphi(x^2) \right]' = \frac{1}{2} \left[ \int_0^{x^2} \frac{\ln(1-t)}{t} dt \right]' = \frac{1}{x} \ln(1-x^2),$$

$$\text{由 } [\varphi(x) + \varphi(-x)]' = \left[ \frac{1}{2}\varphi(x^2) \right]',$$

$$\text{知 } \varphi(x) + \varphi(-x) = \frac{1}{2}\varphi(x^2) + c.$$

取  $x = 0$  代入, 得  $c = 0$ , 所以  $\varphi(x) + \varphi(-x) = \frac{1}{2}\varphi(x^2)$ .

例 20 设  $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt, x \in (0, +\infty)$ , 求  $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x)$ .

解 先求  $f\left(\frac{1}{x}\right)$ , 作代换  $u = \frac{1}{t}$ , 得

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x}\right) &= \int_1^{1/x} \frac{\ln t}{1+t} dt = \int_1^x \frac{\ln(1/u)}{1+1/u} d\frac{1}{u} = \int_1^x \frac{\ln u}{u(1+u)} du \\ &= \int_1^x \frac{\ln u}{u} du - \int_1^x \frac{\ln u}{1+u} du = \int_1^x \frac{\ln u}{u} du - f(x), \end{aligned}$$

$$\text{所以 } f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \int_1^x \frac{\ln u}{u} du = \frac{1}{2}(\ln u)^2 \Big|_1^x = \frac{1}{2}\ln^2 x.$$

例 21 设  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上可积, 且  $> 0$ , 求函数

$$F(x) = \int_1^x \left[ \left( \frac{2}{x} + \ln x \right) - \left( \frac{2}{t} + \ln t \right) \right] f(t) dt$$

的极值.

解 对  $F(x)$  求导, 得

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{2}{x} + \ln x \right) \int_1^x f(t) dt - \int_1^x \left( \frac{2}{t} + \ln t \right) f(t) dt \right] \\ &= \left( -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} \right) \int_1^x f(t) dt + \left( \frac{2}{x} + \ln x \right) f(x) \\ &\quad - \left( \frac{2}{x} + \ln x \right) f(x) \\ &= \left( -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} \right) \int_1^x f(t) dt. \end{aligned}$$

令  $F'(x) = 0$ , 由  $\int_1^x f(t) dt > 0$  知, 驻点为  $x = 2$ . 而当  $x < 2$  时,  $F'(x) < 0$ ; 当  $x > 2$  时,  $F'(x) > 0$ . 所以当  $x = 2$  时,  $F(x)$  有极小值  $F(2)$ .

例 22 证明:  $f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x e^{t^2} dt$  在  $(0, +\infty)$  内单调增加.

$$\begin{aligned} \text{证 } f'(x) &= \frac{1}{x^2} \left[ x e^{x^2} - \int_0^x e^{t^2} dt \right] = \frac{1}{x^2} \left[ \int_0^x e^{x^2} dt - \int_0^x e^{t^2} dt \right] \\ &= \frac{1}{x^2} \int_0^x (e^{x^2} - e^{t^2}) dt > 0, \end{aligned}$$

所以,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内单调增加.

例 23 设  $f(x) = \int_0^x (t - t^2) \sin^{2n} t dt, n \in \mathbb{N}$ , 证明:

$$f(x) \leq \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}, x \geq 0.$$

证 因为  $f'(x) = (x - x^2) \sin^{2n} x = x(1 - x) \sin^{2n} x$ , 则  $f'(x)$  与  $x(1 - x)$  有相同符号. 当  $x < 1$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x = 1$  时,  $f'(1) = 0$ ; 当  $x > 1$  时,  $f'(x) < 0$ . 故  $f(x)$  在  $x = 1$  处取得最大值, 所以

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(1) = \int_0^1 (t - t^2) \sin^{2n} t dt \leq \int_0^1 (t - t^2) t^{2n} dt \\ &= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}. \end{aligned}$$

例 24 设  $f(x) = \int_0^x (1-t)\ln(1+nt)dt$ , 证明: 当  $x > 0$  时,

$$f(x) \leq \frac{n}{6}.$$

证 因为  $f'(x) = (1-x)\ln(1+nx)$ , 令  $f'(x) = 0$ , 得驻点  $x = 1$ . 当  $0 < x < 1$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x > 1$  时,  $f'(x) < 0$ . 所以  $f(1)$  为最大值.

$$f(x) \leq f(1) = \int_0^1 (1-t)\ln(1+nt)dt.$$

因为  $t > 0, 0 < \ln(1+nt) \leq nt$ , 故

$$f(x) \leq f(1) \leq \int_0^1 (1-t)ntdt = \frac{n}{6}.$$

例 25  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(x) > 0$ . 设

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)}dt,$$

证明: (1)  $F'(x) \geq 2$ ; (2)  $F(x)$  在  $[a, b]$  上只有一个零点.

$$\text{证 (1) } F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} = \frac{f^2(x) + 1}{f(x)} \geq \frac{2f(x)}{f(x)} = 2.$$

(2) 因为  $F'(x) \geq 2$ , 所以  $F(x)$  是单调增加函数. 又

$$F(a) = \int_b^a \frac{1}{f(t)}dt < 0, \quad F(b) = \int_a^b f(t)dt > 0,$$

所以  $F(x)$  在  $[a, b]$  上单调增加且两端点异号, 由连续函数的零点定理,  $F(x)$  在  $[a, b]$  内有惟一的零点.

## 二、定积分的计算与证明

### 1. 定积分的计算

一般来说, 定积分的计算只要求出被积函数的一个原函数, 再应用牛顿-莱布尼茨公式即可得出结果. 求原函数的技巧已在不定积分中叙述, 对于一些特殊问题, 如根式、绝对值、分段函数、对称区间上的奇偶函数等, 是我们应该重视的.

先用牛顿-莱布尼茨公式计算定积分.

例 26 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx; \quad (2) \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx.$$

解 由于  $\int_{-R}^R \sqrt{R^2-x^2} dx$  的几何意义是以原点为圆心、 $R$  为半径的上半圆的面积, 所以

$$\int_{-R}^R \sqrt{R^2-x^2} dx = \frac{1}{2}\pi R^2, \quad \int_0^R \sqrt{R^2-x^2} dx = \frac{1}{4}\pi R^2.$$

由此可以得出:

$$(1) \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx = \frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2 = \frac{\pi}{2}.$$

$$(2) \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2} d(x-1) \\ = \frac{1}{4}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

例 27 计算下列积分:

$$(1) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^2 x} dx; \quad (2) \int_{-1/2}^{1/2} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(3) \int_{1/2}^{1/2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \arcsin \sqrt{1-x^2} dx;$$

$$(4) \int_{-a}^a [(x+e^{\cos x})f(x) + (x-e^{\cos x})f(-x)] dx, f(x) \text{ 连续}.$$

解 由于积分区间是对称区间, 因此可以利用对称区间上奇偶函数的积分性质.

(1) 被积函数是偶函数, 故

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x} \sin x dx \\ = -2 \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{1/2} d\cos x = -\frac{4}{3} (\cos x)^{3/2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3}.$$

(2) 被积函数是偶函数, 故

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \int_0^{1/2} (\arcsin x)^2 d\arcsin x \\ = 2 \cdot \left[ \frac{1}{3} (\arcsin x)^3 \right]_0^{1/2} = \frac{2}{3} \left( \frac{\pi}{6} \right)^3 = \frac{\pi^3}{324}.$$

(3) 因为  $\ln \frac{1-x}{1+x}$  是奇函数, 而  $\arcsin \sqrt{1-x^2}$  是偶函数, 所以被积函数是奇函数. 故

$$\int_{-1/2}^{1/2} \ln \frac{1-x}{1+x} \arcsin \sqrt{1-x^2} dx = 0.$$

$$(4) \text{ 因为 } (x + e^{\cos x})f(x) + (x - e^{\cos x})f(-x) \\ = x[f(x) + f(-x)] + e^{\cos x}[f(x) - f(-x)],$$

而  $f(x) + f(-x)$  是偶函数,  $f(x) - f(-x)$  是奇函数,  $x$  是奇函数,  $e^{\cos x}$  是偶函数, 所以被积函数是奇函数, 故

$$\int_{-a}^a [(x + e^{\cos x})f(x) + (x - e^{\cos x})f(-x)] dx = 0.$$

例 28 计算下列积分:

$$(1) \int_0^2 \frac{x}{e^x + e^{2-x}} dx; \quad (2) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^x}{1 + e^x} \sin^4 x dx.$$

解 当不能直接求出原函数时, 可采用分段积分, 设法消去不易积出部分.

$$(1) I = \int_0^2 = \int_0^1 + \int_1^2 = I_1 + I_2, \\ I_2 = \int_1^2 \frac{x-2}{e^x + e^{2-x}} dx + \int_1^2 \frac{2}{e^x + e^{2-x}} dx \\ \xrightarrow{x-2=t} \int_1^0 \frac{t}{e^{2-t} + e^t} dt + \int_1^2 \frac{2}{e^x + e^{2-x}} dx \\ = - \int_0^1 \frac{x}{e^x + e^{2-x}} dx + \int_1^2 \frac{2}{e^x + e^{2-x}} dx \\ = -I_1 + 2 \int_1^2 \frac{e^x dx}{e^{2x} + e^2} = -I_1 + 2 \int_1^2 \frac{de^x}{e^{2x} + e^2} \\ = -I_1 + \frac{2}{e} \left( \arctan e - \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\text{所以 } I = I_1 - I_1 + \frac{2}{e} \left( \arctan e - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{2}{e} \left( \arctan e - \frac{\pi}{4} \right).$$

$$(2) I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^x + 1 - 1}{1 + e^x} \sin^4 x dx$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4 x dx - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{1+e^x} dx, \\
\text{而} \quad &\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{1+e^x} dx \xrightarrow{x=-t} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{\sin^4 t}{1+e^{-t}} dt \quad (\text{同乘以 } e^t) \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^t}{1+e^t} \sin^4 t dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^x}{1+e^x} \sin^4 x dx,
\end{aligned}$$

代回,移项除以 2,得

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4 x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx = \frac{3}{16} \pi.$$

例 29 计算下列积分:

$$(1) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^4 \theta d\theta; \quad (2) \int_0^{N\pi} \sqrt{1-\sin 2x} dx, N \in \mathbb{N}.$$

解 对于周期函数(周期为  $T$ ),有以下积分性质:

$$\int_0^T f(x) dx = \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx,$$

$$\int_0^{nT} f(x) dx = n \int_0^T f(x) dx,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0,$$

$$\int_0^{\pi} \cos x dx = \int_{\pi}^{2\pi} \cos x dx = 0.$$

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^4 \theta d\theta = 8 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta)^2 d\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi/2} (1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi/2} \left[ 1 + 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta) \right] d\theta \\
&= 3 \cdot \frac{\pi}{2} + 4 \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta + \int_0^{\pi/2} \cos 4\theta d\theta.
\end{aligned}$$

其中  $\cos 2\theta$  的周期  $T = \pi$ ,  $\cos 4\theta$  的周期  $T = \pi/2$ , 依上面公式,

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta = 0, \quad \int_0^{\pi/2} \cos 4\theta d\theta = 0, \text{ 故}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^4 \theta d\theta = \frac{3}{2} \pi.$$

(2)  $\int_0^{N\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx$  中  $\sin 2x$  周期  $T = \pi$ , 故

$$\begin{aligned} I &= N \int_0^{\pi} \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} dx \\ &= N \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + N \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx \\ &= 2\sqrt{2}N. \end{aligned}$$

例 30 计算下列积分:

$$\begin{aligned} (1) & \int_1^2 \frac{x}{x^2 + x + 1} dx; & (2) & \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2(1+x^2)}; \\ (3) & \int_0^1 e^{-2x^2 + \ln x} dx; & (4) & \int_0^1 \frac{dx}{e^x - 16e^{-x}}. \end{aligned}$$

解 (1)  $\int_1^2 \frac{x dx}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2x + 1 - 1}{x^2 + x + 1} dx$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{d(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{d(x + 1/2)}{(x + 1/2)^2 + 3/4} \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2 + x + 1| \Big|_1^2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{7}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \arctan \frac{5}{\sqrt{3}} - \arctan \sqrt{3} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2(1+x^2)} &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)} dx \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2} dx - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= -\frac{1}{x} \Big|_1^{\sqrt{3}} - \arctan x \Big|_1^{\sqrt{3}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int_0^1 e^{-2x^2 + \ln x} dx &= \int_0^1 e^{-2x^2} x dx = -\frac{1}{4} \int_0^1 e^{-2x^2} d(-2x^2) \\ &= -\frac{1}{4} e^{-2x^2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{e^2} - 1 \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int_0^1 \frac{dx}{e^x - 16e^{-x}} &= \int_0^1 \frac{e^x}{(e^x)^2 - 16} dx = \int_0^1 \frac{de^x}{(e^x - 4)(e^x + 4)} \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 \left( \frac{1}{e^x - 4} - \frac{1}{e^x + 4} \right) de^x = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{e^x - 4}{e^x + 4} \right| \Big|_0^1 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8} \left( \ln \left| \frac{e-4}{e+4} \right| - \ln \frac{3}{5} \right).$$

例 31 计算下列积分:

$$(1) \int_{-2}^5 |x^2 - 2x - 3| dx;$$

$$(2) \int_0^1 t |t - x| dt;$$

$$(3) \int_{-4}^4 |x| \sqrt{16 - x^2} dx;$$

$$(4) \int_{-1}^1 |e^{2x} - e^x| dx;$$

$$(5) \int_0^\pi \sqrt{\sin^3 \theta - \sin^5 \theta} dx;$$

$$(6) \int_a^b |2x - a - b| dx.$$

解 由于被积函数含有(或隐含)绝对值记号,因此要根据被积函数在部分区间上的正负,分区间求积.

(1) 因为 $(-2, -1)$ 和 $(3, 5)$ 上被积函数大于零,在 $(-1, 3)$ 上被积函数小于零,所以

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{-1} (x^2 - 2x - 3) dx - \int_{-1}^3 (x^2 - 2x - 3) dx \\ &\quad + \int_3^5 (x^2 - 2x - 3) dx \\ &= \left( \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right) \Big|_{-2}^{-1} - \left( \frac{x^3}{3} - x^2 - 2x \right) \Big|_{-1}^3 \\ &\quad + \left( \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right) \Big|_3^5 = \frac{71}{3}. \end{aligned}$$

(2) 当 $x < 0$ 时,有

$$\int_0^1 t |t - x| dt = \int_0^1 t(t - x) dt = \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{x}{2};$$

当 $x > 1$ 时,有

$$\int_0^1 t |t - x| dt = \int_0^1 t(x - t) dt = \left( \frac{t^2}{2} x - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{x}{2} - \frac{1}{3};$$

当 $0 < x < 1$ 时,有

$$\begin{aligned} \int_0^1 t |t - x| dt &= \int_0^x t(x - t) dt + \int_x^1 t(t - x) dt \\ &= \left( \frac{t^2}{2} x - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^x + \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} x \right) \Big|_x^1 = \frac{x^3}{3} - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$(3) \int_{-4}^4 |x| \sqrt{16 - x^2} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-4}^0 -x \sqrt{16-x^2} dx + \int_0^4 x \sqrt{16-x^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-4}^0 (16-x^2)^{1/2} d(16-x^2) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^4 (16-x^2)^{1/2} d(16-x^2) \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3} (16-x^2)^{3/2} \right] \Big|_{-4}^0 - \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3} (16-x^2)^{3/2} \right] \Big|_0^4 \\
&= \frac{1}{3} (64 + 64) = \frac{128}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) \quad \int_{-1}^1 |e^{2x} - e^x| dx &= \int_{-1}^0 (e^x - e^{2x}) dx + \int_0^1 (e^{2x} - e^x) dx \\
&= \left( e^x - \frac{1}{2} e^{2x} \right) \Big|_{-1}^0 + \left( \frac{1}{2} e^{2x} - e^x \right) \Big|_0^1 \\
&= e + \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{e} - 3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(5) \quad \int_0^\pi \sqrt{\sin^3 \theta - \sin^5 \theta} d\theta &= \int_0^\pi |\cos \theta| (\sin \theta)^{3/2} d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos \theta (\sin \theta)^{3/2} d\theta + \int_{\pi/2}^\pi (-\cos \theta) (\sin \theta)^{3/2} d\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{3/2} d\sin \theta = 2 \cdot \frac{2}{5} (\sin \theta)^{5/2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(6) \quad \text{记 } f(x) &= |2x - a - b| = 2 \left| x - \frac{a+b}{2} \right|, \text{ 则} \\
f\left(\frac{a+b}{2} - x\right) &= 2|-x| = 2|x| = f\left(\frac{a+b}{2} + x\right),
\end{aligned}$$

故  $f(x)$  关于直线  $x = \frac{a+b}{2}$  对称, 有

$$\begin{aligned}
\int_a^b |2x - a - b| &= 2 \int_{(a+b)/2}^b 2 \left| x - \frac{a+b}{2} \right| dx \\
&= 4 \int_{(a+b)/2}^b \left( x - \frac{a+b}{2} \right) dx = \frac{(b-a)^2}{2}.
\end{aligned}$$

**例 32** 计算下列积分:

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0, \\ 1+x^2, & x < 0, \end{cases} \quad \text{求 } \int_{-1}^2 f(2x-1) dx;$$

$$(2) \max\{x, x^2\} = \begin{cases} x^2, & -2 \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1, \\ x^2, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases} \quad \text{求} \int_{-2}^2 \max\{x, x^2\} dx;$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x \geq 0, \\ \frac{1}{1+e^x}, & x < 0, \end{cases} \quad \text{求} \int_0^2 f(x-1) dx;$$

$$(4) f(x) = x, x \geq 0, \quad g(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2, \end{cases}$$

求  $\int_0^x f(t)g(x-t)dt$  ( $x \geq 0$ ).

解 分段函数的积分要分段计算. 对于函数中变量的代换, 要注意准确性.

$$(1) f(2x-1) = \begin{cases} e^{-2x+1}, & x \geq 1/2, \\ 1 + (2x-1)^2, & x < 1/2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 f(2x-1) dx &= \int_{-1}^{1/2} [1 + (2x-1)^2] dx + \int_{1/2}^2 e^{1-2x} dx \\ &= \left[ x + \frac{1}{6}(2x-1)^3 \right] \Big|_{-1}^{1/2} - \frac{1}{2} e^{1-2x} \Big|_{1/2}^2 = \frac{1}{2}(13 - e^{-3}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int_{-2}^2 \max\{x, x^2\} dx &= \int_{-2}^0 x^2 dx + \int_0^1 x dx + \int_1^2 x^2 dx \\ &= \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{11}{2}. \end{aligned}$$

$$(3) f(x-1) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \geq 1, \\ \frac{1}{1+e^{x-1}}, & x < 1. \end{cases}$$

$$\int_0^2 f(x-1) dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_0^1 \frac{dx}{1+e^{x-1}}$$

$$= \ln|x| \Big|_1^2 + \int_0^1 \frac{e^{1-x}}{1+e^{1-x}} dx = \ln 2 - \int_0^1 \frac{d(e^{1-x} + 1)}{e^{1-x} + 1}$$

$$= \ln 2 - \ln|e^{1-x} + 1| \Big|_0^1 = \ln(e+1).$$

(4) 设  $u = x - t$ , 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^x f(t)g(x-t)dt = - \int_x^0 f(x-u)g(u)du \\ &= \int_0^x f(x-t)g(t)dt. \end{aligned}$$

因为  $f(x-t) = x-t, x \geq t, g(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t \leq \pi/2, \\ 0, & t > \pi/2, \end{cases}$

$$\text{故 } I = \begin{cases} \int_0^x (x-t)\sin t dt = x - \sin x, & 0 \leq x \leq \pi/2, \\ \int_0^{\pi/2} (x-t)\sin t dt = x - 1, & x > \pi/2. \end{cases}$$

## 2. 用换元法计算与证明定积分

换元法计算定积分的关键是第二换元法的换元积分公式中“换元必须换限”，必须准确实现。

例 33 计算下列积分：

$$\begin{aligned} (1) & \int_1^3 \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx; & (2) & \int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}; \\ (3) & \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}; & (4) & \int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) & \int_1^3 \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \int_1^3 \frac{\arctan \sqrt{x} \cdot 2d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} \\ &= 2 \int_1^3 \arctan \sqrt{x} d\arctan \sqrt{x} = (\arctan \sqrt{x})^2 \Big|_1^3 \\ &= (\arctan \sqrt{3})^2 - (\arctan 1)^2 = \frac{7}{144} \pi^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & \int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})} = \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}(1+\sqrt{x})} \\ &= \int_1^4 \frac{2d\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = 2 \int_1^4 \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{1+\sqrt{x}} \right) d\sqrt{x} \\ &= 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right| \Big|_1^4 = 2 \left( \ln \frac{2}{3} - \ln \frac{1}{2} \right) = 2 \ln \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$(3) \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx = \int_0^1 \frac{e^{-x} dx}{1+e^{-x}} = - \int_0^1 \frac{d(1+e^{-x})}{1+e^{-x}} \\ = - \ln|1+e^{-x}| \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln\left(1+\frac{1}{e}\right).$$

$$(4) \int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = - \int_{1/\pi}^{2/\pi} \sin \frac{1}{x} d \frac{1}{x} = \int_{1/\pi}^{2/\pi} d \cos \frac{1}{x} \\ = \cos \frac{1}{x} \Big|_{1/\pi}^{2/\pi} = 1.$$

例 34 计算下列积分:

$$(1) \int_0^1 x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx; \quad (2) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx;$$

$$(3) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}; \quad (4) \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}.$$

解 本例用第二换元法的三角代换求解.

$$(1) \int_0^1 x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \int_0^1 \frac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ \xrightarrow{x=\sin t} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t(1-\sin t)}{\cos t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} (\sin t - \sin^2 t) dt \\ = (-\cos t) \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{4} \\ \text{(利用 } \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \text{ 的瓦里士公式).}$$

$$(2) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx \xrightarrow{x=asint} \int_0^{\pi/2} a^2 \sin^2 t a^2 \cos^2 t dt \\ = \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \frac{a^4}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt \\ = \frac{a^4}{8} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{a^4}{8} \cdot \frac{1}{4} \sin 4t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

$$(3) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}} \xrightarrow{x=\tan t} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec^2 t}{\tan t \cdot \sec t} dt \\ = \int_{\pi/4}^{\pi/3} (\sin t)^{-1} d \sin t = -(\sin t)^{-1} \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} \\ = \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$(4) \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} \xrightarrow{x = \sec t} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec t \cdot \tan t}{\sec t \cdot \tan t} dt = t \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\pi}{12}.$$

例 35 计算下列积分:

$$(1) \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}};$$

$$(2) \int_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}-1};$$

$$(3) \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx;$$

$$(4) \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 - e^{-2x}} dx.$$

解 (1)  $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}} \xrightarrow{\sqrt{5-4x}=t} \int_3^1 \frac{(5-t^2)(-t/2)}{4t} dt$

$$= \int_1^3 \frac{1}{8} (5-t^2) dt = \left( \frac{5}{8}t - \frac{1}{24}t^3 \right) \Big|_1^3 = \frac{1}{6}.$$

$$(2) \int_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}-1} \xrightarrow{\sqrt{1-x}=t} \int_{1/2}^0 \frac{-2t}{t-1} dt$$

$$= 2 \int_0^{1/2} \frac{t+1-1}{t-1} dt = 2[t - \ln(t-1)] \Big|_0^{1/2} = 1 - 2\ln 2.$$

$$(3) \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx \xrightarrow{\sqrt{e^x - 1}=t} \int_0^2 \frac{(1+t^2)t}{t^2+4} \cdot \frac{2t dt}{1+t^2}$$

$$= \int_0^2 \frac{2t^2}{t^2+4} dt = 2 \int_0^2 \left( 1 - \frac{4}{t^2+4} \right) dt$$

$$= \left[ 2t - 4 \arctan \frac{t}{2} \right] \Big|_0^2 = 4 - \pi.$$

$$(4) \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 - e^{-2x}} dx \xrightarrow{e^{-x} = \sin t} \int_{\pi/2}^{\pi/6} \cos t \left( -\frac{\cos t}{\sin t} \right) dt$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1 - \sin^2 t}{\sin t} dt = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin t} - \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin t dt$$

$$= \ln |\csc t - \cot t| \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} + \cos t \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

例 36 计算下列积分:

$$(1) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx;$$

$$(2) \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} dx;$$

$$(3) \int_0^{\pi/2} \frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x} + e^{\cos x}} dx;$$



$$(4) \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx.$$

解 (1) 令  $x = \tan t, dx = \sec^2 t dt$ , 则

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(1+\tan t)}{1+\tan^2 t} \cdot \sec^2 t dt$$

$$= \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan t) dt \stackrel{t = \frac{\pi}{4} - u}{=} \int_{\pi/4}^0 \ln \left[ 1 + \tan \left( \frac{\pi}{4} - u \right) \right] du$$

$$= \int_0^{\pi/4} \ln \left[ 1 + \frac{1 - \tan u}{1 + \tan u} \right] du = \int_0^{\pi/4} \ln \frac{2}{1 + \tan u} du$$

$$= \int_0^{\pi/4} \ln 2 du - \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan u) du = \frac{\pi}{2} \ln 2 - \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan t) dt.$$

出现循环, 移项得

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{1+x^2} dx = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan t) dt = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

(2) 令  $\arctan x = \frac{\pi}{4} - \arctan t$ , 由  $\arctan x + \arctan t = \frac{\pi}{4}$ , 得  $\tan(\arctan x - \arctan t) = 1$ ,

$$\text{故 } \frac{x+t}{1+xt} = 1 \Rightarrow x = \frac{1-t}{1+t}, \quad dx = \frac{-2}{(1+t)^2} dt.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} dx &= - \int_1^0 \frac{\pi/4 - \arctan t}{1 + (1-t)/(1+t)} \cdot \frac{2dt}{(1+t)^2} \\ &= \int_0^1 \frac{\pi/4 - \arctan t}{2/(1+t)} \cdot \frac{2dt}{(1+t)^2} = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} dx. \end{aligned}$$

移项得

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} dx = \frac{\pi}{8} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

$$\begin{aligned} (3) \int_0^{\pi/2} \frac{e^{\sin x}}{e^{\cos x} + e^{\sin x}} dx &\stackrel{x = \pi/2 - t}{=} \int_{\pi/2}^0 \frac{e^{\cos t}}{e^{\cos t} + e^{\sin t}} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{e^{\cos x}}{e^{\cos x} + e^{\sin x}} dx. \end{aligned}$$

移项得 
$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{\sin x} + e^{\cos x}}{e^{\sin x} + e^{\cos x}} dx = \frac{\pi}{2},$$

故 
$$\int_0^{\pi/2} \frac{e^{\sin x}}{e^{\cos x} + e^{\sin x}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

(4) 
$$\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)} dx}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} \\ \xrightarrow{9-x=t+3} \int_4^2 \frac{\sqrt{\ln(t+3)} dt}{\sqrt{\ln(t+3)} + \sqrt{\ln(9-t)}} \\ = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(x+3)} dx}{\sqrt{\ln(x+3)} + \sqrt{\ln(9-x)}}.$$

移项得 
$$2I = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx = 2,$$

故 
$$\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)} dx}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} = 1.$$

题(3)、题(4)两积分式的特点是,被积函数分母有两项,分子是分母中的一项.采用变换时,要善于设计,使分子变为分母中的另一项,而分母不变;积分限不变或上、下限互换.

对三角函数有理式与其它初等函数组合或复合成的被积函数,进行代换时注意到:

- (1) 积分区间对称时,可取  $x = -t$ ;
- (2) 积分区间为  $[0, \pi]$  时,可取  $x = \pi - t$ ;
- (3) 积分区间为  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  时,可取  $x = \frac{\pi}{2} - t$ ;
- (4) 积分区间为  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  时,可取  $x = \frac{\pi}{4} - t$ .

这样,原积分分解成若干可抵消或容易积分的积分.例题如下.

**例 37** 计算下列积分:

(1)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{10} x - \cos^{10} x}{4 - \sin x - \cos x} dx;$  (2)  $\int_0^{\pi} \frac{x \sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx.$

解 (1) 令  $x = \frac{\pi}{2} - t, dx = -dt$ , 则

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{10}x - \cos^{10}x}{4 - \sin x - \cos x} dx \\ &= \int_{\pi/2}^0 \frac{\cos^{10}t - \sin^{10}t}{4 - \cos t - \sin t} d(-t) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{10}x - \sin^{10}x}{4 - \cos x - \sin x} dx. \end{aligned}$$

移项得  $2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{10}x - \cos^{10}x + \cos^{10}x - \sin^{10}x}{4 - \cos x - \sin x} dx = 0,$

故  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{10}x - \cos^{10}x}{4 - \sin x - \cos x} dx = 0.$

$$\begin{aligned} (2) \int_0^{\pi} \frac{x \sin^3 t}{1 + \cos^2 t} dx & \xrightarrow{x = \pi - t} \int_{\pi}^0 \frac{(\pi - t) \sin^3 t}{1 + \cos^2 t} (-dt) \\ &= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x dx}{1 + \cos^2 x} - \int_0^{\pi} \frac{x \sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx. \end{aligned}$$

移项得  $2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x dx}{1 + \cos^2 x} = -\pi \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} d\cos x$

$$= -\pi \int_0^{\pi} \frac{2 - (1 + \cos^2 x)}{1 + \cos^2 x} d\cos x$$

$$= -2\pi \arctan(\cos x) \Big|_0^{\pi} + \pi \cos x \Big|_0^{\pi} = \pi^2 - 2\pi,$$

故  $\int_0^{\pi} \frac{x \sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{1}{2}(\pi^2 - 2\pi).$

**例 38** 证明:若  $f(x)$  为连续的奇函数,则  $\int_0^x f(t)dt$  是偶函数;  
若  $f(x)$  为连续的偶函数,则  $\int_0^x f(t)dt$  是奇函数.

**证** 设  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ , 于是

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt \xrightarrow{t = -u} \int_0^x f(-u)dx = -\int_0^x f(-t)dt.$$

(1) 当  $f(-t) = -f(t)$  即  $f(t)$  为奇函数时,有

$$F(-x) = -\int_0^x [-f(t)]dt = \int_0^x f(t)dt = F(x),$$

知  $F(x)$  是偶函数.

(2) 当  $f(-t) = f(t)$ , 即  $f(t)$  为偶数函数时,有

$$F(-x) = -\int_0^x f(t)dt = -F(x),$$

知  $F(x)$  是奇函数.

**例 39** 设函数  $f(x), g(x)$  在  $[-a, a]$  上连续,  $g(x)$  为偶函数, 且  $f(x) + f(-x) \equiv A$  (常数), 证明:

$$\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = A \int_0^a g(x)dx.$$

并计算  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x| \arctan e^x dx.$

**证**  $\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)g(x)dx + \int_0^a f(x)g(x)dx,$   
在等式右边第一式中令  $t = -x$ , 有

$$\int_{-a}^0 f(x)g(x)dx = \int_a^0 f(-t)g(-t)d(-t) = \int_0^a f(-x)g(x)dx,$$

$$\begin{aligned} \text{则 } I &= \int_0^a f(-x)g(x)dx + \int_0^a f(x)g(x)dx \\ &= \int_0^a [f(-x) + f(x)]g(x)dx = A \int_0^a g(x)dx. \end{aligned}$$

利用上式, 令  $f(x) = \arctan e^x$ , 则

$$f(x) + f(-x) = \arctan e^x + \arctan e^{-x} \equiv \frac{\pi}{2},$$

$g(x) = |\sin x|$  是偶函数, 故

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x| \arctan e^x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2}.$$

这里若令  $F(x) = \arctan e^x + \arctan e^{-x}$ , 可证  $F'(x) \equiv 0$ , 故

$$F(x) \equiv F(0) = \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{2}.$$

**例 40** 证明:

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx.$$

并计算  $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$

$$\begin{aligned} \text{证 } \int_0^\pi x f(\sin x) dx &\stackrel{x = \pi - t}{=} \int_\pi^0 (\pi - t) f[\sin(\pi - t)] (-dt) \\ &= \int_0^\pi (\pi - t) f(\sin t) dt \end{aligned}$$

$$= \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx - \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx,$$

移项得  $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$

$$\text{又 } \int_0^{\pi} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin x) dx,$$

在等式右边第二式中令  $t = \pi - x$ , 有

$$\int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin x) dx = - \int_{\pi/2}^0 f(\sin t) dt = \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx,$$

故  $\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx,$

从而  $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx.$

在  $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$  中令  $f(\sin x) = \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$ , 有

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx &= - \pi \int_0^{\pi/2} \frac{d \cos x}{1 + \cos^2 x} = \pi \arctan(\cos x) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \pi \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

**例 41** 证明:

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx,$$

并计算  $\int_0^{\pi} \ln \sin x dx.$

证  $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx \xrightarrow{t = \frac{\pi}{2} - x} \int_{\pi/2}^0 f(\cos t) (-dt)$   
 $= \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx,$

又由上例知  $\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$ , 故

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

而  $\int_0^{\pi} \ln \sin x dx = 2 \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi/2} \ln \frac{\sin 2x}{2} dx \stackrel{2x=t}{=} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \ln \sin t dt - \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \ln 2 dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin x dx - \frac{\pi}{2} \ln 2,
\end{aligned}$$

移项得  $\int_0^{\pi} \ln \sin x dx = -\pi \ln 2.$

同时得  $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$

例 42 利用  $\int_0^{\pi/2} f(\cos x, \sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x, \cos x) dx$ , 计算下列积分:

(1)  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\tan x)^a}$ ; (2)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{1 + 3 \sin x \cos x} dx.$

解  $\int_0^{\pi/2} f(\cos x, \sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x, \cos x) dx$  是显然的.

(1)  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\tan x)^a} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\cot x)^a}$ , 于是

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\tan x)^a} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{1}{1 + (\tan x)^a} + \frac{1}{1 + (\cot x)^a} \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + (\tan x)^a}{1 + (\tan x)^a} dx = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

(2)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{1 + 3 \sin x \cos x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{1 + 3 \sin x \cos x} dx$ , 于是

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{1 + 3 \sin x \cos x} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x - \cos^4 x + \cos^4 x - \sin^4 x}{1 + 3 \sin x \cos x} dx = 0.
\end{aligned}$$

例 43 计算  $I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx$ , 并证明:

$$1 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

证 将  $(1 - x^2)^n$  展开, 即

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 [1 + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^4 - C_n^3 x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n}] dx \\
&= 1 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad \int_0^1 (1-x^2)^n dx &\stackrel{x=\sin t}{=} \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 t)^n \cos t dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t dt \quad (\text{瓦里士公式}) = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}. \end{aligned}$$

$$\text{即证 } 1 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

例 44 证明:  $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx > 0$ .

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx &\stackrel{x^2=u}{=} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du \\ &\stackrel{t=u-\pi}{=} \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du - \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t+\pi}} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+\pi}} \right) \sin u du. \end{aligned}$$

$$\text{显然} \quad \left( \frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+\pi}} \right) \sin u > 0 \quad (0 < u < \pi),$$

$$\text{于是} \quad \int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx > 0.$$

例 45 证明下列等式:

$$(1) \int_a^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{1/a} \frac{dx}{1+x^2} \quad (a > 0);$$

$$(2) \int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 f[a+(b-a)x] dx;$$

$$(3) \int_0^1 \ln f(x+t) dt = \int_0^x \ln \frac{f(1+t)}{f(t)} dt + \int_0^1 \ln f(t) dt;$$

$$(4) \int_0^{2\pi} f(|\cos x|) dx = 4 \int_0^{\pi/2} f(|\cos x|) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad (1) \int_a^1 \frac{dx}{1+x^2} &\stackrel{t=1/x}{=} \int_{1/a}^1 \frac{1}{1+(1/t)^2} \left( -\frac{dt}{t^2} \right) \\ &= \int_1^{1/a} \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{1/a} \frac{dx}{1+x^2}. \end{aligned}$$

$$(2) \int_a^b f(x) dx \stackrel{x=a+(b-a)t}{=} \int_0^1 f[a+(b-a)t] (b-a) dt$$

$$= (b-a) \int_0^1 f[a + (b-a)x] dx.$$

$$(3) \int_0^1 \ln f(x+t) dt \stackrel{x+t=u}{=} \int_x^{x+1} \ln f(u) du$$

$$= \int_x^1 \ln f(u) du + \int_0^1 \ln f(u) du + \int_1^{x+1} \ln f(u) du,$$

而  $\int_1^{x+1} \ln f(u) dt \stackrel{u=t+1}{=} \int_0^x \ln f(t+1) dt,$

故  $\int_0^1 \ln f(x+t) dt = \int_0^x \ln \frac{f(t+1)}{f(t)} dt + \int_0^1 \ln f(t) dt.$

$$(4) \int_0^{2\pi} f(|\cos x|) dx = \int_0^\pi f(|\cos x|) dx + \int_\pi^{2\pi} f(|\cos x|) dx,$$

而  $\int_\pi^{2\pi} f(|\cos x|) dx \stackrel{x=\pi+t}{=} \int_0^\pi f(|\cos(t+\pi)|) dt$

$$= \int_0^\pi f(|\cos x|) dx,$$

又  $\int_0^\pi f(|\cos x|) dx = \int_0^{\pi/2} f(|\cos x|) dx + \int_{\pi/2}^\pi f(|\cos x|) dx,$

其中  $\int_{\pi/2}^\pi f(|\cos x|) dx \stackrel{x=\pi-u}{=} \int_{\pi/2}^0 f(|\cos u|) d(-u)$

$$= \int_0^{\pi/2} f(|\cos x|) dx.$$

故  $\int_0^{2\pi} f(|\cos x|) dx = 4 \int_0^{\pi/2} f(|\cos x|) dx.$

**例 46** 证明下列等式:

$$(1) \int_0^a x \{ f[\varphi(x)] + f[\varphi(a-x)] \} dx = a \int_0^a f[\varphi(a-x)] dx;$$

$$(2) \int_1^a f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{dx}{x} = \int_1^a f\left(x + \frac{a^2}{x}\right) \frac{dx}{x}.$$

**证** (1) 原式等价于

$$\int_0^a x f[\varphi(x)] dx = \int_0^a (a-x) f[\varphi(a-x)] dx,$$

故  $\int_0^a x f[\varphi(x)] dx \stackrel{x=a-t}{=} \int_a^0 (a-t) f[\varphi(a-t)] dt$

$$= a \int_0^a f[\varphi(a-t)] dt - \int_0^a f t [\varphi(a-t)] dt$$



$$= a \int_0^u f[\varphi(a-x)] dx - \int_0^u x f[\varphi(a-x)] dx,$$

移项即得所证等式.

$$\begin{aligned} (2) \int_1^u f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{dx}{x} & \stackrel{x=\sqrt{t}}{=} \int_1^{u^2} f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{dt}{2t} \\ & = \frac{1}{2} \int_1^{u^2} f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \int_a^{u^2} f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

在上式右边第二个积分中令  $u = \frac{a^2}{t}$ , 有

$$\int_a^{u^2} f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{dt}{t} = - \int_a^1 f\left(u + \frac{a^2}{u}\right) \frac{du}{u} = \int_1^u f\left(u + \frac{a^2}{u}\right) \frac{du}{u},$$

故 
$$\int_1^u f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{dx}{x} = \int_1^u f\left(x + \frac{a^2}{x}\right) \frac{dx}{x}.$$

### 3. 用分部积分法计算与证明定积分

例 47 计算下列积分:

$$(1) \int_0^\pi x e^{\sin x} |\cos x| dx; \quad (2) \int_{-1}^1 |x-a| e^x dx, |a| \leq 1.$$

解 (1) 
$$\begin{aligned} \int_0^\pi x e^{\sin x} |\cos x| dx &= \int_0^{\pi/2} x e^{\sin x} dx - \int_{\pi/2}^\pi x e^{\sin x} dx \\ &= x e^{\sin x} \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^{\sin x} dx - x e^{\sin x} \Big|_{\pi/2}^\pi + \int_{\pi/2}^\pi e^{\sin x} dx \\ &= \pi e - 1 - \int_0^{\pi/2} e^{\sin x} dx + \int_{\pi/2}^\pi e^{\sin x} dx. \end{aligned}$$

由 
$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{\sin x} dx,$$

知 
$$\int_0^\pi x e^{\sin x} |\cos x| dx = \pi e - 1.$$

$$\begin{aligned} (2) \int_{-1}^1 |x-a| e^x dx &= \int_{-1}^a (a-x) e^x dx + \int_a^1 (x-a) e^x dx \\ &= (a-x) e^x \Big|_{-1}^a + \int_{-1}^a e^x dx + (x-a) e^x \Big|_a^1 - \int_a^1 e^x dx \\ &= (a-x+1) e^x \Big|_{-1}^a + (x-a-1) e^x \Big|_a^1 \\ &= 2e^a - \left(e + \frac{1}{e}\right) a - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

例 48 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{\pi/4} \frac{x \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2} dx; \quad (2) \int_0^{\pi/4} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx.$$

解 分部积分法经常要与换元积分法结合起来使用.

$$\begin{aligned} (1) \int_0^{\pi/4} \frac{x \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2} dx &= \int_0^{\pi/4} \frac{x}{(1 + \tan x)^2} d(\tan x + 1) \\ &= \int_0^{\pi/4} x d\left(-\frac{1}{1 + \tan x}\right) \\ &= -\frac{x}{1 + \tan x} \Big|_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \frac{x}{(1 + \tan x)^2} dx \\ &= -\frac{\pi}{8} + \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 + \tan x} \\ &= \underline{\underline{x = \pi/4 - t}} -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (1 + \tan t) dt \\ &= -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} [t - \ln |\cos t|] \Big|_0^{\pi/4} = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \ln 2 \\ &= \frac{1}{4} \ln 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int_0^{\pi/4} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx &= \int_0^{\pi/4} x \tan x d \tan x = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} x d \tan^2 x \\ &= \frac{1}{2} x \tan^2 x \Big|_0^{\pi/4} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - 1) dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} [\tan x - x] \Big|_0^{\pi/4} \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

例 49 计算下列积分:

$$(1) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx; \quad (2) \int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx &= \int_0^1 \ln(1+x) d \frac{1}{2-x} \\ &= \frac{\ln(1+x)}{2-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{(2-x)} \frac{dx}{(1+x)} \\ &= \ln 2 + \frac{1}{3} \int_0^1 \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ln 2 + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| \Big|_0^1 \\
&= \ln 2 + \frac{1}{3} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \ln 2 = \frac{1}{3} \ln 2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \int_0^\pi (x \sin x)^2 dx &= \int_0^\pi x^2 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\
&= \int_0^\pi \frac{x^2}{2} dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi x^2 \cos 2x dx = \frac{x^3}{6} \Big|_0^\pi - \frac{1}{4} \int_0^\pi x^2 d\sin 2x \\
&= \frac{\pi^3}{6} - \frac{x^2}{4} \sin 2x \Big|_0^\pi - \frac{1}{4} \int_0^\pi 2x \sin 2x dx \\
&= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4} \int_0^\pi x d\cos 2x = \frac{\pi^3}{6} - \frac{x}{4} \cos 2x \Big|_0^\pi + \frac{1}{4} \int_0^\pi \cos 2x dx \\
&= \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} \sin 2x \Big|_0^\pi = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

例 50 设  $f''(x)$  连续,  $f(\pi) = 2$ , 且有

$$\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x dx = 3,$$

求  $f(0)$ .

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int_0^\pi f(x) \sin x dx &= [-f(x) \cos x] \Big|_0^\pi + \int_0^\pi f'(x) \cos x dx \\
&= f(\pi) + f(0) + [f'(x) \sin x] \Big|_0^\pi - \int_0^\pi f''(x) \sin x dx,
\end{aligned}$$

$$\text{移项得} \quad \int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x dx = f(\pi) + f(0),$$

$$\text{则} \quad f(\pi) + f(0) = 5 \Rightarrow f(0) = 5 - 2 = 3.$$

例 51 计算  $\int_0^a \arctan \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx$  ( $a > 0$ ).

解 本例用分部积分法求解, 但要先进行代换.

(1) 令  $w(x) = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ , 则  $w(a) = 0$ . 于是

$$\begin{aligned}
I &= x \arctan w(x) \Big|_0^a - \int_0^a x \cdot \frac{1}{1+w^2} \cdot \frac{1}{2w} \cdot \frac{-2a}{(a+x)^2} dx \\
&= \int_0^a \frac{x}{2\sqrt{a^2-x^2}} dx = -\frac{1}{4} \int_0^a \frac{d(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \Big|_0^a = \frac{a}{2}.$$

(2) 令  $x = a \cos t$  ( $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ), 则

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/2}^0 \frac{a}{2} t d \cos t = a \left( \frac{t}{2} \cos t \right) \Big|_{\pi/2}^0 + \int_0^{\pi/2} \frac{a}{2} \cos t dt \\ &= \frac{a}{2} \sin t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

(3) 令  $t = \arctan \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ , 则  $\tan t = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ . 于是

$$\cos 2t = \frac{1 - \tan^2 t}{1 + \tan^2 t} = \frac{1 - (a-x)/(a+x)}{1 + (a-x)/(a+x)} = \frac{x}{a}.$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/4}^0 t d(a \cos 2t) = a t \cos 2t \Big|_{\pi/4}^0 + a \int_0^{\pi/4} \cos 2t dt \\ &= a \cdot \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{\pi/4} = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

例 52 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos(n+1)x dx; \quad (2) \int_0^{\pi} x \sqrt{\cos^2 x - \cos^4 x} dx.$$

解 先将被积函数变形, 再进行积分.

$$\begin{aligned} (1) I &= \int_0^{\pi} \sin^{n-1} x [\cos n x \cos x - \sin n x \sin x] dx \\ &= \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos n x d \sin^n x - \int_0^{\pi} \sin^n x \sin n x dx \\ &= \left( \frac{\cos n x}{n} \sin^n x \right) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sin^n x \sin n x dx - \int_0^{\pi} \sin^n x \sin n x dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) I &= \int_0^{\pi} x |\cos x| \sin x dx = \int_0^{\pi/2} x \cos x \sin x dx \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} x \cos x \sin x dx = \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\pi/2} x \sin 2x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} x \sin 2x dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{x \cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right] \Big|_0^{\pi/2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \frac{x \cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right] \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

例 53 计算下列积分:

$$(1) f(x) = \int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{x}} \frac{du}{1 + (\tan u)^2} \sqrt{2}, \text{求} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) dx;$$

$$(2) f(x) = \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt, \text{求} \int_0^1 x f(x) dx.$$

解 要分步求解.

$$\begin{aligned} (1) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) dx &= 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{x} f'(x) dx \\ &= - \int_0^{\pi/2} \sqrt{x} df(x) = - \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\tan x)^2 \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\tan x)^2 \sqrt{2}} &\stackrel{t = \pi/2 - x}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + (\cot t)^2 \sqrt{2}} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{(\tan t)^2 \sqrt{2} + 1 - 1}{1 + (\tan t)^2 \sqrt{2}} dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + (\tan t)^2 \sqrt{2}}, \end{aligned}$$

$$\text{故} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\tan x)^2 \sqrt{2}} = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{即} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) dx = - \frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned} (2) \int_0^1 x f(x) dx &= \int_0^1 x \left[ \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[ \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt \right] d \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \left[ \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt \right] \Big|_0^1 - \int_0^1 x^3 e^{-x^4} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 e^{-x^4} d(-x^4) = \frac{1}{4} e^{-x^4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{e} - 1 \right). \end{aligned}$$

例 54 设函数  $f(x)$  在  $[0, \pi]$  上连续, 且  $\int_0^\pi f(x) dx = 0$ ,  $\int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$ . 证明: 在  $(0, \pi)$  内至少存在两个不同的点  $\xi_1, \xi_2$ , 使  $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$ .

证 令  $F(x) = \int_0^x f(t) dt, 0 \leq x \leq \pi. F(0) = 0, F(\pi) = 0$ .

$$\text{又} \quad 0 = \int_0^\pi f(x) \cos x dx = \int_0^\pi \cos x dF(x)$$

$$= F(x)\cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi F(x)\sin x dx = \int_0^\pi F(x)\sin x dx.$$

所以  $\exists \xi \in (0, \pi)$  使  $F(\xi)\sin \xi = 0$ . 这是因为, 若  $F(\xi)\sin \xi \neq 0$ , 则必  $F(x)\sin x$  恒大于(或恒小于)零, 这与  $\int_0^\pi F(x)\sin x dx = 0$  矛盾. 但在  $(0, \pi)$  内,  $\sin \xi \neq 0$ , 故  $F(\xi) = 0$ .

对  $F(x)$  在  $[0, \xi]$  上应用罗尔定理知, 至少存在  $\xi_1 \in (0, \xi), \xi_2 \in (\xi, \pi)$ , 使

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0 \Rightarrow f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0.$$

例 55 求函数  $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$  的表达式, 其中

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{3}{2}x^2, & -1 \leq x < 0, \\ \frac{xe^x}{(e^x + 1)^2}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

解 因为, 当  $-1 \leq x < 0$  时, 有

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-1}^x \left( 2t + \frac{3}{2}t^2 \right) dt = \left( t^2 + \frac{1}{2}t^3 \right) \Big|_{-1}^x \\ &= x^2/2 + x^3/3 + 1/2. \end{aligned}$$

当  $0 \leq x \leq 1$  时, 有

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-1}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt \\ &= \left( t^2 + \frac{1}{2}t^3 \right) \Big|_{-1}^0 + \int_0^x \frac{te^t}{(e^t + 1)^2} dt \\ &= -\frac{1}{2} - \int_0^x t d\left( \frac{1}{e^t + 1} \right) = -\frac{1}{2} - t \frac{1}{e^t + 1} \Big|_0^x - \int_0^x \frac{dt}{e^t + 1} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} + \int_0^x \frac{de^t}{e^t(e^t + 1)} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} + \ln \frac{x}{e^x + 1} \Big|_0^x \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} + \ln 2 + \ln \frac{e^x}{e^x + 1},$$

即  $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 0, \\ \ln 2 + \ln \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{x}{e^x + 1} - \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$

例 56 设  $f(0) = 1, f(2) = 3, f'(2) = 5$ , 计算  $\int_0^1 x f''(2x) dx$ .

解 
$$\begin{aligned} \int_0^1 x f''(2x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 x df'(x) \\ &= \frac{1}{2} [x f'(x)] \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 f'(2x) dx \\ &= \frac{5}{2} - \frac{1}{4} \int_0^1 df(2x) = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} f(2x) \Big|_0^1 = 2. \end{aligned}$$

例 57 计算下列不定积分:

(1)  $\int_1^{16} \arctan \sqrt{\sqrt{x} - 1} dx;$  (2)  $\int_{1/e}^e |\ln x| dx.$

解 (1) 令  $\sqrt{x} = t$ , 则

$$\begin{aligned} \int_1^{16} \arctan \sqrt{\sqrt{x} - 1} dx &= \int_1^4 \arctan \sqrt{t - 1} dt^2 \\ &= t^2 \arctan \sqrt{t - 1} \Big|_1^4 - \int_1^4 t^2 \frac{1}{1 + (t - 1)^2} \frac{dt}{2 \sqrt{t - 1}} \\ &= 16 \arctan \sqrt{3} - \frac{1}{2} \int_1^4 (\sqrt{t - 1} + 1/\sqrt{t - 1}) d(t - 1) \\ &= \frac{16}{3} \pi - \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3} (t - 1)^{3/2} + 2(t - 1)^{1/2} \right] \Big|_1^4 = \frac{16}{3} \pi - 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

(2) 因为  $\ln 1 = 0$ , 所以

$$\begin{aligned} \int_{1/e}^e |\ln x| dx &= \int_{1/e}^1 -\ln x dx + \int_1^e \ln x dx \\ &= -x \ln x \Big|_{1/e}^1 - \int_{1/e}^1 dx + x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = 2(1 - 1/e). \end{aligned}$$

例 58 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有连续导数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1).$$

证 因为  $f'(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 则  $\exists M$ , 使在  $[0, 1]$  上,  $|f'(x)| \leq M$ . 且有

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n f(x) dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx \\ &= \frac{1}{n+1} f(1) - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx. \end{aligned}$$

而  $\left| \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx \right| \leq M \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{M}{n+2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty),$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \left[ f(1) - \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx \right] = f(1).$

由此可得积分估计式

$$\int_0^1 x^n f(x) dx = \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

例 59 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $\varphi(x)$  在  $[a, b]$  上连续且在  $(a, b)$  内可微,  $\varphi'(x) \geq 0$  ( $x \in (a, b)$ ). 用分部积分法与积分第一中值定理证明积分第二中值定理.

证 设  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ , 于是

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \varphi(x) dx &= \int_a^b \varphi(x) dF(x) \\ &= F(x) \varphi(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x) \varphi'(x) dx \quad (\text{积分第一中值定理}) \\ &= F(b) \varphi(b) - F(a) \varphi(a) - F(\xi) \int_a^b \varphi'(x) dx \\ &= F(b) \varphi(b) - F(a) \varphi(a) - F(\xi) [\varphi(b) - \varphi(a)] \\ &= \varphi(b) [F(b) - F(\xi)] + \varphi(a) [F(\xi) - F(a)] \\ &= \varphi(b) \int_{\xi}^b f(x) dx + \varphi(a) \int_a^{\xi} f(x) dx. \end{aligned}$$

应用  $\int_a^b \varphi'(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a)$  时, 要求  $\varphi'(x)$  在  $[a, b]$  上连续.



## 第四节 非正常积分(反常积分)

### 主要内容

1. 设函数  $f$  定义在无穷区间  $[a, +\infty)$  上, 且在任何有限区间  $[a, A]$  上可积, 如果存在极限  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx = J$ , 则称  $J$  为  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上的无穷限非正常积分, 记作  $J = \int_a^{+\infty} f(x) dx$ , 并称  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛. 否则, 称  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  发散. 非正常积分亦称广义积分.

类似可定义  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  的收敛与发散.

而  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$ , 当且仅当两个积分  $\int_{-\infty}^a f(x) dx$  与  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  都收敛时积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  才收敛.

2. 设  $f(x)$  定义在  $[a, b]$  上, 在  $U_-(b, \delta)$  内无界, 则  $\forall \epsilon (\epsilon < b - a)$ ,  $f$  在  $[a, b - \epsilon]$  上可积, 如果极限  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx = G$  存在, 则称  $G$  为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的无界函数非正常积分, 记作  $\int_a^b f(x) dx$ , 并称  $\int_a^b f(x) dx$  收敛. 否则称  $\int_a^b f(x) dx$  发散.

类似可定义  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$  的敛散性.

若函数  $f$  在  $c (a < c < b)$  点无界, 则定义

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x) dx + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{c+\epsilon_2}^b f(x) dx$$

当且仅当等式右边两个积分都收敛时,  $\int_a^b f(x)dx$  才收敛.

若函数  $f$  在  $[a, b]$  的两端点都无界, 则定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon_1}^c f(x)dx + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_c^{b-\epsilon_2} f(x)dx,$$

其中  $a < c < b$ .

3. 若  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [F(A) - F(-A)]$  收敛, 则称其极限值为  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  的柯西主值, 记作  $(\text{cpv}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ .

4. 柯西收敛原理 无穷限积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛的充要条件是:  $\forall \epsilon > 0, \exists M > a$ , 使对于  $A_1, A_2 > M$  时, 都有

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)dx \right| < \epsilon.$$

### 5. 无穷限积分的性质

(1) 若  $\int_a^{+\infty} f_1(x)dx$  和  $\int_a^{+\infty} f_2(x)dx$  都收敛, 则其线性组合  $\int_a^{+\infty} [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]dx$  也收敛 ( $k_1, k_2$  为常数), 且

$$\int_a^{+\infty} [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]dx = k_1 \int_a^{+\infty} f_1(x)dx + k_2 \int_a^{+\infty} f_2(x)dx.$$

(2) 若  $f$  在任何有限区间  $[a, A]$  上可积,  $a < b$ , 则  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  与  $\int_b^{+\infty} f(x)dx$  有相同的敛散性, 且当它们同时收敛时, 有

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx.$$

(3) 若  $f$  在任何有限区间  $[a, A]$  上可积, 且  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$  收敛, 则称  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  绝对收敛, 且

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x)dx \right| < \int_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

若  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛, 而  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$  不收敛, 则称  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  条件收敛.

## 6. 非负函数的非正常积分的敛散性判别法

(1) 比较判别法 设在  $[a, +\infty)$  上非负函数  $f$  和  $\varphi$  在任何有限区间  $[a, A]$  上都可积, 且  $k\varphi(x) \geq f(x) \geq 0$  ( $k > 0$ , 常数), 则当  $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$  收敛时,  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  也收敛; 当  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  发散时,  $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$  也发散.

(2) 比较判别法的极限形式 若在  $[a, +\infty)$  上,  $f(x) \geq 0$ ,  $\varphi(x) \geq 0$ , 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = l$ , 则

1° 当  $0 < l < +\infty$  时,  $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$  与  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  有相同的敛散性.

2° 当  $l = 0$  时,  $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$  收敛  $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛.

3° 当  $l = +\infty$  时,  $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$  发散  $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$  发散.

7. 柯西判别法 设在  $[a, +\infty)$  上恒有  $f(x) \geq 0$ , 对任意正常数  $k$  ( $k > 0$ ), 有

(1) 若  $f(x) \leq \frac{k}{x^p}$ , 且  $p > 1$ , 则  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛;

(2) 若  $f(x) \geq \frac{k}{x^p}$ , 且  $p \leq 1$ , 则  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  发散.

其极限形式是: 在  $[a, +\infty)$  上 ( $a > 0$ ), 若  $f(x) \geq 0$ , 有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x) = l$ , 则

(1) 若  $0 \leq l < +\infty$ , 且  $p > 1$ , 则  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛;

(2) 若  $0 \leq l < +\infty$ , 且  $p \leq 1$ , 则  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  发散.

8. 阿贝耳 (Abel) 判别法 若  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛,  $g(x)$  在  $[a, +\infty)$  上单调有界, 则  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$  收敛.

9. 狄利克雷判别法 若函数  $F(A) = \int_a^A f(x) dx$  在  $[a, +\infty)$  上有界,  $g(x)$  在  $[a, +\infty)$  上单调且当  $x \rightarrow +\infty$  时趋向于零, 则  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$  收敛.

对以上 3 ~ 9 条的各项内容, 无界函数的非正常积分也有类似的性质, 恕不赘述.

## 疑 难 解 析

1. 非正常积分与正常积分有何不同? 在计算上有什么区别?

答 非正常积分又称反常积分、广义积分, 正常积分即黎曼积分、常义积分. 黎曼积分假定了积分区间有限和被积函数在区间上有界这两个条件, 非正常积分则突破了这两个条件的限制, 考虑在无穷区间上和对无界函数的积分问题.

非正常积分通常可以化为极限记号下的正常积分, 一般是带着极限记号计算正常积分, 再对正常积分的结果求极限而得非正常积分的值; 也可以先计算对应的不定积分  $F(x) + c$ , 然后利用牛顿-莱布尼茨公式并求极限, 获得非正常积分的值. 因此, 在不定积分和定积分中用过的变量代换、分部积分、牛顿-莱布尼茨公式等方法, 以及拆项、拼凑、分段、组合等种种技巧, 在非正常积分计算中同样可以使用. 只是为避免做无用的工作, 最好先确定非正常积分的敛散性后再行计算.

2. 无穷区间的非正常积分与无界函数的非正常积分有什么联系?

答 无穷区间的非正常积分与无界函数的非正常积分并不

是截然不同的,一般可以互相转换.例如,对无穷区间上的非正常积分可变换成无界函数的非正常积分,即

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)dx &\stackrel{x=\frac{1}{t}}{=} \int_{1/a}^0 \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right) dt \quad \left(\text{令 } \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right) = g(t)\right) \\ &= \int_0^{1/a} g(t)dt.\end{aligned}$$

同样,可以写出反过来的情形.

## 方法、技巧与典型例题分析

非正常积分问题包含五个方面的内容:非正常积分的计算,非正常积分敛散性的判定,非正常积分的极限,无穷限积分敛散性与无穷远处的状态,非正常积分与“积分和”极限.由于内容比较广泛,而且有的问题比较深奥,所以我们只对一般的问题进行讨论.

### 一、非正常积分的计算

非正常积分可以化为极限记号下的正常积分,然后带着极限记号计算正常积分,再对计算的结果取极限.因此,其计算方法仍然是利用换元积分法、分部积分法、牛顿-莱布尼茨公式和其它正常积分中使用的方法.

例1 计算下列无穷限非正常积分:

$$\begin{aligned}(1) I_n &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx \quad (n \in \mathbf{N}); & (2) I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}; \\ (3) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x+x^2}; & (4) \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^a} \quad (a > 0).\end{aligned}$$

解 可以先用求不定积分的方式计算.

$$(1) \text{ 当 } n=0 \text{ 时, } I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

当  $n \geq 1$  时,有

$$I_n = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-x} x^n dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} (-e^{-x} x^n) \Big|_0^A + \lim_{A \rightarrow +\infty} n \int_0^A e^{-x} x^{n-1} dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} n \int_0^A e^{-x} x^{n-1} dx.$$

依次递推, 即得  $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n!$ .

$$(2) I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{x^2 + a^2} \\ = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \Big|_0^A = \frac{\pi}{2a}.$$

而

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2 + a^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx \\ = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} + \frac{1}{a^2} \int \frac{-x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx \\ = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} + \frac{1}{2a^2(n-1)} \int x d \left[ \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} \right] \\ = \left[ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{2a^2(n-1)} \right] \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}} \\ + \frac{1}{2a^2(n-1)} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}}.$$

于是

$$I_n = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} \\ = \left( \frac{1}{a^2} \frac{2n-3}{2n-2} \right) \left( \frac{1}{a^2} \frac{2n-5}{2n-4} \right) I_{n-2} = \dots \\ = \frac{1}{a^{2(n-1)}} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} I_1 = \frac{1}{2a^{2n-1}} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}.$$

$$(3) \text{ 因为 } \int \frac{dx}{1+x+x^2} = \int \frac{d(x+1/2)}{(x+1/2)^2 + (\sqrt{3}/4)^2} \\ = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x+1/2}{\sqrt{3}/4} + c,$$

故

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x+1/2}{\sqrt{3}/4} \Big|_0^A = \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi.$$

$$(4) \text{ 因为 } \int \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int \frac{d \ln x}{(\ln x)^p}, \text{ 且}$$

$$\text{当 } p \neq 1 \text{ 时, } \int \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \frac{1}{p-1} (\ln x)^{1-p},$$

$$\text{当 } p = 1 \text{ 时, } \int \frac{dx}{x \ln x} = \ln |\ln p|,$$

故 当  $p > 1$  时,  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{(x \ln x)^p} = \frac{1}{p-1} (\ln a)^{1-p}$ ;

当  $p \leq 1$  时,  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \infty$ , 发散.

例 2 计算下列无穷限非正常积分:

$$\begin{aligned} (1) & \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}; & (2) & \int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx; \\ (3) & \int_{-\infty}^{+\infty} (|x|-x)e^{-|x|} dx; & (4) & \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{1+x^5+x^{10}}}. \end{aligned}$$

解 (1)  $\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)}$ ,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3+1} &= \int \left[ \frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)} \right] dx \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c, \end{aligned}$$

故  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^3}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right] \Big|_0^A \\ &= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx &= \int \frac{1+1/x^2}{x^2+1/x^2} dx = \int \frac{d(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + c, \end{aligned}$$

故  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} \Big|_0^A = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned} (3) \int_{-\infty}^{+\infty} (|x|+x)e^{-|x|} dx &= \int_{-\infty}^0 (-x+x)e^x dx + \int_0^{+\infty} (x+x)e^{-x} dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = -2 \int_0^{+\infty} x de^{-x} \end{aligned}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} -2[xe^{-x} + e^{-x}] \Big|_0^A = 2.$$

$$\begin{aligned} (4) \quad & \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{1+x^5+x^{10}}} \\ & \stackrel{x=1/t}{=} \int_1^{0+\epsilon} \frac{1}{1/t \cdot \sqrt{1+1/t^5+1/t^{10}}} \cdot \frac{-dt}{t^2} \\ & = \int_0^1 \frac{t^4 dt}{\sqrt{t^{10}+t^5+1}} \stackrel{t^5=u}{=} \frac{1}{5} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+u+1}} \\ & = \frac{1}{5} \int_0^1 \frac{d(u+1/2)}{\sqrt{(u+1/2)^2+3/4}} = \frac{1}{5} \ln(1+2\sqrt{3}). \end{aligned}$$

例 3 计算下列无界函数的非正常积分:

$$(1) \int_{-1}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx; \quad (2) \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx.$$

解 无界函数的积分性经常要用变量代换或区间分段的方法来计算,使得可以通过部分量的叠加或抵消来简化积分、求出积分值.

(1)  $x=0$  是瑕点 ( $f(x)$  在  $U(0, \delta)$  内无界), 故

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx &= \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{0-\epsilon_1} \frac{e^{1/x}}{x^2} dx + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{0+\epsilon_2}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx \\ &= \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_1^{0-\epsilon_1} e^{1/x} d\left(-\frac{1}{x}\right) + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{0+\epsilon_2}^1 e^{1/x} d\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= 1/e + \infty, \end{aligned}$$

所以积分  $\int_{-1}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$  发散.

(2) 作变量代换  $x=2t$ , 得

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \ln \sin x dx &= 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin 2t dt = 2 \int_0^{\pi/4} \ln(2 \sin t \cos t) dt \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 2 \int_{0+\epsilon}^{\pi/4} (\ln 2 + \ln \sin t + \ln \cos t) dt \\ &= \frac{\pi}{2} \ln 2 + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 2 \int_{0+\epsilon}^{\pi/4} \ln \sin t dt + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \cos t dt. \end{aligned}$$



对积分  $\int_0^{\pi/4} \ln \sin t dt$  作变换  $x = \frac{\pi}{2} - u$ , 得

$$2 \int_0^{\pi/4} \ln \cos t dt = -2 \int_{\pi/2}^{\pi/4} \ln \sin t dt,$$

故 
$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx.$$

于是 
$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

例 4 计算下列无界函数的非正常积分:

(1)  $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ ; (2)  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$ .

解 (1) 
$$\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} \xrightarrow{\sqrt{1-x}=t} 2 \int \frac{dt}{1+t^2}$$
  

$$= -2 \arctan t + c = -2 \arctan \sqrt{1-x} + c,$$

故 
$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$
  

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (-2 \arctan \sqrt{1-x}) \Big|_0^{1-\epsilon}$$
  

$$= -2 \left( \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \arctan \sqrt{1-1+\epsilon} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

(2) 因为  $\sqrt{1-x} \frac{x^n}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \rightarrow \frac{1}{2} (x \rightarrow 1^-)$ , 且  $p$   

$$= \frac{1}{2} < 1$$
, 所以积分  $I_n$  收敛.

令  $x = \sin t$ , 则

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt \quad (\text{瓦里士公式})$$
  

$$= \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{当 } n = 2k \text{ 时,} \\ \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}, & \text{当 } n = 2k-1 \text{ 时.} \end{cases}$$

本题没有标出极限记号, 但应知  $x = 1$  为瑕点.

例 5 计算下列非正常积分:

$$(1) \int_1^3 \ln \sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}} dx; \quad (2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x-1}}.$$

解 (1)  $x=2$  是瑕点, 则

$$\begin{aligned} & \int_1^3 \ln \sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}} dx \\ &= \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_1^{2-\epsilon_1} \ln \sqrt{\frac{\pi}{2-x}} + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{2+\epsilon_2}^3 \ln \sqrt{\frac{\pi}{x-2}} dx \\ &= \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_1^{2-\epsilon_1} \left[ \ln \sqrt{\pi} - \frac{1}{2} \ln(2-x) \right] dx \\ & \quad + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{2+\epsilon_2}^3 \left[ \ln \sqrt{\pi} - \frac{1}{2} \ln(x-2) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \ln \pi - \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} [x \ln(2-x) - \ln|2-x| - x] \Big|_1^{2-\epsilon_1} \\ & \quad + \frac{1}{2} \ln \pi - \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} [x \ln(x-2) + \ln|x-2| - x] \Big|_{2+\epsilon_2}^3 \\ &= \left( \frac{1}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} \right) = \ln \pi + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x-1}} &= \int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{x-1}} = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x-1}}, \\ \int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{x-1}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{1+\epsilon}^2 \frac{dx}{x \sqrt{x-1}} \\ &\stackrel{\sqrt{x-1}=t}{=} \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_{0+\epsilon_1}^1 \frac{2tdt}{(1+t^2)t} = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} 2 \arctan t \Big|_{0+\epsilon_1}^1 = \frac{\pi}{2}, \\ \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x-1}} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{dx}{x \sqrt{x-1}} \\ &\stackrel{\sqrt{x-1}=t}{=} \lim_{A_1 \rightarrow +\infty} \int_1^{A_1} \frac{2tdt}{(1+t^2)t} = \lim_{A_1 \rightarrow +\infty} 2 \arctan t \Big|_1^{A_1} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

所以

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x-1}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

例6 设  $\varphi(x) = \frac{x+1}{x(x-2)}$ , 计算  $\int_1^3 \frac{\varphi(x)}{1+\varphi^2(x)} dx$ .

解  $x=2$  是  $\varphi(x)$  的瑕点.

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{\varphi(x)}{1+\varphi^2(x)} dx &= \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_1^{2-\epsilon_1} \frac{\varphi(x) dx}{1+\varphi^2(x)} + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{2+\epsilon_2}^3 \frac{\varphi(x) dx}{1+\varphi^2(x)} \\ &= \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \arctan \varphi(x) \Big|_1^{2-\epsilon_1} + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \arctan \varphi(x) \Big|_{2+\epsilon_2}^3 \\ &= \arctan 2 - \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2} = \arctan 2 + \arctan \frac{4}{3} - \pi. \end{aligned}$$

例7 证明  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x} dx$  收敛, 且  $\left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x} dx \right| \leq 1$ .

证 为简便起见, 我们不再写出极限符号, 请读者自己理解计算中带有极限的过程.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x} dx &= \frac{\sin x}{1+x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(1+x)^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(1+x)^2} dx. \end{aligned}$$

又  $\frac{|\sin x|}{(1+x)^2} \leq \frac{1}{(1+x)^2}$ , 而  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^2}$  收敛, 所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(1+x)^2} dx \text{ 收敛} \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x} dx \text{ 收敛}.$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x} dx \right| &= \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(1+x)^2} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^2} \\ &= -\frac{1}{1+x} \Big|_0^{+\infty} = 1. \end{aligned}$$

## 二、非正常积分敛散性的判别

非正常积分的敛散性, 可依据敛散性定义、非正常积分的性质、非负函数非正常积分的收敛判别法(比较法则、比较法则的极限形式和柯西判别法)、阿贝耳判别法和狄利克雷判别法进行. 关键是要根据具体情况确定恰当的判别方法.

例8 判断下列命题的真伪, 试说明理由或举出反例.

(1) 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 且  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 则

$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x f(t) dt = f(x), \frac{d}{dx} \int_x^{+\infty} f(t) dt = -f(x), \forall x \in (-\infty, +\infty)$  成立;

(2) 积分  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ;

(3) 积分  $\int_a^b f(x) dx$  收敛, 就可以用积分和式的极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$  来计算;

(4) 积分  $\int_a^b f(x) dx$  收敛, 则对  $[a, b]$  的任一分割  $T$ , 总可选取  $\xi_i$ , 使当  $n \rightarrow +\infty$  时,  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \rightarrow A$  (有限数);

(5) 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$  存在,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 则  $A = 0$ ;

(6) 若  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  收敛,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , 则  $\int_a^{+\infty} f^2(x) dx$  必收敛;

(7) 若  $\int_a^{+\infty} f(x) dx = A$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^n f(x) dx = A$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), 反之不成立;

(8)  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx$  存在, 则  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  收敛.

解 命题(1), (5), (6), (7) 系真, (2), (3), (4), (8) 系伪.

(1) 因为  $\forall a \in (-\infty, +\infty), J_1 = \int_{-\infty}^a f(x) dx, J_2 = \int_a^{+\infty} f(x) dx$  都存在, 并且有

$$\int_{+\infty}^x f(t) dt = J_1 + \int_a^x f(t) dt, \quad \int_x^{+\infty} f(t) dt = J_2 - \int_a^x f(t) dt.$$

故  $\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x f(t) dt = f(x), \frac{d}{dx} \int_x^{+\infty} f(t) dt = -f(x).$

(2) 取  $f(x) = \frac{1}{1+x^2 g(x)}, x \in [0, +\infty)$ , 其中

$$g(x) = \begin{cases} 1, & n < x < n+1, \\ 0, & x = n. \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

显然  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$ . 但  $f(x) \geq 0$ , 因为对于  $N > A$ , 有

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2g(x)} &< \int_0^N \frac{dx}{1+x^2g(x)} = \sum_{i=1}^N \int_{i-1}^i \frac{dx}{1+x^2g(x)} \\ &= \sum_{i=1}^N \int_0^1 \frac{dt}{1+(t-i-1)^2g(t)} = \sum_{i=1}^N \int_0^1 \frac{dt}{1+(t+i-1)^2} \\ &< 1 + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{i^2} < 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi}{6} + 1. \end{aligned}$$

所以  $\int_0^A f(x)dx$  单调增加且有上界, 从而  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  收敛.

(3) 设  $f(x) = 1/\sqrt{x}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , 则

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 x^{-1/2}dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [2x^{1/2}]_{\epsilon}^1 = 2.$$

所以  $\int_0^1 f(x)dx$  收敛. 但是:

(i) 将  $[0, 1]$   $n$  等分, 在  $\Delta x_1$  上取  $\xi_1 = \frac{1}{n^2}$   $\left(0 < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}\right)$ , 在其它区间  $\Delta x_i$  上取  $\xi_i = \frac{i}{n}$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , 则有积分和  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ .

(ii) 在  $\Delta x_1$  上取  $\xi'_1 = \frac{1}{4n^2}$   $\left(0 < \frac{1}{4n^2} < \frac{1}{n}\right)$ , 在其它区间上取  $\xi'_i = \frac{i}{n}$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , 则有积分和  $\sum_{i=1}^n f(\xi'_i)\Delta x_i$ .

$$\begin{aligned} \text{此时, } \sum_{i=1}^n f(\xi'_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \\ = \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{\sqrt{\xi'_1}} - \frac{1}{\sqrt{\xi_1}} \right] = \frac{1}{n} (2n - n) = 1. \end{aligned}$$

显然  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$  与  $\xi_i$  取法有关, 故和式极限不存在.

(4) 取  $f(x) = x^{-1/3}$ , 则  $x = 0$  为瑕点, 有

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^{-1/3}dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 x^{-1/3}dx = \frac{3}{2}.$$

但对  $[0, 1]$  上的任一分割  $T$ , 只要取  $\xi_1 = (\Delta x_1)^6$  ( $0 < (\Delta x_1)^6 < \Delta x_1 < 1$ ), 其余  $\Delta x_i$  上任取  $\xi_i, i = 2, 3, \dots, n$ , 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i &= f(\xi_1) \Delta x_1 + \sum_{i=2}^n f(\xi_i) \Delta x_i > f(\xi_1) \Delta x_1 \\ &= \frac{\Delta x_1}{\sqrt[3]{(\Delta x_1)^6}} = \frac{1}{\Delta x_1}, \end{aligned}$$

故当  $n \rightarrow +\infty, \lambda \rightarrow 0$  时, 就有  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \rightarrow +\infty$ .

(5) 若  $A \neq 0$  (不妨设  $A > 0$ ), 则由保号性,  $\exists P > a$ , 当  $x > P$  时,  $f(x) \geq \frac{A}{2} > 0$ . 于是

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x)dx &= \int_a^P f(x)dx + \int_P^{+\infty} f(x)dx \\ &\geq \int_a^P f(x)dx + \frac{A}{2} \int_P^{+\infty} dx = +\infty. \end{aligned}$$

这与  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  的收敛矛盾, 故必有  $A = 0$ .

(6) 因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , 故当  $n$  充分大时, 有  $f^2(x) \leq |f(x)|$ , 依据比较判别法,  $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$  收敛.

若将  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  绝对收敛改为收敛, 则结论不真. 如

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \text{ 收敛且 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0, \text{ 但 } \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx \text{ 发散.}$$

(7)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(x)dx = A$  仅为  $\int_a^{+\infty} f(x)dx = A$  的必要条件, 反之不成立. 例如

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [n-1, n-1/2), \\ 1, & x \in [n-1/2, n), \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots,$$

有  $I_n = \int_0^n f(x)dx = 0$ , 从而  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(x)dx = 0$ . 但  $I\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ,

有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I\left(n + \frac{1}{2}\right) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} I(n)$ , 从而极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(x) dx$  不存在.

(8) 取  $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ , 有

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A f(x) dx &= \int_{-A}^A \frac{1+x}{1+x^2} dx = \int_{-A}^A \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{2} \int_{-A}^A \frac{dx^2}{1+x^2} \\ &= \left[ \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right] \Big|_{-A}^A = 2\arctan A, \end{aligned}$$

所以  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} 2\arctan A = \pi$ .

而在  $[0, +\infty)$  上,  $f(x) > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 1 > 0$ , 故  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  发散, 于是  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  也发散.

例 9 讨论下列非正常积分的敛散性:

(1)  $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$  ( $p > 0$ ); (2)  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$  ( $p > 0$ );

(3)  $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$  ( $p > 0$ );

(4)  $\int_1^{+\infty} \left( \frac{x}{x^2+p} - \frac{p}{x+1} \right) dx$  ( $p \neq 0$ ).

解 (1)  $x=0$  为瑕点. 当  $p=1$  时, 有

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln x \Big|_{\epsilon}^1 = +\infty,$$

发散. 当  $p \neq 1$  时, 有

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_{\epsilon}^1 = \begin{cases} +\infty, & p > 1, \\ \frac{1}{1-p}, & p < 1. \end{cases}$$

所以  $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$  当  $p \geq 1$  时发散, 当  $p < 1$  时收敛.

对  $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$  ( $p > 0$ ) 可以得到同样的结果: 当  $p \geq 1$  时发散, 当  $p < 1$  时收敛.

(2) 当  $p > 1$  时, 有  $\left| \frac{\sin x}{x^p} \right| \leq \frac{1}{x^p}$ , 而积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$  当  $p > 1$  时

收敛,故由比较判别法知,  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$  绝对收敛.

当  $0 < p \leq 1$  时,  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$  条件收敛. 因为

$$\left| \frac{\sin x}{x^p} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x},$$

而  $\left| \int_1^A \cos 2x dx \right| = \frac{1}{2} |\sin 2A - \sin 2| \leq 1$ ,  $\frac{1}{2x}$  在  $[1, +\infty)$  上单调

减少并趋向于零,故由狄利克雷判别法,依据  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x}$  发散、

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$  收敛,判断  $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| dx$  发散. 但是,对任意的  $A \geq$

1,有  $\left| \int_1^A \sin x dx \right| = |\cos A - 1| \leq 2$ ,且  $\frac{1}{x^p}$  在  $[1, +\infty)$  单调减少并

趋向于零,故由狄利克雷判别法知,  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$  当  $p > 0$  时收敛.

$$\begin{aligned} (3) \int_e^b \frac{dx}{x(\ln x)^p} &= \int_e^b \frac{d \ln x}{(\ln x)^p} \\ &= \begin{cases} \ln(\ln x) \Big|_e^b = \ln(\ln b), & p = 1, \\ \frac{1}{1-p} (\ln x)^{1-p} \Big|_e^b = \frac{1}{1-p} [(\ln b)^{1-p} - 1], & p \neq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

当  $p = 1$  时,有

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_e^b \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln(\ln b) = +\infty,$$

积分发散;当  $p < 1$  时,有

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_e^b \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \frac{1}{1-p} [\lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b)^{1-p} - 1] = +\infty,$$

积分发散;当  $p > 1$  时,有

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_e^b \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \frac{1}{1-p} [\lim_{b \rightarrow +\infty} \ln(\ln b)^{1-p} - 1] = \frac{1}{p-1},$$

积分收敛.

故  $p \leq 1$  时,  $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$  发散;  $p > 1$  时,  $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$  收敛.



(4) 因为  $f(x) = \frac{x}{x^2 + p} - \frac{p}{x + 1} = \frac{(1 - p)x^2 + x - p^2}{(x^2 + p)(x + 1)}$ ,  
故当  $x$  充分大时,  $f(x)$  与  $(1 - p)$  有相同的符号. 所以  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$   
收敛与绝对收敛是一致的.

当  $p = 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = 1$ , 故  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  收敛; 当  $p \neq 1$   
时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x |f(x)| = |1 - p| \neq 0$ , 故  $\int_1^{+\infty} |f(x)|dx$  发散,  
 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  也发散.

**例 10** 利用各种判别法, 讨论下列积分的敛散性:

- |  |   |
|--|---|
| (1) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + x^2 + 1};$ | (2) $\int_0^{+\infty} e^{-kx} \cos x dx \ (k > 0);$           |
| (3) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^m} dx;$  | (4) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x+1}};$               |
| (5) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^m} dx;$  | (6) $\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx;$                     |
| (7) $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx;$     | (8) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n} dx \ (n \geq 0).$ |

**解** (1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^3 + x^2 + 1} / \frac{1}{1+x^2} = 1 \neq 0$ , 而  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$   
 $= \frac{\pi}{2}$  收敛, 依比较判别法的极限形式知,  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + x^2 + 1}$  收敛.

(2) 因为  $0 \leq |e^{-kx} \cos x| dx \leq e^{-kx}$ , 而  $\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx = \frac{1}{k}$  收敛,  
所以  $\int_0^{+\infty} e^{-kx} \cos x dx$  收敛.

(3)  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^m} dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^m} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^m} dx$ ,  
对  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^m} dx$ , 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{m-1} \frac{\ln(1+x)}{x^m} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

所以, 当  $m < 2$  时积分收敛, 当  $m \geq 2$  时积分发散.

对  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^m} dx$ , 当  $m > 1$  时, 取  $\alpha$  充分小, 使  $m - \alpha > 1$ , 则

$$x^{m-\alpha} \frac{\ln(1+x)}{x^m} = \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty),$$

故积分  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^m} dx$  收敛; 当  $m \leq 1$  时, 有

$$x^m \cdot \frac{\ln(1+x)}{x^m} \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow +\infty),$$

故积分  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^m} dx$  发散.

综上所述, 当  $1 < m < 2$  时,  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^m} dx$  收敛.

(4) 因为  $0 < \frac{1}{x\sqrt{x+1}} < \frac{1}{x^{3/2}}$ , 而  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$  收敛, 所以

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$  收敛.

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^m} dx = \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^m} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^m} dx.$$

对  $\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^m} dx$ , 当  $m \leq 2$  时为定积分, 当  $2 < m < 3$  时,  $m - 2 < 1$ , 且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{m-2} \frac{\sin^2 x}{x^m} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1,$$

所以积分收敛; 当  $m = 3$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \frac{\sin^2 x}{x^m} = 1$ , 当  $m > 3$  时,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \frac{\sin^2 x}{x^m} = +\infty$ , 所以积分发散.

对  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^m} dx$ , 当  $m > 1$  时, 由于  $\frac{\sin^2 x}{x^m} < \frac{1}{x^m}$ , 所以积分收敛;

当  $m \leq 1$  时, 由于  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^m} dx = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x^m} dx$ , 而  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^m}$  发散,  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^m} dx$  收敛, 所以  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^m} dx$  发散; 又当  $m < 0$  时,  $\frac{\sin^2 x}{x^m}$

$\geq \sin^2 x$ , 而  $\int_1^{+\infty} \sin^2 x dx$  发散, 所以  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^m} dx$  发散.

综上所述, 当  $1 < m < 3$  时,  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^m} dx$  收敛.

$$(6) \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

对  $\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$ , 因为  $x^{1-p}(x^{p-1} e^{-x}) \rightarrow 1 (x \rightarrow +\infty)$ , 所以, 当  $p > 0$  时, 积分收敛.

对  $\int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ , 因为  $x^2(x^{p-1} e^{-x}) = x^{p-1}/e^x \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty)$ , 所以对一切  $p$  值, 积分恒收敛.

综上所述, 当  $p > 0$  时, 积分  $\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$  收敛.

$$(7) \int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx = \int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx.$$

对  $\int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n} dx$ , 因为  $x^{-m} \cdot \frac{x^m}{1+x^n} \rightarrow 1 (x \rightarrow 0^+)$ , 所以, 积分当  $m > -1$  时收敛.

对  $\int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx$ , 因为  $x^{n-m} \cdot \frac{x^m}{1+x^n} \rightarrow 1 (x \rightarrow +\infty)$ , 所以, 积分当  $n-m > 1$  时收敛.

综上所述, 积分  $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx$  当  $m > -1, n-m > 1$  时收敛.

(8) 当  $a \neq 0$  时, 设  $f(x) = \cos ax, g(x) = \frac{1}{1+x^n}$ , 则  $\forall A > 0$ , 均有  $\left| \int_0^A f(x) dx \right| \leq \frac{2}{a}$ ; 又当  $n > 0$  时,  $g(x)$  单调减少并趋于零 ( $x \rightarrow +\infty$ ), 故积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n} dx$  当  $a \neq 0, n > 0$  时收敛.

当  $a = 0$  时, 因为  $x^n \cdot \frac{1}{1+x^n} \rightarrow 1 (x \rightarrow +\infty)$ , 所以积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos dx}{1+x^n} dx$  当  $a = 0, n > 1$  时收敛.

例 11 用各种判别法, 讨论下列积分的敛散性:

$$\begin{aligned}
 (1) & \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}; & (2) & \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}; \\
 (3) & \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2}; & (4) & \int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx; \\
 (5) & \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2-3x+2}}; & (6) & \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} \quad (p, q > 0).
 \end{aligned}$$

解 (1)  $x=0, x=\frac{\pi}{2}$  是瑕点, 将原积分写为

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}.$$

对  $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$ , 因为  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin^p x \cos^q x} / \frac{1}{x^p} = 0$ , 且  $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{x^p}$  当  $0 < p < 1$  时收敛, 当  $p \geq 1$  时发散, 故  $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$  当  $0 < p < 1$  时收敛.

对  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$ , 因为  $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{1}{\sin^p x \cos^q x} / \frac{1}{(\pi/2 - x)^q} = 1 \neq 0$ , 且  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{(\pi/2 - x)^q}$  当  $q < 1$  时收敛, 当  $q \geq 1$  时发散, 故  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$  当  $q < 1$  时收敛.

综上所述,  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$  当  $p < 1, q < 1$  时收敛.

$$(2) \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{1/2} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{1/2}^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

对  $\int_0^{1/2} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$ , 因为  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-n} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} = 1$ , 所以当  $n > -1$  时, 积分收敛.

对  $\int_{1/2}^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$ , 因为  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  在  $n$  为任意值时成立, 故  $\int_{1/2}^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$  对任意  $n$  收敛.

综上所述, 当  $n > -1$  时,  $\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$  收敛.

$$(3) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2} + \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2}.$$

对  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2}$ , 因为  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2} = 1$ , 而

$\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x)^2}$  收敛, 所以  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2}$  收敛.

对  $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2}$ , 因为  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2} / \frac{1}{(1-x)^2} = 1 \neq 0$ , 但  $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{(1-x)^2}$  发散, 所以  $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2}$  发散.

综上所述,  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2}$  发散.

(4) 因为  $x=0$  是瑕点, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} / \frac{1}{x^{2/3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/6} \ln \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \sin x / x^{-1/6}$$

$$\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cot x}{-x^{-7/6}/6} = -6 \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/6} \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x = 0,$$

而  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x^{2/3}}$  收敛, 所以  $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx$  收敛.

$$(5) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 3x + 2}} = \int_2^3 \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 3x + 2}} + \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 3x + 2}}.$$

对  $\int_2^3 \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 3x + 2}}$  因为  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^3 \sqrt{x^2 - 3x + 2}} / \frac{1}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{8} \neq 0$ , 且  $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$  收敛, 所以  $\int_2^3 \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 3x + 2}}$  收敛.

对  $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 3x + 2}}$ , 因为  $0 < \frac{1}{x^3 \sqrt{x^2 - 3x + 2}} < \frac{1}{x^4}$ , 且  $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$  收敛, 所以  $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 3x + 2}}$  收敛.

综上所述,  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 3x + 2}}$  收敛.

$$(6) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} = \int_1^2 \frac{dx}{x^p \ln^q x} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}.$$

对  $\int_1^2 \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ , 因为  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^p \ln^q x} / \frac{1}{(x-1)^q} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x-1}{\ln x} \right)^q = \left( \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\ln x} \right)^q \stackrel{L'}{=} (\lim_{x \rightarrow 1^+} x)^q = 1 \neq 0$ , 且  $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^q}$  当  $q < 1$  时收敛, 当  $q \geq 1$  时发散. 所以  $\int_1^2 \frac{dx}{x^p \ln^q x}$  当  $q < 1$  时收敛, 当  $q \geq 1$  时发散.

对  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ , 因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x} / \frac{1}{x^p} \stackrel{p > 1}{=} 0$ , 且  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  当  $p > 1$  时收敛, 所以当  $p > 1$  时,  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$  收敛.  $\forall x \in [2, +\infty)$ , 当  $0 < p \leq 1, q > 1$  时, 因为  $x^p \ln^q x \leq x \ln^q x \Rightarrow \frac{1}{x^p \ln^q x} \geq \frac{1}{x \ln^q x}$ , 而  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x} = +\infty$ , 所以此时积分发散.

综上所述, 当  $p > 1, q < 1$  时,  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$  收敛.

**例 12** 设  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上连续,  $\forall x \in [x, +\infty)$ , 有  $f(x) > 0$ , 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = -\lambda$ . 证明: 若  $\lambda > 1$ , 则  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  收敛.

**证** 因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = -\lambda$ , 所以  $\forall \epsilon > 0, \exists A > 1$ , 当  $x > A$  时, 有  $\frac{\ln f(x)}{\ln x} = -\lambda + \epsilon$ , 即

$$\ln f(x) < (-\lambda + \epsilon) \ln x = \ln x^{-\lambda + \epsilon} \Rightarrow 0 < f(x) < 1/x^{\lambda - \epsilon}.$$

又因  $\lambda > 1$ , 故可取  $0 < \epsilon < \lambda - 1$ , 于是  $\lambda - \epsilon > 1$ . 依比较判别法知,  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  收敛.

**例 13** 设  $f(x)$  定义在  $(-\infty, +\infty)$  上且恒正, 并在任意有

限区间 $[-a, b]$ 上可积 ( $a, b > 0$ ). 又  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-|x|/k} dx \leq M$  ( $M$  为常数) 对任意  $k > 0$  成立. 证明:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  收敛.

证 要证明  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 因为  $f(x) > 0$ , 所以只需证  $\int_{-a}^b f(x) dx$  对  $a, b > 0$  有界.

因为  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-|x|/k} dx \leq M$  对任意  $k > 0$  成立, 则若令  $c = \max\{a, b\}$ , 取  $k > c$ , 有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-a}^b f(x) dx \leq \int_{-a}^b f(x)e^{(c-|x|)/k} dx \\ &= e^{c/k} \int_{-a}^b f(x)e^{-|x|/k} dx \leq e^{c/k} M \leq 3M. \end{aligned}$$

故  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  收敛.

例 14 设  $f(x) > 0$  且单调减少, 证明:  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  与  $\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x dx$  敛散性相同.

证 由  $f(x) > 0$  且单调减少, 则  $f(x) \rightarrow 0$ , 或  $f(A) \rightarrow A > 0$ .

(1) 若  $f(x) \rightarrow 0$ , 由狄利克雷判别法,  $\int_a^{+\infty} f(x)\cos 2x dx$  收敛, 于是由

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x dx &= \int_a^{+\infty} f(x) \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} f(x) dx - \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} f(x)\cos 2x dx \end{aligned}$$

知,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  与  $\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x dx$  同时收敛.

(2) 若  $f(x) \rightarrow A > 0$ , 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  发散, 从而  $\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x dx$  与  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  同时发散.

例 15 证明下列等式:

$$(1) \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx;$$

$$(2) \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)^2};$$

$$(3) \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx = \frac{\pi^3}{16}.$$

证 因为  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \frac{\ln x}{1+x^2} = 0$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} = 0$ , 故依比较判别法的极限形式, 题(1)、题(2)、  
 题(3) 三个积分都收敛.

$$(1) \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx \xrightarrow{x=1/t} \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt - \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt,$$

移项得  $\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx.$

(2) 由分部积分法知

$$\int_0^1 x^n \ln x dx = -\frac{1}{(n+1)^2}, \quad \int_0^1 x^n \ln^2 x dx = \frac{2}{(n+1)^3},$$

故  $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \left[ \ln x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right] dx$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{2n} \ln x dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

$$(3) \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx = \int_0^1 \left[ \ln^2 x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right] dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{2n} \ln^2 x dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{16}.$$

最后一个等式可由  $f(x) = x^2$  在  $[-1, 1]$  上的傅里叶级数展开式

$$x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2} \frac{\cos \pi x}{n^2} \quad (|x| \leq 1)$$

逐项积分后取  $x = 1/2$  得到.



### 三、非正常积分的其它问题

非正常积分的其它几个问题都比较复杂,因此,我们只举几个例子介绍一下.

例 16 证明:若  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛,  $f(x)$  为单调函数,则  
$$f(x) = o(1/x).$$

证 不妨设  $f(x)$  单调减少. 先证当  $x \geq a$  时,  $f(x) \geq 0$ . 否则,  $\exists$  点  $c \geq a$ , 使  $f(c) < 0$ . 而  $x > c$  时,  $f(x) \leq f(c)$ , 从而

$$\int_c^{+\infty} f(x)dx \leq \int_c^{+\infty} f(c)dx = -\infty.$$

得出  $\int_c^{+\infty} f(x)dx$  发散, 与  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛矛盾. 故  $f(x)$  为非负的单调函数.

由  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛, 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0$ , 使当  $x > A$  时, 恒有  
$$\left| \int_{x/2}^x f(t)dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
 但是

$$\left| \int_{x/2}^x f(t)dt \right| = \int_{x/2}^x f(t)dt \geq f(x) \cdot \left( x - \frac{x}{2} \right) = \frac{x}{2} f(x).$$

所以, 当  $x > A$  时,  $0 \leq xf(x) < \varepsilon$ , 即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0 \quad \text{或} \quad f(x) = o(1/x).$$

当  $f(x)$  单调增加时, 只要考虑  $-f(x)$ , 同样可证得

$$f(x) = o(1/x).$$

例 17 证明: 若函数  $f(x)$  在  $0 < x < a$  内单调, 且  $\int_0^a x^p f(x) = 0$  存在, 则  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{p+1} f(x) = 0$ .

证 不妨设  $f(x)$  在  $0 < x < a$  内单调减少. 设  $\exists 0 < \delta < a$ , 使  $0 < x < \delta$  时  $f(x) > 0$ . 此时,

$$\int_{x/2}^x t^p f(t)dt > f(x) \int_{x/2}^x t^p dt = c_p x^{p+1} f(x) > 0,$$

其中 
$$c_p = \begin{cases} \frac{1 - (1/2)^{p+1}}{p+1}, & p \neq -1, \\ \ln 2, & p = -1. \end{cases}$$

故  $c_p > 0$  为常数. 则由  $\int_0^u x^p f(x) dx$  存在, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{x/2}^x t^p f(t) dt = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{p+1} f(x) = 0.$$

若上述  $\delta$  不存在, 由  $f(x)$  单调减少知, 当  $0 < x < a$  时, 恒有  $f(x) < 0$ . 于是, 当  $0 < x < a/2$  时,

$$\int_x^{2x} t^p f(t) dt \leq f(x) \int_x^{2x} t^p dt = c_p^* x^{p+1} f(x) < 0,$$

其中 
$$c_p^* = \begin{cases} \frac{2^{p+1} - 1}{p+1}, & p \neq -1, \\ \ln 2, & p = -1. \end{cases}$$

故  $c_p^* > 0$  为常数.

于是  $|x^{p+1} f(x)| < \frac{1}{c_p^*} \left| \int_x^{2x} t^p f(t) dt \right|$ , 依  $\int_0^a x^p f(x) dx$  存在, 知  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} t^p f(t) dt = 0$ . 故  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{p+1} f(x) = 0$ .

**例 18** 设  $\varphi(x)$  为有界的周期函数, 周期为  $T$ , 且  $\frac{1}{T} \int_0^T \varphi(x) dx = c$ . 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_n^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = c$ .

**证** 因为

$$n \int_n^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = \int_n^{+\infty} \frac{\varphi(n \cdot t/n)}{(t/n)^2} d \frac{t}{n} \stackrel{u=t/n}{=} \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2} \varphi(nu) du,$$

由黎曼定理: 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上绝对可积,  $g(x)$  是周期为  $T$  的函数, 在  $[0, T]$  上正常可积, 则有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} f(x) g(nx) dx = \frac{1}{T} \int_0^T g(x) dx \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

因此, 令  $f(u) = \frac{1}{u^2}$ ,  $g(nu) = \varphi(nu)$ , 得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_n^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) dx \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2} = c.$$

例 19 设  $f(x) = \int_0^x \cos \frac{1}{t} dt$ , 求  $\phi'(0)$ .

$$\text{解 } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \cos(1/t) dt}{x},$$

$$\begin{aligned} \text{但 } \int_0^x \cos \frac{1}{t} dt & \stackrel{1/t=u}{=} \int_{1/x}^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2} du \\ & = \frac{\sin u}{u^2} \Big|_{1/x}^{+\infty} + \int_{1/x}^{+\infty} \frac{2\sin u}{u^3} du = -x^2 \sin \frac{1}{x} + 2 \int_{1/x}^{+\infty} \frac{\sin u}{u^3} du, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \left| \frac{\int_0^x \cos(1/t) dt}{x} \right| & \leq |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| + \frac{2}{|x|} \int_{1/x}^{+\infty} \frac{du}{u^3} \\ & = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| + |x| \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0). \end{aligned}$$

所以  $\phi'(0) = 0$ .

例 20 证明: 若  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 且  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上一致连续, 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

证 由  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上一致连续知,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  (不妨设  $\delta \leq \varepsilon$ ), 当  $x_1, x_2 \in [a, +\infty)$ , 且  $|x_1 - x_2| \leq \delta$  时,  $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

又由  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛知, 对上述  $\delta, \exists N > a$ , 当  $x', x'' > N$  时, 有  $\left| \int_{x'}^{x''} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

对任何  $x > N$ , 取  $x', x'' > N$ , 使  $x' < x < x''$  且  $x'' - x' = \delta$ , 则由

$$\begin{aligned} |f(x)\delta| & = \left| \int_{x'}^{x''} f(x) dt - \int_{x'}^{x''} f(t) dt + \int_{x'}^{x''} f(t) dt \right| \\ & \leq \left| \int_{x'}^{x''} |f(x) - f(t)| dt \right| + \left| \int_{x'}^{x''} f(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} \delta + \frac{\delta^2}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{即得 } |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\delta}{2} \leq \varepsilon, \quad x > N.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

## 第五节 定积分的应用

### 主要内容

#### 一、定积分的几何应用

##### 1. 平面图形的面积

(1) 当图形由  $x = a, x = b$  ( $b > a$ ),  $y = f(x)$  以及  $x$  轴围成 (见图 6.2(a)) 时, 其面积  $S = \int_a^b |f(x)| dx$ .

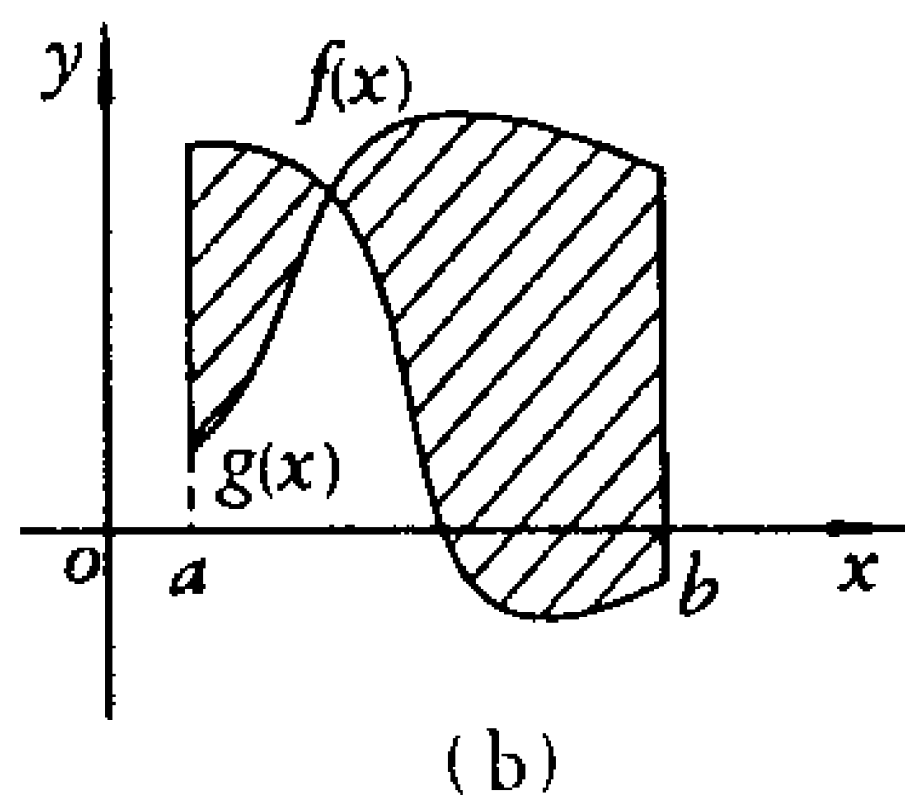
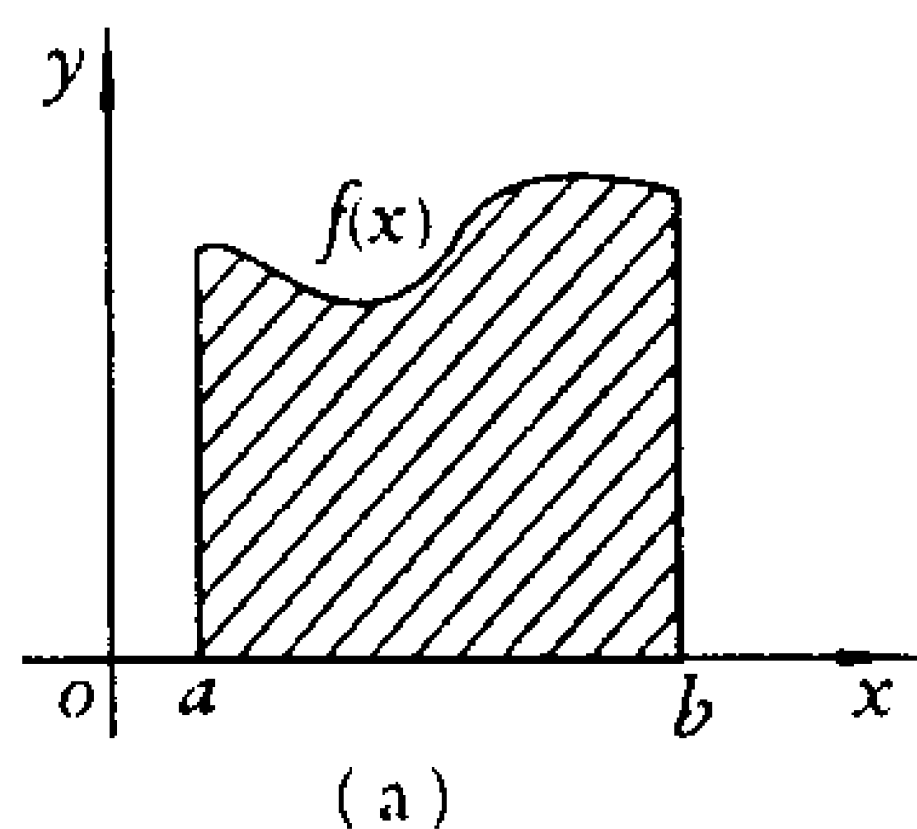


图 6.2

(2) 当图形由  $x = a, x = b$  ( $b > a$ ),  $y = f(x)$  以及  $y = g(x)$  围成 (见图 6.2(b)) 时, 其面积  $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ .

(3) 当图形由  $x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta$  和  $x = a, x = b$  及  $x$  轴围成 (见图 6.3(a)) 时, 其面积  $S = \int_a^b |y(t)| x'(t) dt$ .

(4) 当图形由  $r = r_1(\theta)$  和  $r = r_2(\theta)$  及  $\theta_1 = \alpha, \theta_2 = \beta$  围成 (见图 6.3(b)) 时, 其面积  $S = \frac{1}{2} \int_a^b [r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)] d\theta$ .

##### 2. 由平面截面面积求体积

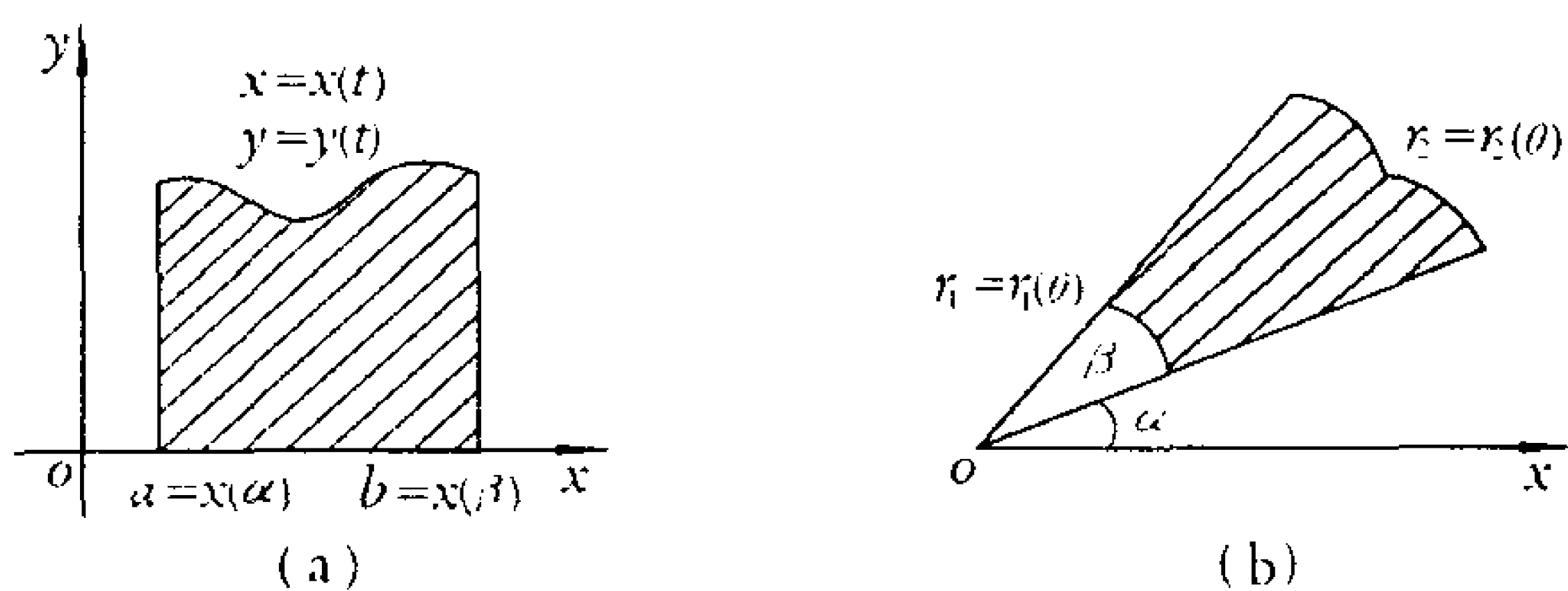


图 6.3

(1) 位于平面  $x=a$  和  $x=b$  之间 ( $b>a$ ), 在任一点  $x \in [a,b]$  处, 垂直于  $x$  轴的平面与立体  $\Omega$  的截面面积为  $A(x)$ , 则立体  $\Omega$  的体积  $V = \int_a^b A(x)dx$  (见图 6.4(a)).

(2) 以直线  $x=a, x=b$ , 曲线  $y=f(x)$  和  $x$  轴围成的曲边梯形, 绕  $x$  轴旋转所得旋转体 (见图 6.4(b)) 的体积  $V = \int_a^b \pi f^2(x)dx$ ; 绕  $y$  轴所得旋转体 (见图 6.4(c)) 的体积  $V = 2\pi \int_a^b x f(x)dx$ .

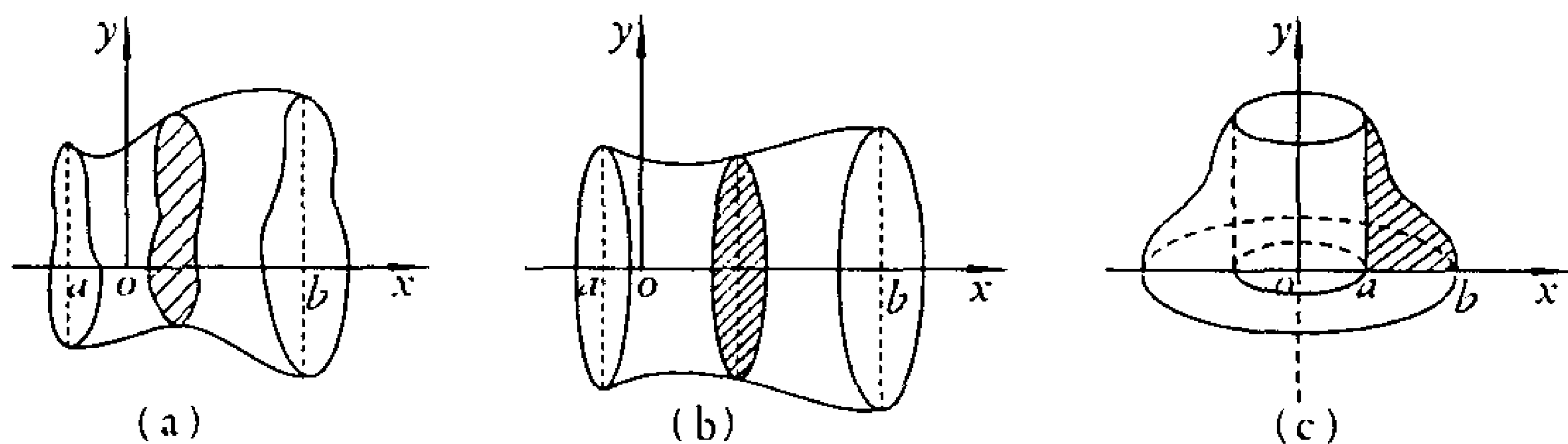


图 6.4

### 3. 平面光滑曲线的弧长

(1) 曲线  $C$  方程由方程  $y=f(x), x \in [a,b]$  表示, 则弧长  $s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx$ ; 若  $C$  方程由  $x=g(y), y \in [c,d]$  表示, 则弧长  $s = \int_c^d \sqrt{1+x'^2}dy$ .

(2) 曲线  $C$  由参数方程  $x=x(t), y=y(t), t \in [\alpha, \beta]$  表示,

则弧长  $s = \int_a^b \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt$ .

(3) 曲线  $C$  由极坐标方程  $r = r(\theta)$ ,  $\alpha \leq \theta \leq \beta$  表示, 则弧长  $s = \int_a^b \sqrt{r^2 + r_\theta'^2} d\theta$ .

#### 4. 光滑曲线的曲率、曲率半径与曲率圆

(1) 光滑曲线  $C$  由方程  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  给出, 当  $f(x)$  二阶可导时, 曲线的曲率  $\kappa = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$ .

(2) 光滑曲线  $C$  由方程  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  给出, 当  $x(t)$ ,  $y(t)$  二阶可导时, 曲线的曲率  $\kappa = \frac{|x_t' y_t'' - x_t'' y_t'|}{(x_t'^2 + y_t'^2)^{3/2}}$ .

(3) 光滑曲线  $C$  由方程  $r = r(\theta)$ ,  $\theta \in [\alpha, \beta]$  给出, 曲线的曲率  $\kappa = \frac{r^2 + 2r_\theta'^2 - r r_\theta''}{[r^2 + r_\theta'^2]^{3/2}}$ .

(4) 若曲线  $C$  在其中一点  $P$  的曲率  $\kappa \neq 0$ , 在点  $P$  处的曲线的法线上所作的半径为  $1/\kappa$  的圆与  $C$  切于  $P$ , 这个圆称为曲线的曲率圆. 曲率圆的半径  $R = 1/\kappa$  称为曲率半径.

#### 5. 旋转曲面的面积

(1) 若曲面  $S$  是平面光滑曲线  $C: y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , 绕  $x$  轴旋转一周所得, 则曲面的面积

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

(2) 若曲面  $S$  是由光滑曲线段  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , 绕  $x$  轴旋转一周所得, 则曲面的面积

$$S = 2\pi \int_a^b |y(t)| \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt.$$

## 二、定积分的物理应用

1. 液体的压力 当平面薄板放置在密度为  $\rho$  的液体中时, 薄板每面上所受静压力与放置角度、深度和薄板面积有关, 可用定积

分计算.

2. 变力做功 变力  $F(x)$  在直线方向上从  $x = a$  到  $x = b$  所做的功  $W = \int_a^b F(x)dx$ .

### 3. 静力矩与质心(重心)

(1) 光滑曲线段  $y = f(x), x \in [a, b]$ , 线密度为  $\mu$ (常数), 则曲线段质量

$$m = \int_a^b \mu \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

$$M_x = \int_a^b \mu y \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad M_y = \int_a^b \mu x \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

质心  $P_0(x_0, y_0)$  为

$$x_0 = M_y/m, \quad y_0 = M_x/m.$$

(2) 平面图形  $y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b$ , 面密度为  $\mu$ (常数), 则图形质量

$$m = \int_a^b \mu (y_2(x) - y_1(x)) dx,$$

$$M_x = \int_a^b \frac{\mu}{2} (y_2^2(x) - y_1^2(x)) dx,$$

$$M_y = \int_a^b \mu x (y_2(x) - y_1(x)) dx$$

质心  $P_0(x_0, y_0)$  为

$$x_0 = M_y/m, \quad y_0 = M_x/m.$$

### 4. 古尔金定理

(1) 第一定理: 弧  $C$  绕不与其相交的轴旋转而成的旋转面的面积, 等于这个弧的长度与这弧的质心所划出的圆周之长的乘积.

(2) 第二定理 面积  $S$  绕不与它相交的轴旋转而成的旋转体, 其体积等于面积  $S$  与这面积的质心所划出的圆周之长的乘积.

## 疑难解析

### 1. 定积分的微元法的理论基础是什么?

答 定积分的微元法的理论基础指的是:能用定积分微元法所求解的量应具备什么条件.

(1) 总量具有区间可加性. 即总量是定义在某一区间上的, 当将区间进行分割时, 总量被分割为小区上的部分量, 总量等于小区间上部分量的和.

面积、弧长、功等具有区间可加性, 而速度、温度不具有区间可加性.

(2) 部分量的近似值具有线性性. 定积分是积分和式  $\sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i) \Delta x_i$  的极限,  $f(\xi_i) \Delta x_i$  是部分量的近似值, 是关于  $\Delta x$  的线性函数. 即部分量的近似值必须能表示为定义在区间上的某一函数  $f(x)$  在小区间上一点  $\xi_i$  的值  $f(\xi_i)$  与小区间长度  $\Delta x_i$  的乘积 ( $\Delta x$  的线性函数).

当总量具有以上两个性质时, 一般可以用定积分的微元法来求解.

### 2. 实施定积分的微元法有哪些步骤?

答 定积分计算某个量是用某个函数  $F(x)$  在区间上的改变量(增量)  $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$  来表示的, 通常的四个步骤是: 细分、取近似、求和、取极限.

实施定积分的微分法一般也遵循这四个步骤: (1) 细分区间  $[a, b]$  为  $n$  个小区间; (2) 求部分量的近似值  $f(\xi_i) \Delta x_i$ ; (3) 作和式  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ ; (4) 取极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ , 得到  $\int_a^b f(x) dx$ .

也可以归纳提炼为两步: (1) 求出  $F(x)$  的微分式(微元):



$dF(x) = f(x)dx$  (由  $f(\xi_i)\Delta x_i$  抽象得出); (2) 将微分式积分, 得  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$  (由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$  得到). 微元法就是求微元得到积分的方法.

对于应用问题, 找出微分式  $f(x)dx$  是最关键的, 其次是确定积分的区间. 至于怎样计算积分的问题, 已经在不定积分与定积分等章解决了, 不再赘述.

## 方法、技巧与典型例题分析

定积分应用的方法和技巧主要是指取微元的方法和技巧, 这要求读者对具体问题有相当的了解, 能通过几何、物理概念找到最合适的微元; 其次是利用对称性、奇偶性、周期性等概念, 将积分变得尽可能的简单.

### 一、定积分在几何中的应用

#### 1. 平面图形的面积

例 1 设  $y = f(x)$  是  $[a, a+h]$  上的单调连续曲线, 证明: 在  $(a, a+h)$  中总存在一点  $\xi$  使得图 6.5 中两阴影部分面积相等.

若  $f(x) = e^x$ , 记  $\xi = a + \theta h$ , 并求  $\lim_{h \rightarrow 0} \theta$ .

证 若两阴影部分面积相等, 则

$$\begin{aligned} & \int_a^{\xi} [f(x) - f(a)] dx \\ &= \int_{\xi}^{a+h} [f(a+h) - f(x)] dx, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} & \int_a^{a+h} f(x) dx \\ &= f(a+h)(a - \xi) - \int_{\xi}^{a+h} [f(a+h) - f(x)] dx \\ & \quad + f(a)(\xi - a) + \int_a^{\xi} [f(x) - f(a)] dx \end{aligned}$$

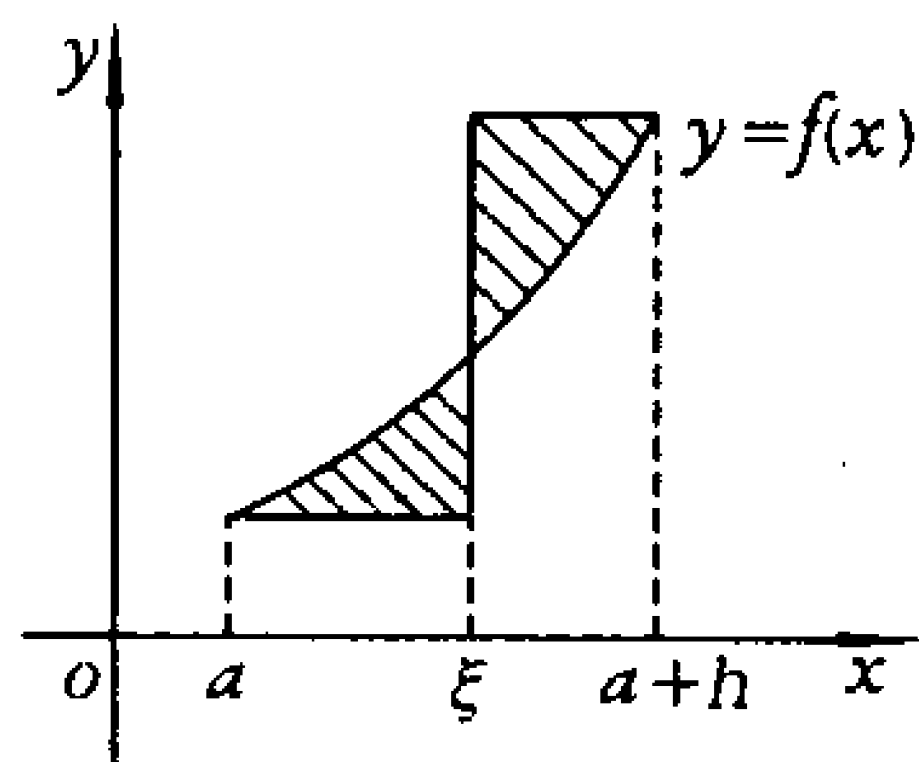


图 6.5

$$= (a+h)f(a+h) - af(a) - \xi[f(a+b) - f(a)].$$

$$\begin{aligned} \text{得 } \xi &= \frac{(a+h)f(a+h) - af(a) - \int_a^{a+h} f(x)dx}{f(a+h) - f(a)} \quad (\text{依中值定理}) \\ &= \frac{a[f(a+h) - f(a)] + hf(a+h) - h - f(\eta)}{f(a+h) - f(a)} \quad (a < \eta < a+h) \\ &= a + h \cdot \frac{f(a+h) - f(\eta)}{f(a+h) - f(a)} > a, \end{aligned}$$

$$\text{且} \quad \xi < a + h.$$

若  $f(x)$  单调增加, 则上式中分子、分母均大于零; 若  $f(x)$  单调减少, 则上式中分子、分母均小于零.

若  $f(x) = e^x$ ,  $\xi = a + \theta h$ , 则由  $\xi$  的第一个等式可得

$$\theta = \frac{he^{a+h} - e^{a+h} + e^a}{h(e^{a+h} - e^a)} = \frac{e^h(h-1) + 1}{h(e^h - 1)},$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \lim_{h \rightarrow 0} \theta &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h(h-1) + 1}{h(e^h - 1)} \stackrel{L'}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h h}{e^h - 1 + he^h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{1 - e^{-h} + h} \stackrel{L'}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{e^{-h} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

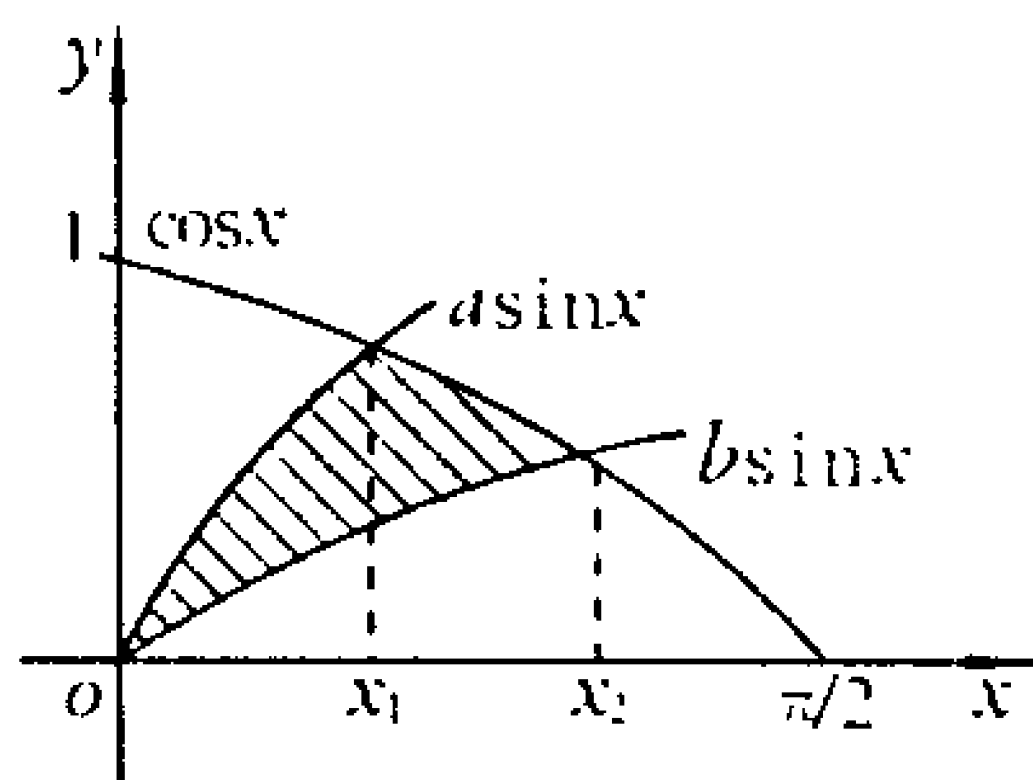


图 6.6

**例 2** 若由曲线  $y = \cos x$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ) 与两坐标轴所围成的图形被曲线  $y = a \sin x$  与  $y = b \sin x$  ( $a > b > 0$ ) 三等分, 求出  $a, b$  的值 (见图 6.6).

**解** 设曲线  $y = \cos x$  与曲线  $y = a \sin x$  和  $y = b \sin x$  的交点的横坐标分别为  $x_1$  和  $x_2$ .

$$\text{由 } \cos x_1 = a \sin x_1, \cos x_2 = b \sin x_2 \text{ 得, } \tan x_1 = \frac{1}{a}, \tan x_2 = \frac{1}{b}.$$

由  $a > b$  及在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上  $y = \tan x$  的单调性知

$$\int_0^{x_1} \cos x dx = \int_0^{x_1} a \sin x dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{x_1} a \sin x dx + \int_{x_1}^{x_2} \cos x dx - \int_0^{x_2} b \sin x dx \\
&= \int_0^{x_2} b \sin x dx + \int_{x_2}^{\pi/2} \cos x dx.
\end{aligned}$$

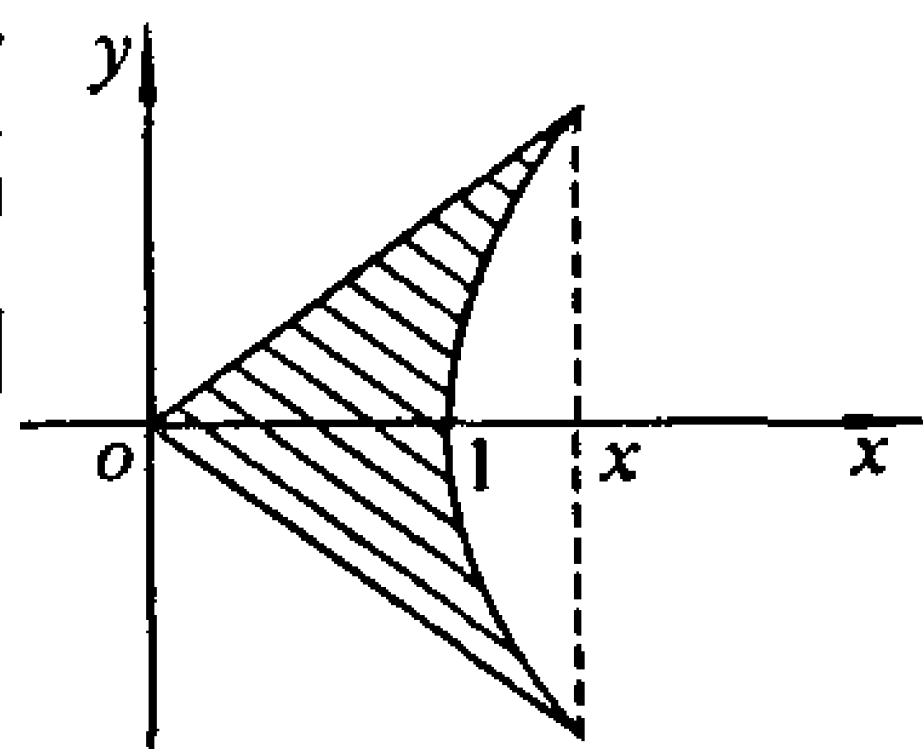
得 
$$\begin{cases} 2\sin x_1 + 2a\cos x_1 - 2a = \sin x_2 + b\cos x_2 - b, \\ \sin x_1 + a\cos x_1 - a = -b\cos x_2 + b + 1 - \sin x_2, \end{cases}$$

解得 
$$\begin{cases} \sin x_1 = 1/\sqrt{1+a^2}, & \cos x_1 = a/\sqrt{1+a^2}, \\ \sin x_2 = 1/\sqrt{1+b^2}, & \cos x_2 = b/\sqrt{1+b^2}. \end{cases}$$

代入上面等式,得

$$\begin{cases} 2\sqrt{1+a^2} - 2a = \sqrt{1+b^2} - b, \\ \sqrt{1+a^2} - a = b + 1 - \sqrt{1+b^2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4/3, \\ b = 5/12. \end{cases}$$

例3 在等轴双曲线  $x^2 - y^2 = 1$  上任取点  $(x, y)$ , 求由双曲线与点  $(x, y)$  和  $(x, -y)$  同原点的连线所围成的曲边三角形的面积(见图 6.7).



解 由  $x > 0$ , 显见图形对称于  $x$  轴, 则

$$\begin{aligned}
S &= 2 \left( \frac{xy}{2} - \int_1^x \sqrt{t^2 - 1} dt \right) \\
&= xy - [x\sqrt{x^2 - 1} - \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|] \\
&= xy - xy + \ln(x + y) = \ln(x + y) \\
&\Rightarrow x + y = e^S.
\end{aligned}$$

图 6.7

由 
$$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow x - y = e^{-S},$$

知 
$$x = \frac{e^S + e^{-S}}{2} = \cosh S, \quad y = \frac{e^S - e^{-S}}{2} = \sinh S.$$

例4 利用图形(见图 6.8)面积计算定积分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}}.$$

解 因为  $f(x) = \frac{1}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}}$  经过点  $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), C(0, 1)$ ,

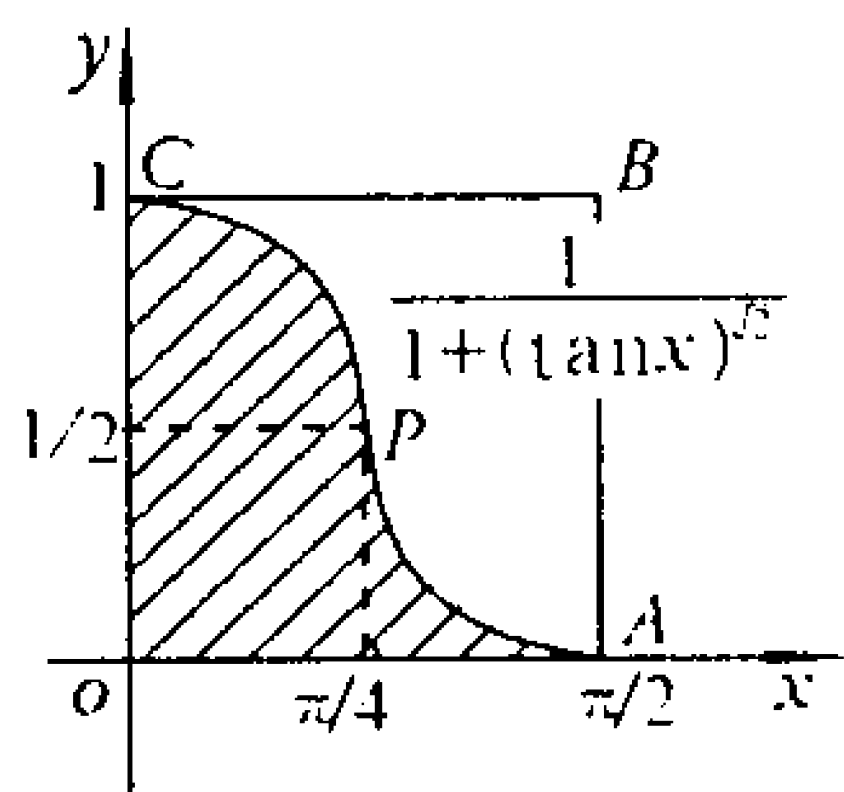


图 6.8

$P\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ , 所以积分  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}}$  在数值上恰为矩形  $ABCO$  面积的一半, 即

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{4}.$$

可以通过证明点  $P\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$  是点  $(x, f(x))$

和点  $\left(\frac{\pi}{2} - x, f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$  的中点来证明曲线  $f(x)$  关于  $P$  对称. 因为

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) &= \frac{1}{1 + [\tan(\pi/2 - x)]^{\sqrt{2}}} = \frac{1}{1 + (\cot x)^{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{(\tan x)^{\sqrt{2}}}{1 + \tan^{\sqrt{2}} x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad \frac{1}{2} \left[ f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right] &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}} + \frac{(\tan x)^{\sqrt{2}}}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}} \right] = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

即曲线  $f(x)$  过点  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ .

**例 5** 在抛物线  $C_1: y = x^2 - 4x + 3$  上任取一点  $P$ , 向抛物线  $C_2: y = x^2 - 4x + 7$  作两切线, 记两切点为  $A, B$ . 证明: 曲边三角形  $PAB$  面积  $S$  为常数 (见图 6.9).

**证** 因为  $C_1: y = (x-1)^2 - 1, C_2: y = (x-1)^2 + 3$ , 不妨化为  $y = x^2$  和  $y = x^2 + 4$ . 下面我们就更一般的情形  $C_1: y = ax^2$  和  $C_2: y = ax^2 + b$  ( $a > 0, b > 0$ ) 来进行讨论.

设点  $P$  的坐标为  $(t, at^2)$ , 则过点  $P$  的直线与  $C_2$  相切于点  $(x, ax^2 + b)$ , 从而切线斜率为

$$\frac{(ax^2 + b) - at^2}{x - t} = 2ax.$$

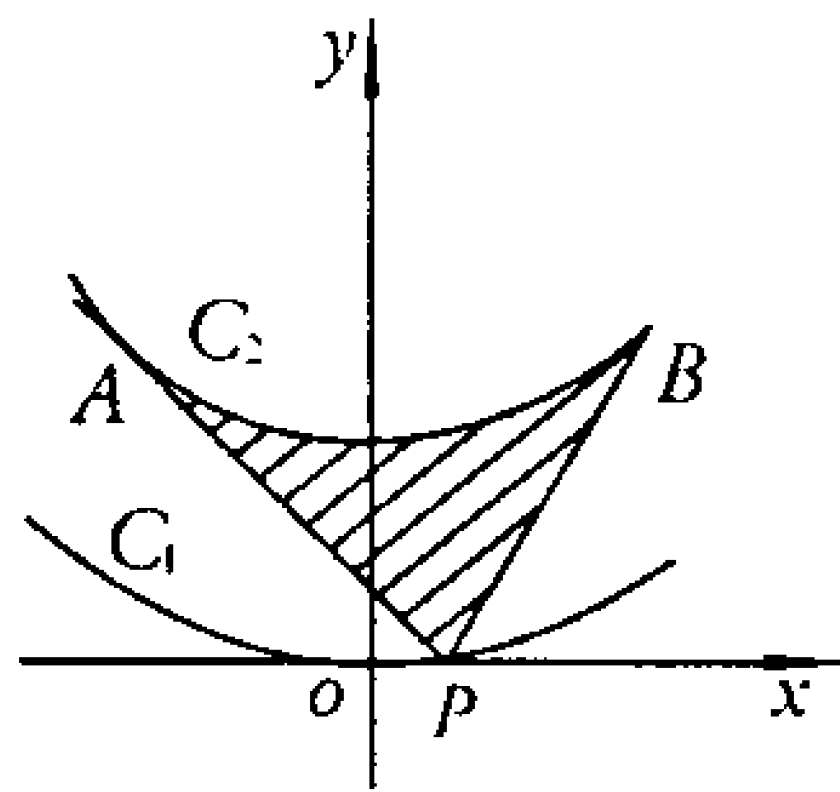


图 6.9

解得两切点坐标为

$$A(t - \sqrt{b/a}, a(t - \sqrt{b/a})^2 + b),$$

$$B(t + \sqrt{b/a}, a(t + \sqrt{b/a})^2 + b).$$

两切线为  $PA, PB$ , 切线方程分别为

$$y = 2a(t - \sqrt{b/a})(x - t) + at^2,$$

$$y = 2a(t + \sqrt{b/a})(x - t) + at^2.$$

从而, 曲边三角形  $PAB$  面积

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{t-\sqrt{b/a}}^t \{ (ax^2 + b) - [2a(t - \sqrt{b/a})(x - t) + at^2] \} dx \\ &\quad + \int_t^{t+\sqrt{b/a}} \{ (ax^2 + b) - [2a(t + \sqrt{b/a})(x - t) + at^2] \} dx \\ &= a \int_{t-\sqrt{b/a}}^t (x + \sqrt{b/a} - t)^2 dx + a \int_t^{t+\sqrt{b/a}} (x - \sqrt{b/a} - t)^2 dx \\ &= \frac{a}{3} [(x + \sqrt{b/a} - t)^3] \Big|_{t-\sqrt{b/a}}^t + \frac{a}{3} [(x - \sqrt{b/a} - t)^3] \Big|_t^{t+\sqrt{b/a}} \\ &= \frac{b}{3a} \sqrt{ab} + \frac{b}{3a} \sqrt{ab} = \frac{2b\sqrt{ab}}{3a}. \end{aligned}$$

可知, 曲边三角形面积与  $t$  无关, 与  $P$  点的取法也无关, 是一个常数.

**例 6** 由点  $M(2a, 0)$  向椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  作切线  $MP$  和  $MQ$ , 求曲边三角形  $MPQ$  所围图形的面积 (见图 6.10).

**解** 先求切线  $MP, MQ$  的方程. 对椭圆方程两边关于  $x$  求导, 得

$$2b^2 + 2a^2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{b^2x}{a^2y},$$

则过任意点  $(x, y)$  的切线方程为

$$Y - y = -\frac{b^2x}{a^2y}(X - x) \Rightarrow a^2y(Y - y) + b^2x(X - x) = 0.$$

将  $(X, Y)$  以  $(2a, 0)$  代入, 得

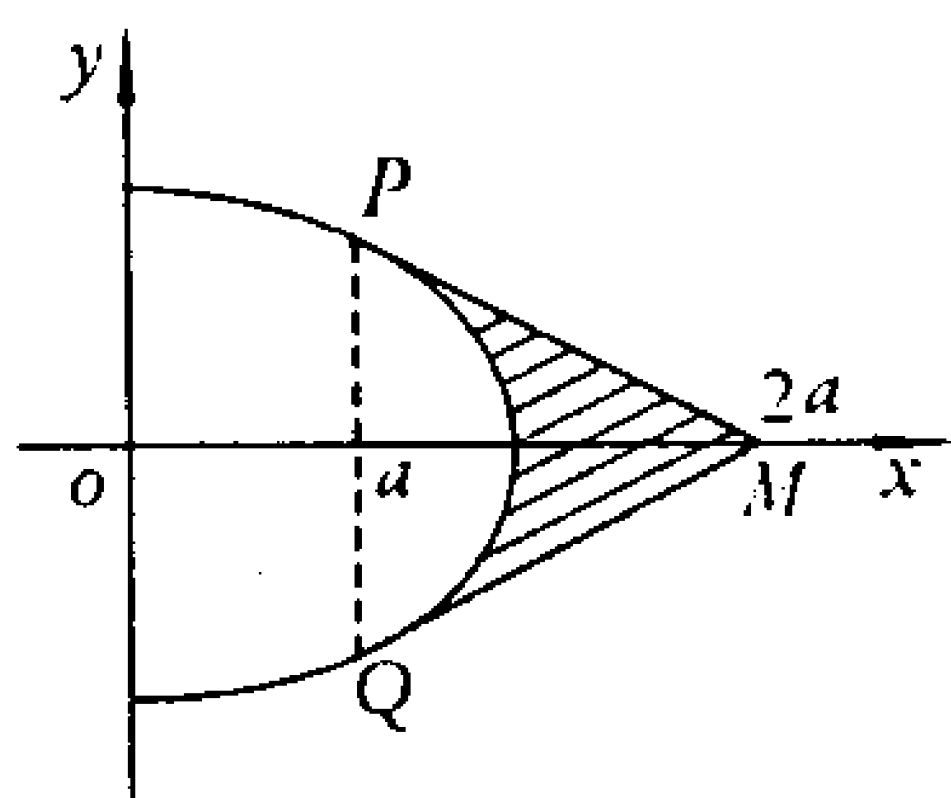


图 6.10

$$2ab^2x = b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

所以,点  $P$  坐标为  $\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$ , 点  $Q$  坐标为  $\left(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$ .

由面积关于  $x$  轴的对称性,得

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\sqrt{3}b/2} \left( 2a - \frac{\sqrt{3}a}{b}y - \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \right) dy \\ &= 2 \left[ 2ay - \frac{\sqrt{3}a}{3b}y^2 - \frac{a}{2b} \left( y \sqrt{b^2 - y^2} + b^2 \arcsin \frac{y}{b} \right) \right]_0^{\sqrt{3}b/2} \\ &= \left( \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) ab. \end{aligned}$$

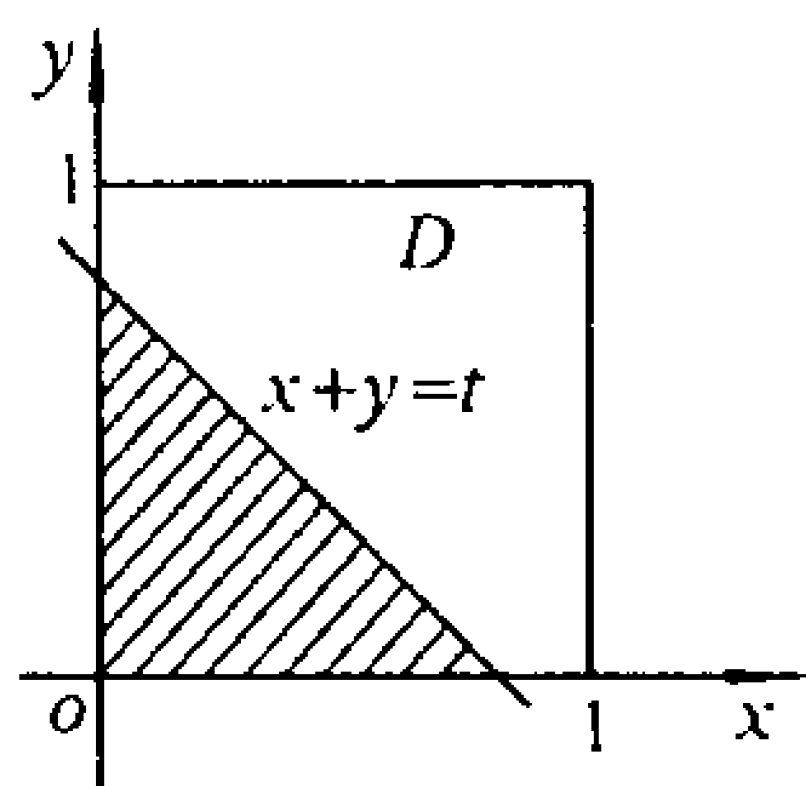


图 6.11

**例 7** 设  $xoy$  平面上有正方形  $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  及直线  $l: x + y = t$  ( $t \geq 0$ ). 若  $S(t)$  表示正方形  $D$  位于直线  $l$  左下方部分面积 (见图 6.11), 求  $\int_0^x S(t) dt$  ( $x \geq 0$ ).

**解** 因为

$$S(t) = \begin{cases} t^2/2, & 0 \leq t \leq 1, \\ -t^2/2 + 2t - 1, & 1 < t \leq 2, \\ 1, & t > 2, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \int_0^x S(t) dt &= \begin{cases} \int_0^x t^2/2 dt \\ \int_0^1 t^2/2 dt + \int_1^x (-t^2/2 + 2t - 1) dt \\ \int_0^1 t^2/2 dt + \int_1^2 (-t^2/2 + 2t - 1) dt + \int_2^x 1 dt \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^3/6, & 0 \leq x \leq 1, \\ -x^3/6 + x^2 - x + \frac{1}{3}, & 1 < x \leq 2, \\ x - 1, & x > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

**例 8** 已知抛物线  $y = px^2 + qx$  ( $p < 0, q > 0$ ) 在第一象限内与直线  $x + y = 5$  相切, 设抛物线与  $x$  轴所围的平面图形面积为  $S$  (见图 6.12).

(1)  $p$  和  $q$  为何值时,  $S$  达到最大值?

(2) 求出此最大值.

解 由  $y = px^2 + qx$  和  $y = 0$  求得抛物线与  $x$  轴交点的横坐标为  $x_1 = 0, x_2 = -q/p$ . 故

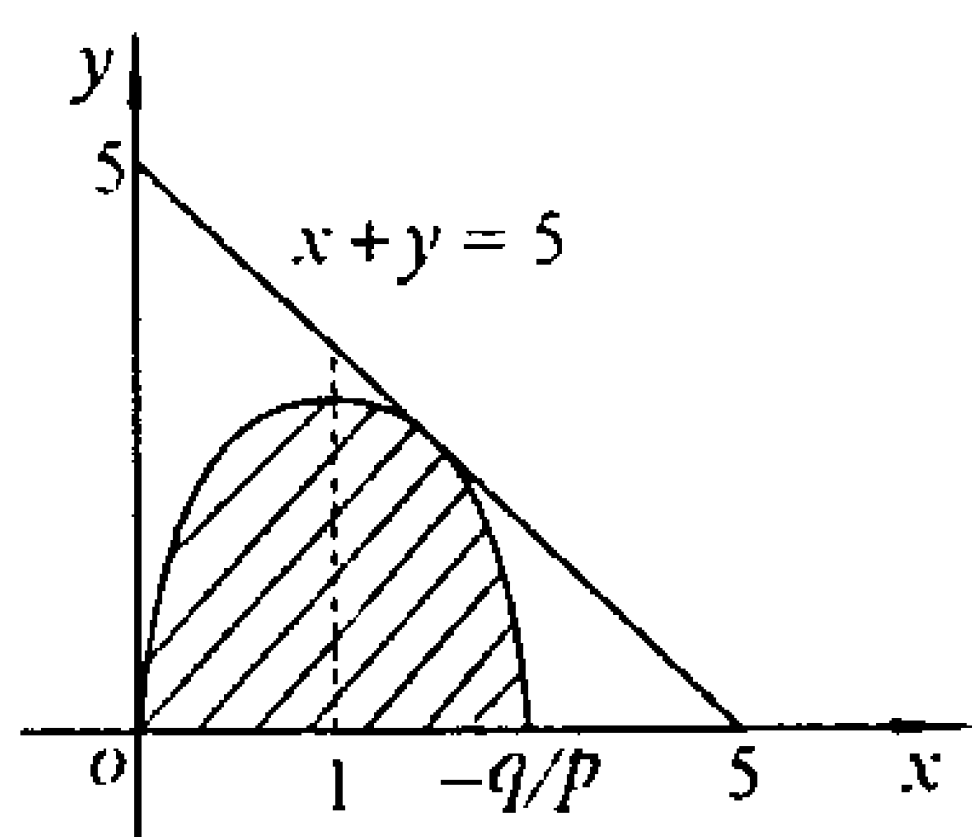


图 6.12

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{-q/p} (px^2 + qx) dx \\ &= \left( \frac{p}{3}x^3 + \frac{q}{2}x^2 \right) \Big|_0^{-q/p} = \frac{q^3}{6p^2}. \end{aligned}$$

由  $x + y = 5$  和  $y = px^2 + qx$  相切, 得方程  $px^2 + (q+1)x - 5 = 0$  只有惟一解, 故判别式必等于零. 即

$$\Delta = (q+1)^2 + 20p = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{20}(1+q)^2,$$

所以

$$S = S(q) = \frac{200q^3}{3(q+1)^4},$$

且

$$S'(q) = \frac{200q^3(3-q)}{3(q+1)^5} = 0 \Rightarrow q = 3.$$

当  $0 < q < 3$  时,  $S'(q) > 0$ ; 当  $q > 3$  时,  $S'(q) < 0$ . 于是当  $q = 3$  时,  $S(q)$  有极大值, 即最大值.

$$\text{当 } q = 3 \text{ 时, } p = -\frac{1}{20}(1+3)^2 = -\frac{4}{5}, S = \frac{225}{32}.$$

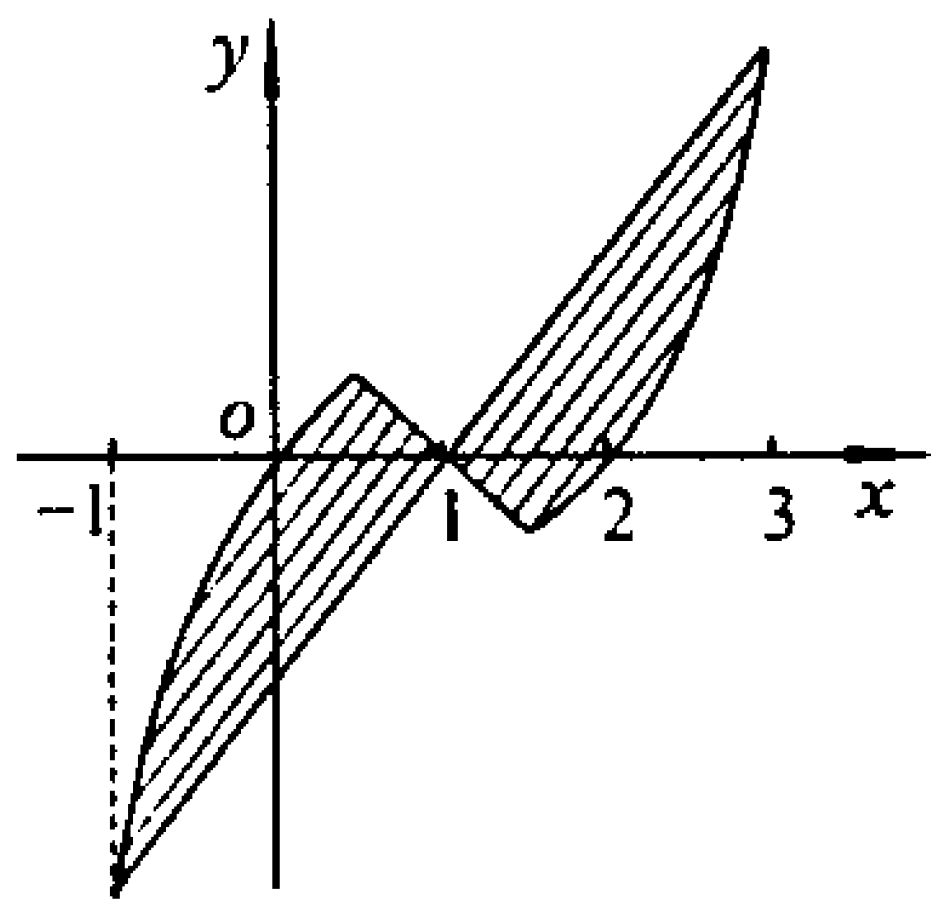


图 6.13

例 9 求曲线  $y = x(x-1)(x-2)$  与直线  $y = 3(x-1)$  所围图形面积(见图 6.13).

解 面积微元为

$$dS = |x(x-1)(x-2) - 3(x-1)| dx,$$

所以, 所求图形面积

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^3 |x(x-1)(x-2) - 3(x-1)| dx \\ &= \int_{-1}^3 |x-1| |(x-3)(x+1)| dx \\ &= \int_{-1}^1 (1-x)(x-3)(x+1) dx \end{aligned}$$

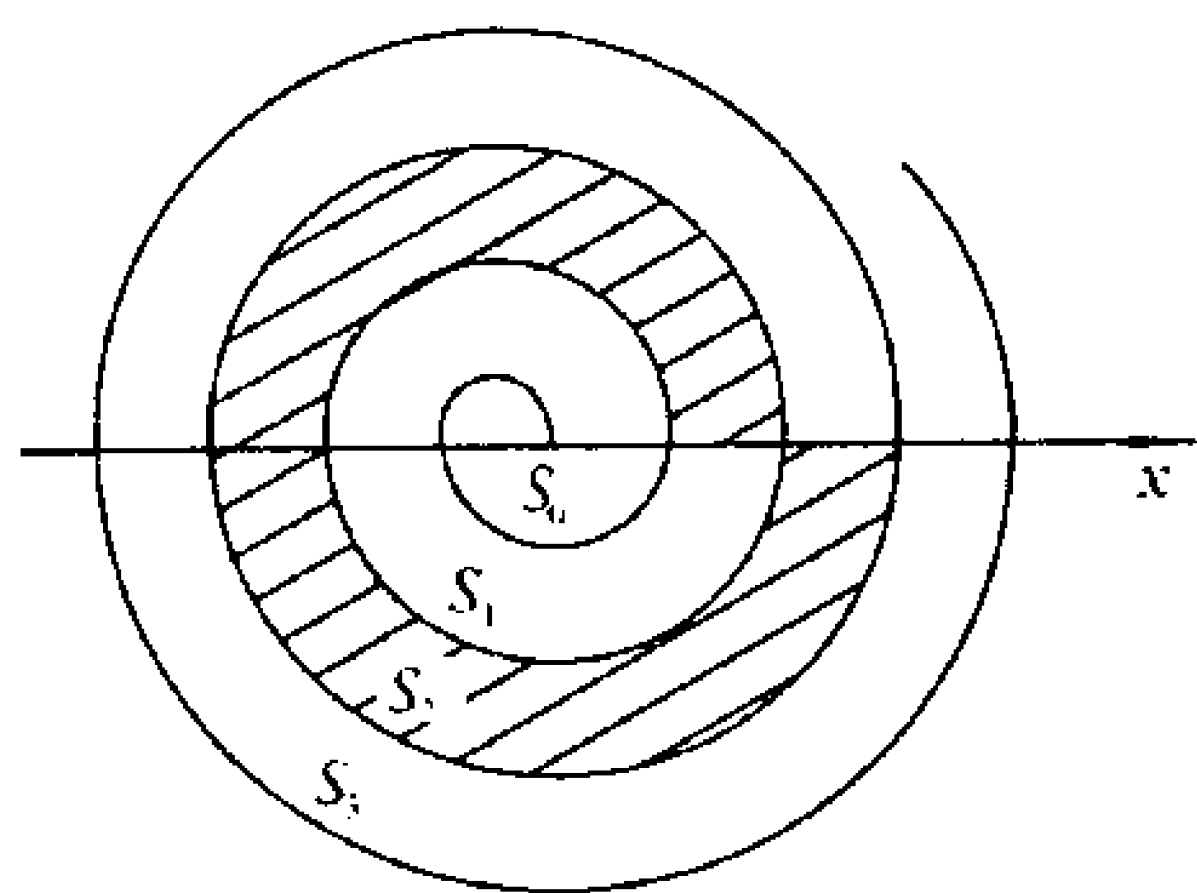


图 6.14

$$+ \int_1^3 (x-1)(x-3)(x+1)dx = 8.$$

**例 10** 设阿基米德螺线  $r = a\theta$  ( $a \geq 0, \theta \geq 0$ ) 每相邻两圈间的面积为  $S_0, S_1, S_2, \dots$  (见图 6.14), 证明:  $S_1, S_2, S_3, \dots$  成等差数列.

**证** 利用极坐标下的面积计算公式, 得

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{2} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} (a\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{4}{3} a^2 \pi^3 (3k^2 + 3k + 1), \end{aligned}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

因为  $S_0 = A_0, S_1 = A_1 - A_0, S_2 = A_2 - A_1, \dots$ , 所以

$$\begin{aligned} S_k &= A_k - A_{k-1} = \frac{4}{3} a^2 \pi^3 [3k^2 + 3k + 1 - (3k^2 - 3k + 1)] \\ &= 8a^2 \pi^3 k, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

可知,  $S_1, S_2, S_3, \dots$  是公差为  $8a^2 \pi^3$  的等差数列.

**例 11** 求闭曲线  $y^2 = x^2 - x^4$  所围图形的面积.

**解** 此图形特征可由方程得出, 它关于  $x, y$  轴对称. 令  $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ , 得出曲线方程为

$$r^2 \sin^2 \theta = r^2 \cos^2 \theta - r^4 \cos^4 \theta \Rightarrow r^2 \cos^4 \theta = \cos 2\theta \geq 0,$$

所以  $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$  或  $3\pi/4 \leq \theta \leq 5\pi/4$ . 故

$$dS_1 = \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \frac{\cos 2\theta}{\cos^4 \theta} d\theta,$$

于是, 由图形的对称性, 得

$$\begin{aligned} S &= 4S_1 = 4 \times \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta}{\cos^4 \theta} d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} (1 - \tan^2 \theta) d\tan \theta \\ &= 2 \left( \tan \theta - \frac{1}{3} \tan^3 \theta \right) \Big|_0^{\pi/4} = 2 \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

类似地, 可求得闭曲线  $(x^2 + y^2) = a^2(x^4 + y^4)$  所围图形的面积. 曲线的极坐标方程为  $r^2 = a^2 \left[ 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \right]$ . 由图形关于  $x$  轴



和  $y$  轴的对称性, 可得

$$\begin{aligned} S &= 4 \times \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} r^2 d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} a^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \right) d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} a^2 d\theta + a^2 \int_0^{\pi/2} \cos 4\theta d\theta = \frac{3}{4} \pi a^2. \end{aligned}$$

例 12 求封闭曲线  $r = \frac{2at}{1+t^2}$ ,  $\theta = \frac{\pi t}{1+t}$  所围图形的面积.

解 因为当曲线封闭时,  $t$  由 0 变到  $+\infty$ , 所以, 所围图形面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} r^2 d\theta = 2\pi a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2(1+t)^2} dt \\ &= 2\pi a^2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ \int_0^b \frac{dt}{4(1+t)^2} - \frac{1}{4} \int_0^b \frac{dt}{1+t^2} + \frac{1}{2} \int_0^b \frac{tdt}{(1+t^2)^2} \right] \\ &= 2\pi a^2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{4(1+t)} - \frac{1}{4} \arctan t - \frac{1}{4(1+t^2)} \right] \Big|_0^b \\ &= \pi a^2 (1 - \pi/4). \end{aligned}$$

## 2. 其它几何应用

例 13 已知曲线为星形线 (见图 6.15):  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$  ( $a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi$ ). 求:

(1) 所围成图形的面积  $S_1$ .

(2) 绕  $x$  轴旋转所得旋转体的体积  $V$ ;

(3) 绕直线  $y = x$  旋转所得旋转曲面面积

$S_2$ .

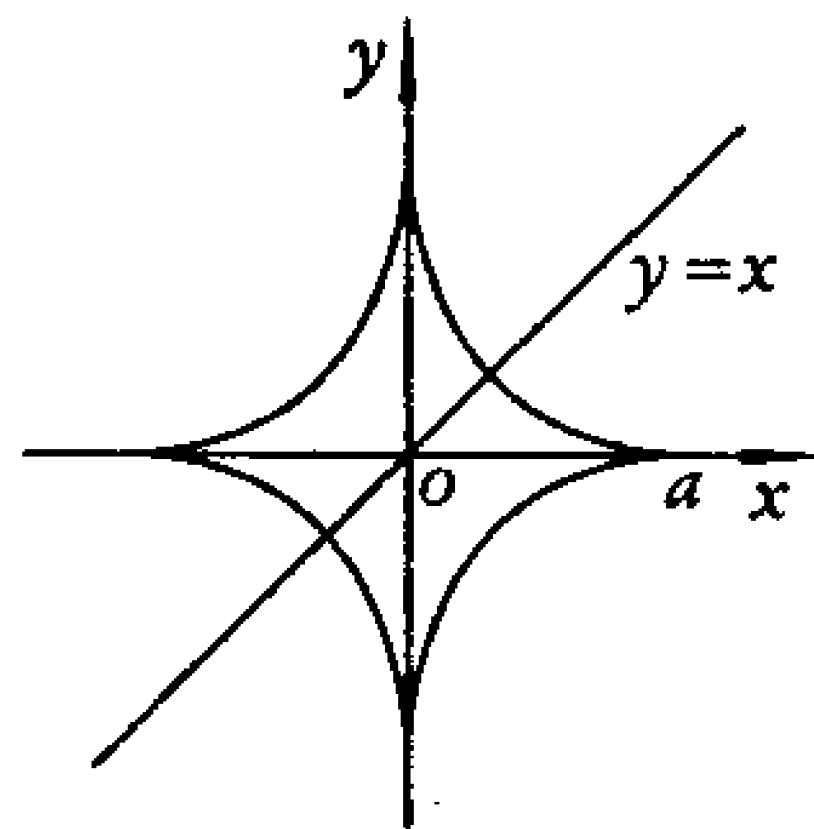


图 6.15

解 (1) 由对称性, 得

$$\begin{aligned} S_1 &= 4 \int_{\pi/2}^0 y(t) x'(t) dt = 4 \int_0^{\pi/2} a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t \sin t dt \\ &= 12a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos^2 t dt = 12a^2 \int_0^{\pi/2} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt \\ &= 12a^2 \left( \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{3}{8} \pi a^2. \end{aligned}$$

$$(2) V = 2\pi \int_0^{\pi/2} |a^2 \sin^6 t (-3a \cos^2 t \sin t)| dt$$

$$\begin{aligned}
&= 6\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^7 t (1 - \sin^2 t) dt \\
&= 6\pi a^3 \left( \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{7 \cdot 5 \cdot 3} - \frac{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} \right) = \frac{32}{105} \pi a^3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad dS_2 &= \sqrt{x_i'^2 + y_i'^2} dt \\
&= \begin{cases} 3a \sin t \cos t dt, & \pi/4 \leq t \leq \pi/2, \\ -3a \sin t \cos t dt, & \pi/2 \leq t \leq 3\pi/4. \end{cases}
\end{aligned}$$

由对称性,得旋转曲面面积

$$\begin{aligned}
S_2 &= 2 \left( 2\pi \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \frac{y-x}{\sqrt{2}} \sqrt{x_i'^2 + y_i'^2} dt \right) \\
&= \frac{4\pi}{\sqrt{2}} \cdot 3a^2 \left[ \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin^3 t - \cos^3 t) \sin t \cos t dt \right. \\
&\quad \left. - \int_{\pi/2}^{3\pi/4} (\sin^3 t - \cos^3 t) \sin t \cos t dt \right] \\
&= \frac{12\pi}{\sqrt{2}} a^2 \left( \frac{\sin^5 t + \cos^5 t}{5} \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} - \frac{\sin^5 t + \cos^5 t}{5} \Big|_{\pi/2}^{3\pi/4} \right) \\
&= \frac{3}{5} \pi a^2 (4\sqrt{2} - 1).
\end{aligned}$$

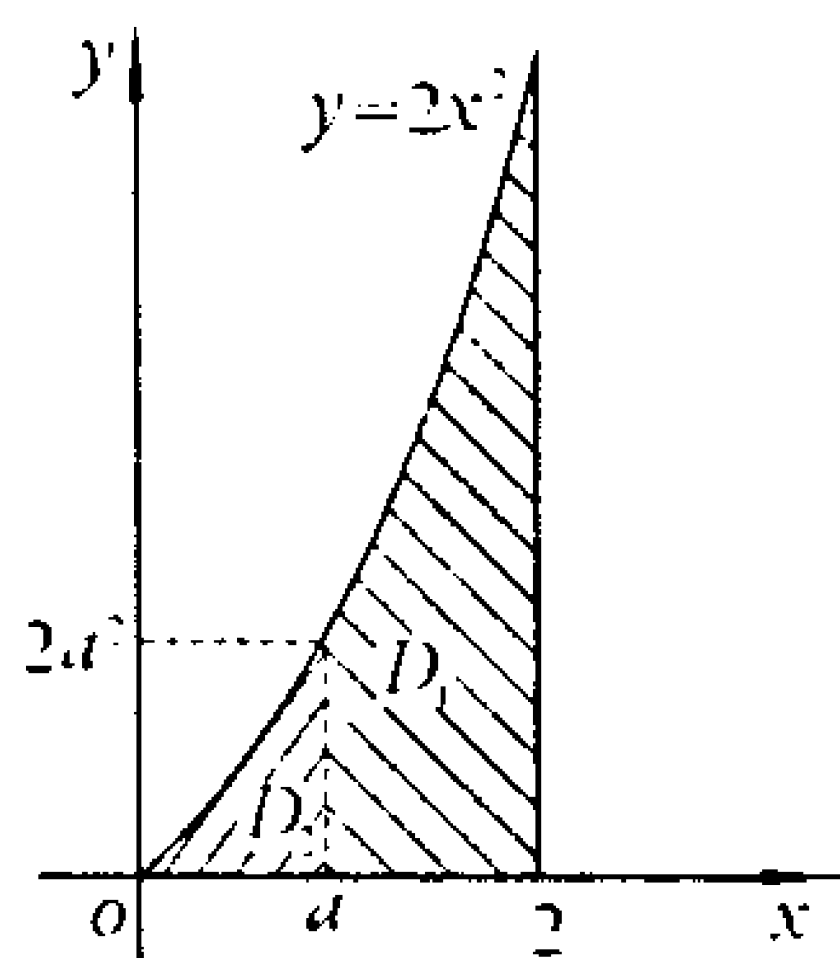


图 6.16

**例 14** 设  $D_1$  是由抛物线  $y = 2x^2$  和直线  $x = a, x = 2$  和  $y = 0$  所围成的区域;  $D_2$  是由抛物线  $y = 2x^2$  和直线  $y = 0, x = a$  所围成的区域, 其中  $0 < a < 2$  (见图 6.16).

(1) 求由  $D_1$  绕  $x$  轴旋转所成旋转体体积  $V_1$  和由  $D_2$  绕  $y$  轴旋转成旋转体体积  $V_2$ ;

(2) 问: 当  $a$  为何值时,  $V_1 + V_2$  取得最大值? 试求此最大值.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad (1) \quad V_1 &= \pi \int_a^2 (2x^2)^2 dx \\
&= \frac{4}{5} \pi (32 - a^5),
\end{aligned}$$

$$V_2 = \pi a^2 \cdot 2a^2 - \pi \int_0^{2a^2} \frac{y}{2} dy = 2\pi a^4 - \pi a^4 = \pi a^4.$$

$$(2) V = V_1 + V_2 = \frac{4}{5}\pi(32 - a^5) + \pi a^4,$$

$$V'_a = 4\pi a^3(1 - a),$$

令  $V'_a = 0$ , 知  $a = 1$  为惟一驻点.

当  $0 < a < 1$  时,  $V'_a > 0$ ; 当  $a > 1$  时,  $V'_a < 0$ . 故  $a = 1$  时有极大值, 即最大值, 所以最大值  $V(1) = \frac{129}{5}\pi$ .

**例 15** 求微分方程  $xdy + (x - 2y)dx = 0$  的一个解  $y = y(x)$ , 使得由曲线  $y = y(x)$  与直线  $x = 1, x = 2$  及  $x$  轴所围成的平面图形绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积最小.

**解** 将微分方程化为  $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = -1$ , 即得

$$y = e^{\int 2/x dx} \left[ -e^{\int 2/x dx} dx + c \right] = x^2 \left( \frac{1}{x} + c \right) = x + cx^2,$$

故旋转体体积

$$V(c) = \int_1^2 \pi(x + cx^2)^2 dx = \pi \left( \frac{31}{5}c^2 + \frac{15}{2}c + \frac{7}{3} \right),$$

$$V'(c) = \pi \left( \frac{62}{5}c + \frac{15}{2} \right),$$

令  $V'(c) = 0$ , 知  $c = -\frac{75}{124}.$

因为  $V''(c) = \frac{62}{5} > 0$ , 所以  $c = -\frac{75}{124}$  为惟一极小值点, 即最小值点. 于是

$$y = x - \frac{75}{124}x^2.$$

**例 16** 求曲线  $y = x^2 - 2x, y = 0, x = 1, x = 3$  所围成的平面图形的面积  $S$ , 并求该图形绕  $y$  轴旋转一周所得旋转体的体积  $V$  (见图 6.17).

**解**  $S = S_1 + S_2.$

$$S_1 = \int_1^2 (2x - x^2) dx = \left( x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_1^2 = \frac{2}{3},$$

$$S_2 = \int_2^3 (x^2 - 2x) dx = \left( \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right) \Big|_2^3 = \frac{4}{3},$$

所以, 所求图形面积  $S = S_1 + S_2 = 2$ .

平面图形  $S_1$  绕  $y$  轴旋转一周所得旋转体的体积

$$V_1 = \pi \int_{-1}^0 (1 + \sqrt{1+y})^2 dy - \pi = \frac{11}{6}\pi;$$

平面图形  $S_2$  绕  $y$  轴旋转一周所得旋转体的体积

$$V_2 = 27\pi - \pi \int_0^3 (1 + \sqrt{1+y})^2 dy = \frac{43}{6}\pi.$$

所以, 所求旋转体体积  $V = V_1 + V_2 = 9\pi$ .

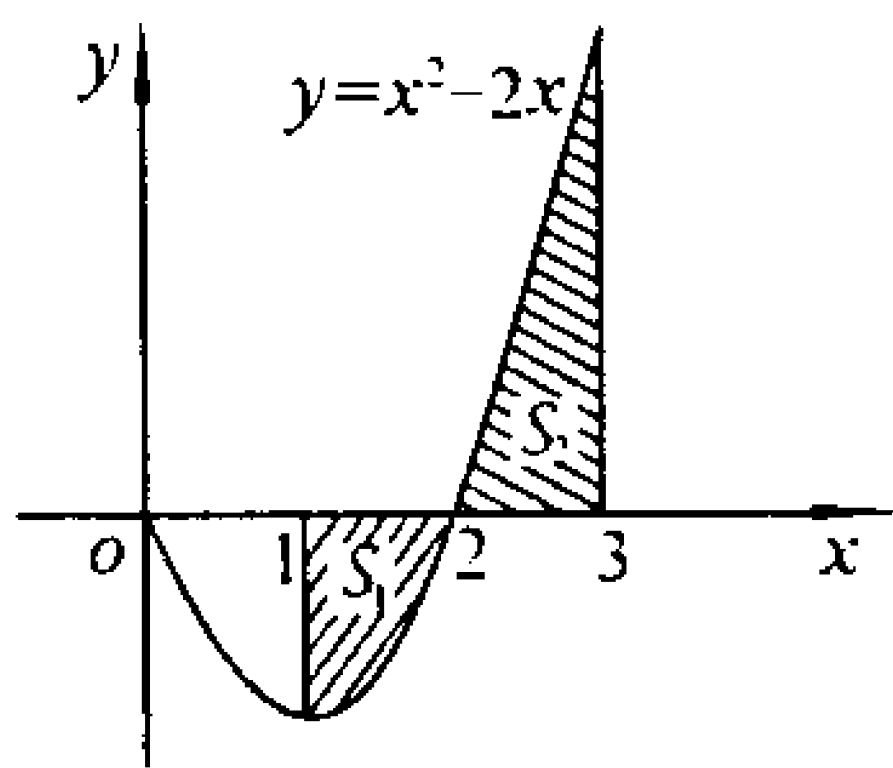


图 6.17

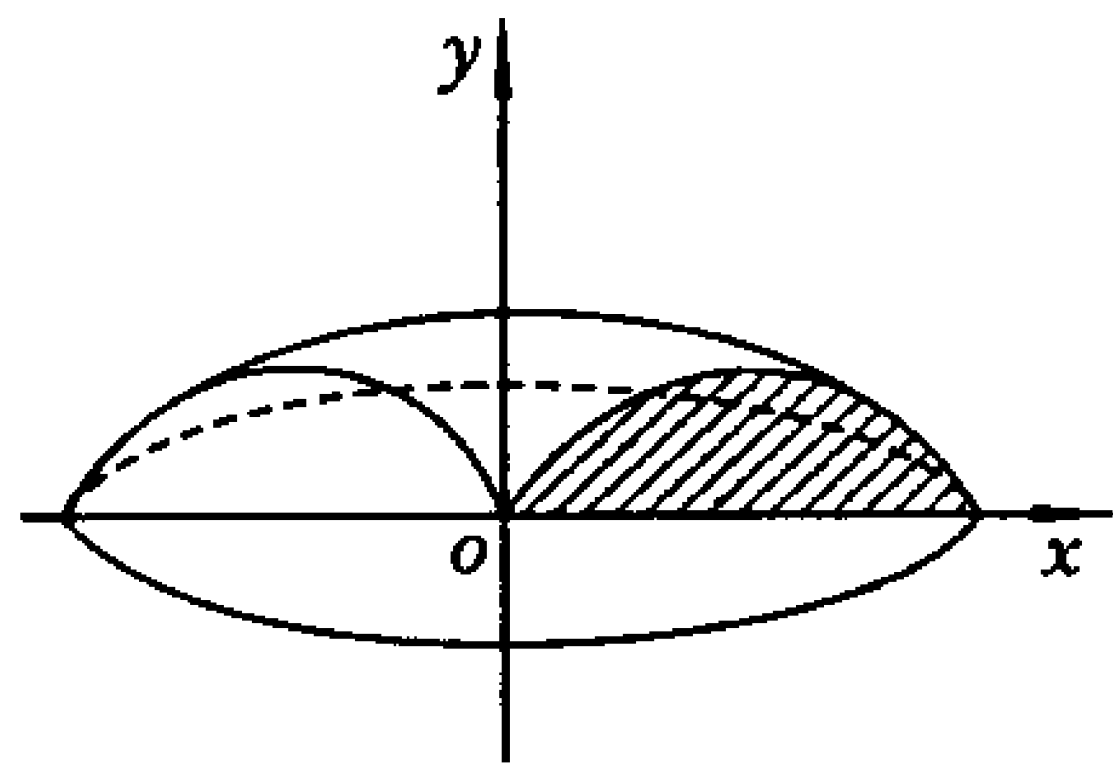


图 6.18

例 17 求摆线:  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  与  $x$  轴围成的平面图形绕  $y$  轴旋转所得旋转体的体积  $V$  (见图 6.18).

$$\begin{aligned} \text{解 } V &= 2\pi \int_0^{2\pi} x \cdot y dx = 2\pi \int_0^{2\pi} a^3 (t - \sin t) (1 - \cos t)^2 dt \\ &= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \left[ 1 - 2\cos t + \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) \right] dt \\ &= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} \left( \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}\sin t - 2t\cos t + \sin 2t + t\cos 2t \right. \\ &\quad \left. - \sin t \cos 2t \right) dt = 2\pi a^3 \cdot 2\pi^2 \\ &= 6\pi^3 a^3. \end{aligned}$$

例 18 立体底面为抛物线  $y = x^2$  与直线  $y = 1$  围成的平面图形, 如图 6.19 所示, 而任一垂直于  $y$  轴的截面分别是: (1) 正方形 (见图(a)); (2) 等边三角形 (见图(b)); (3) 半圆形 (见图(c)). 求这三种情形下立体的体积.

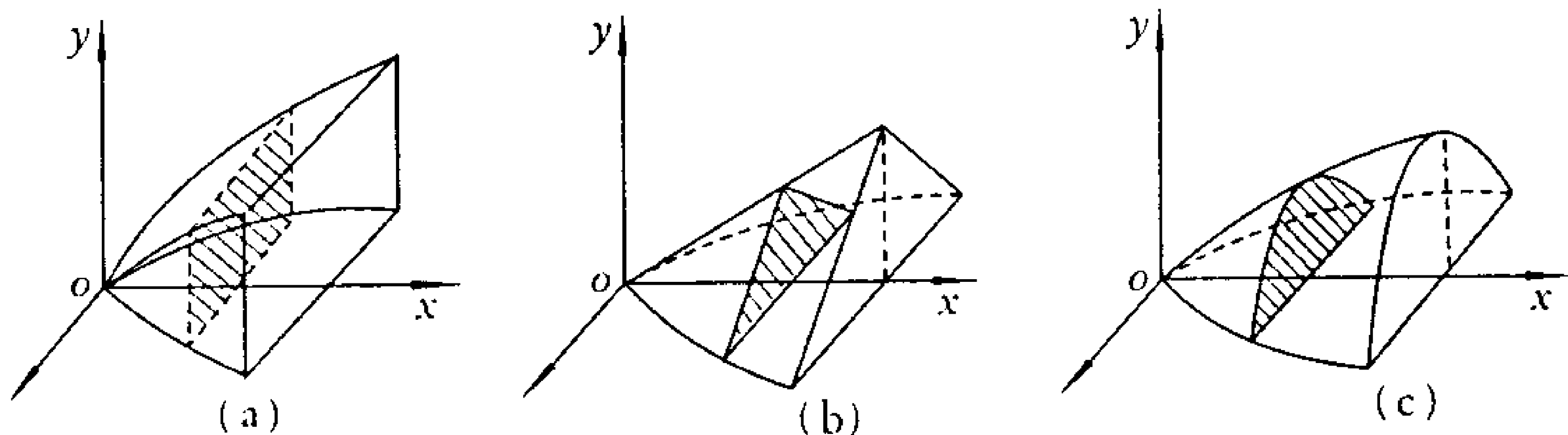


图 6.19

解 先求出三种情形下的截面积  $S_1, S_2, S_3$ , 再利用公式求体积  $V_1, V_2, V_3$ .

$$(1) S_1(y) = (2\sqrt{y})^2 = 4y, \text{ 故}$$

$$V_1 = \int_0^1 S_1(y) dy = \int_0^1 4y dy = 2.$$

$$(2) S_2(y) = \frac{\sqrt{3}}{4} (2\sqrt{y})^2 = \sqrt{3}y, \text{ 故}$$

$$V_2 = \int_0^1 S_2(y) dy = \int_0^1 \sqrt{3}y dy = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$(3) S_3(y) = \frac{1}{2}\pi(\sqrt{y})^2 = \frac{1}{2}\pi y, \text{ 故}$$

$$V_3 = \int_0^1 S_3(y) dy = \int_0^1 \frac{1}{2}\pi y dy = \frac{1}{4}\pi.$$

例 19 两个半径为  $r$  的圆柱的轴垂直相交, 求其所围成的立体的体积 (见图 6.20). 若两半径分别为  $R$  和  $r$  ( $R > r$ ), 体积有何变化?

解 作平行于  $x$  轴、与  $x$  轴距离为  $y$  且垂直  $xoy$  平面的平面, 与两圆柱体公共部分的截面积为  $S(y) = r^2 - y^2$ , 于是

$$V = 8 \int_0^r (r^2 - y^2) dy = \frac{16}{3}r^3.$$

若两圆柱有不同半径, 则截面为矩形, 截面积

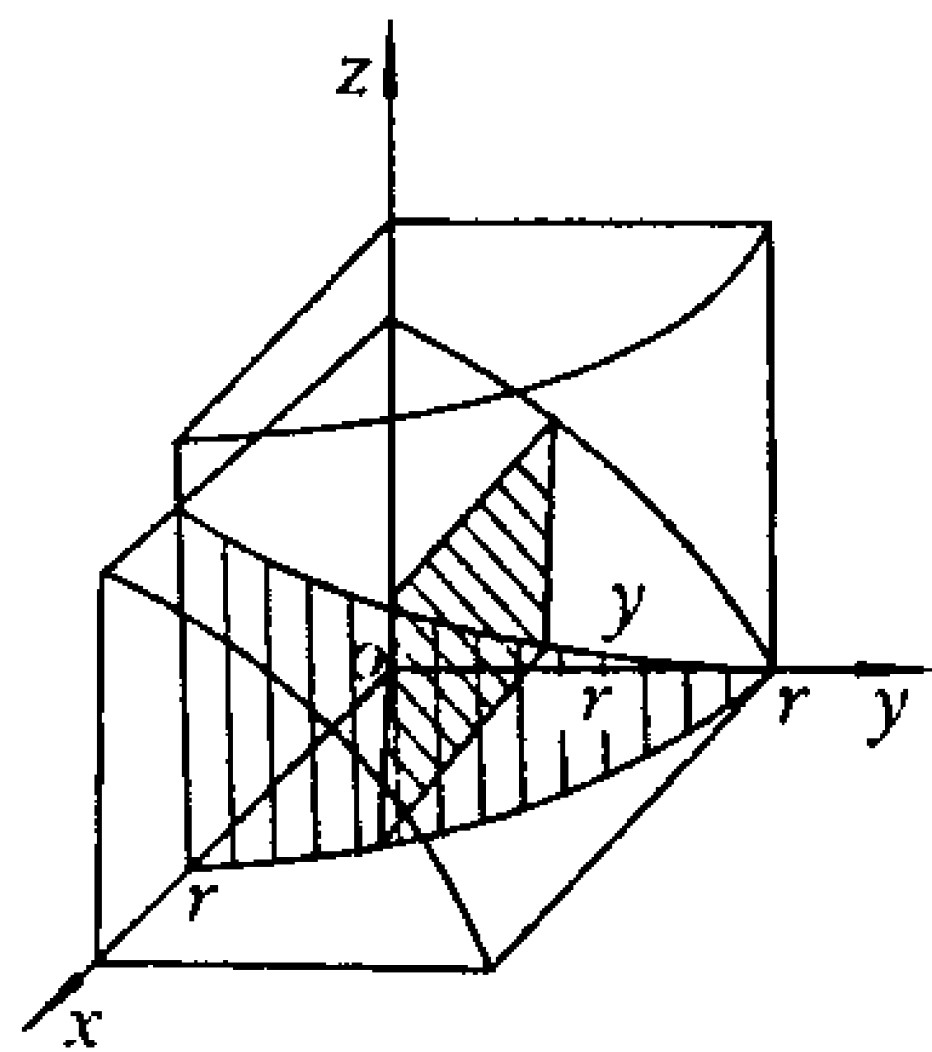


图 6.20

$$S(y) = \sqrt{(r^2 - y^2)(R^2 - y^2)},$$

立体体积  $V = 8 \int_0^r \sqrt{(r^2 - y^2)(R^2 - y^2)} dy$

是一个椭圆积分. 作代换  $y = r \sin \theta$ , 且令  $k = r/R$ , 则

$$\begin{aligned} V &= 8Rr^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{8}{3} R^3 [(1 + k)^2 E(k) - (1 - k^2) F(k)], \end{aligned}$$

其中  $E(k)$  和  $F(k)$  是完全椭圆积分, 可查表得出.

**例 20** 设悬链线  $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  在  $[0, u]$  上一段弧长和曲边梯形面积分别为  $s(u)$  和  $S(u)$ , 如图 6.21 所示; 该曲边梯形绕  $x$  轴旋转所得旋转体的体积和侧面积分别为  $V(u)$  和  $S_c(u)$ ; 旋转体在  $x = u$  一端的底面积为  $S_D(u)$ . 证明:  $\forall u > 0$ .

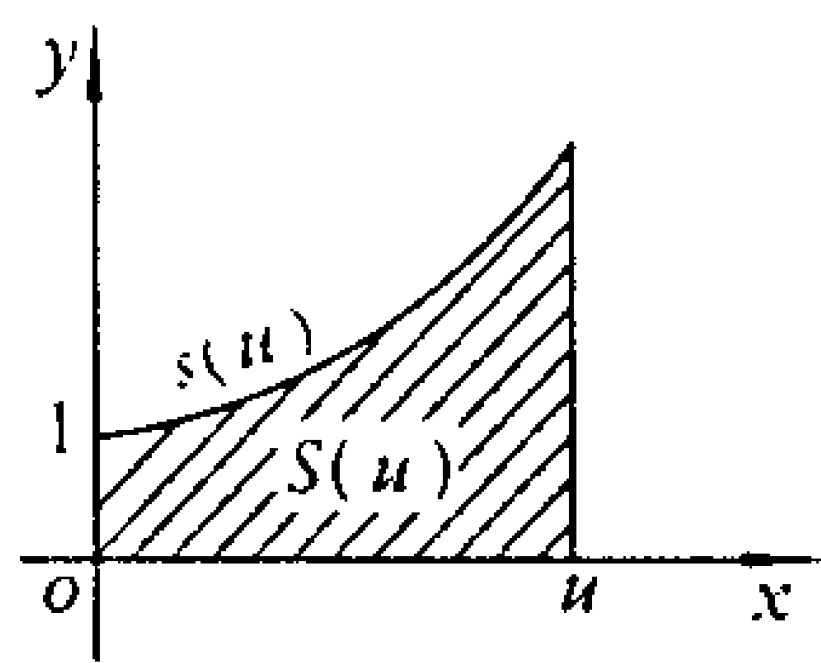


图 6.21

$$(1) s(u) = S(u), S_c(u) = 2V(u);$$

$$(2) \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{S_c(u)}{S_D(u)} = 1.$$

**证** (1) 由于  $y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ , 所以

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + [(e^x - e^{-x})/2]^2} = y,$$

$$s(u) = \int_0^u \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^u y dx = S(u),$$

$$S_c(u) = 2\pi \int_0^u y \sqrt{1 + y'^2} dx = 2\pi \int_0^u y^2 dx = 2V(u).$$

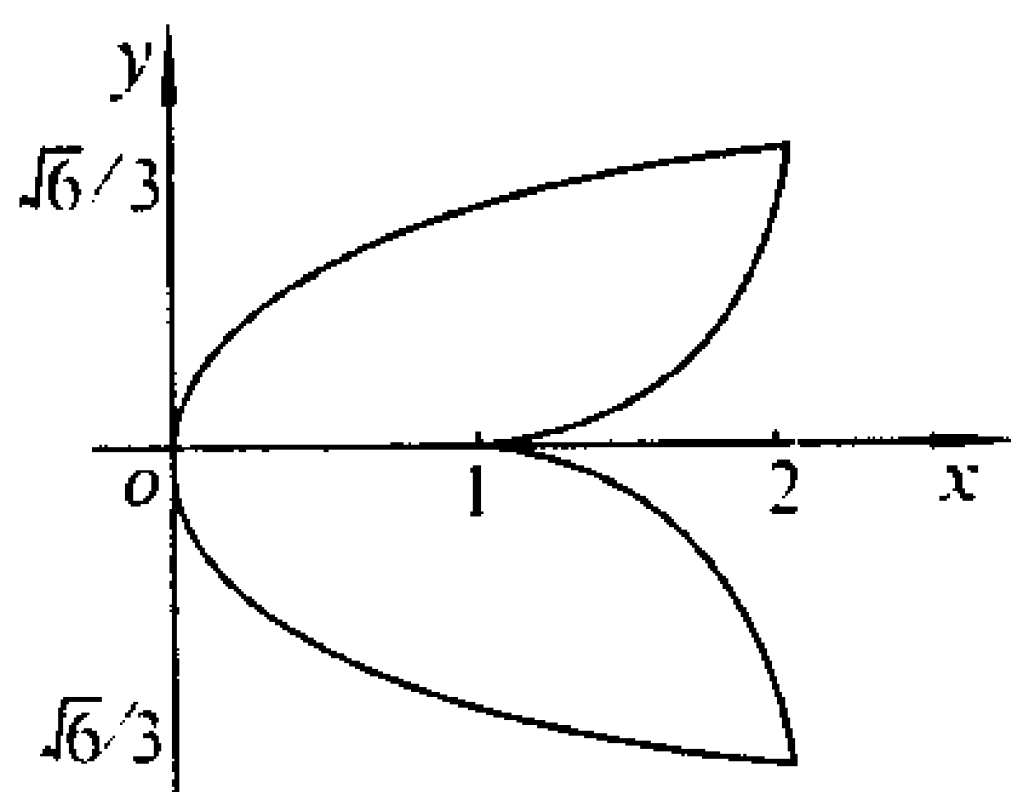
$$(2) S_c(u) = 2\pi \int_0^u y^2 dx = \frac{\pi}{2} \int_0^u (e^{2x} + e^{-2x} + 2) dx$$

$$= \frac{\pi}{4} (e^{2u} - e^{-2u} + 4u),$$

$$S_D(u) = \pi y^2(u) = \frac{\pi}{4} (e^u + e^{-u})^2 = \frac{\pi}{4} (e^{2u} + e^{-2u} + 2),$$

故 
$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{S_C(u)}{S_D(u)} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^{2u} - e^{-2u} + 4u}{e^{2u} + e^{-2u} + 2} = 1.$$

**例 21** 求半立方抛物线  $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$  被抛物线  $y^2 = \frac{x}{3}$  所截得的一段弧长  $s$  (见图 6.22).



**解** 求得两曲线的交点为  $\left(2, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ ,  $\left(2, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ , 且知弧关于  $x$  轴对称. 所以,

图 6.22

$$y' = \left( \frac{2}{3}(x-1)^2 \right)' = \frac{(x-1)^2}{y},$$

$$\begin{aligned} s &= 2 \int_1^2 \sqrt{1 + y'^2} dx = 2 \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{3}{2}(x-1)} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \int_1^2 \sqrt{3x-1} dx = \frac{8}{9} \left[ \left( \frac{5}{2} \right)^{3/2} - 1 \right]. \end{aligned}$$

**例 22** 求外摆线一拱的长. 外摆线方程为

$$\begin{cases} x = (a+b)\cos t - b\cos \frac{a+b}{b}t, \\ y = (a+b)\sin t - b\sin \frac{a+b}{b}t, \end{cases} \quad 0 < b < a.$$

**解** 先求出外摆线一拱  $t$  的变化区间. 因为外摆线一拱的始点与终点都在圆周  $x^2 + y^2 = a^2$  上, 所以解方程

$$\begin{aligned} a^2 &= x^2 + y^2 = \left[ (a+b)\cos t - b\cos \frac{a+b}{b}t \right]^2 \\ &\quad + \left[ (a+b)\sin t - b\sin \frac{a+b}{b}t \right]^2 \\ &= (a+b)^2 + b^2 \\ &\quad - 2b(a+b) \left( \sin t \sin \frac{a+b}{b}t + \cos t \cos \frac{a+b}{b}t \right) \\ &= a^2 + 2ab + 2b^2 - 2b(a+b)\cos \frac{a}{b}t, \end{aligned}$$

得  $\cos \frac{a}{b}t = 1 \Rightarrow t = 0$  与  $t = \frac{2b}{a}\pi$ . 即外摆线的一拱, 参数  $0 \leq t \leq \frac{2b}{a}\pi$ . 于是

$$x'_t = -(a+b) \left( \sin t - \sin \frac{a+b}{b}t \right) dt,$$

$$y'_t = (a+b) \left( \cos t - \cos \frac{a+b}{b}t \right) dt,$$

$$x'^2_t + y'^2_t = \left[ 4(a+b)^2 \sin^2 \frac{a}{2b}t \right] dt^2.$$

得 
$$s = \int_0^{2b\pi/a} \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} dt = \int_0^{2b\pi/a} 2(a+b) \sin \frac{a}{2b}t dt$$

$$= -\frac{4(a+b)b}{a} \cos \frac{a}{2b}t \Big|_0^{2b\pi/a} = \frac{8b}{a}(a+b).$$

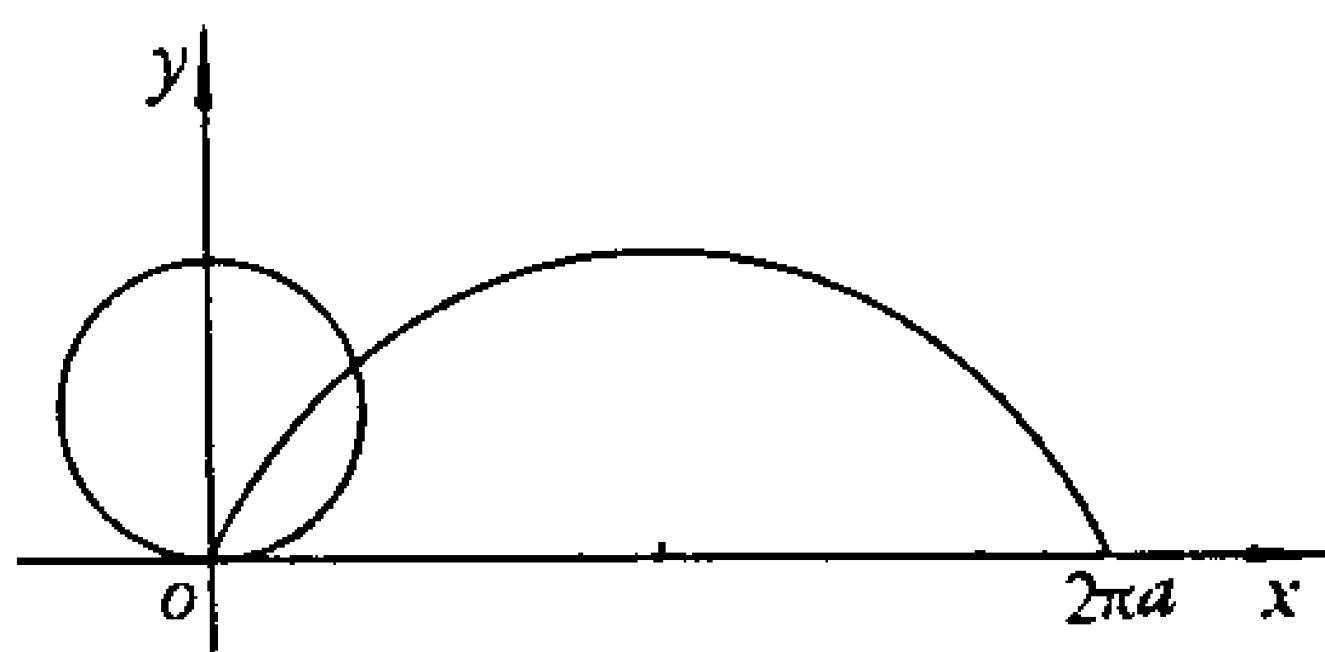


图 6.23

**例 23** 如图 6.23 所示, 在摆线  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  上, 求分摆线第一拱为 1:3 的点的坐标.

**解** 因为  $x'_t = a(1 - \cos t)$ ,  $y'_t = a \sin t$ , 所以

$$x'^2_t + y'^2_t = 4a^2 \sin^2 \left( \frac{t}{2} \right).$$

当  $t$  从 0 变到  $2\pi$  时, 摆线划出第一拱, 有

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} dt = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 8a.$$

设分点  $t = t_0$ , 则由

$$s(t_0) = \int_0^{t_0} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 4a \left( 1 - \cos \frac{t_0}{2} \right) = 2a,$$

得  $t_0 = \frac{2}{3}\pi$ , 于是

$$x_0 = \left( \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a, \quad y_0 = \frac{3}{2}a,$$



即所求分点坐标为  $\left( \left( \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) x, \frac{3}{2}a \right)$ .

## 二、定积分在物理中的应用

定积分的物理应用的关键同样是微元的确定,要根据物理定律和问题的具体条件确定坐标系,选择物理量,确定定积分微元.

**例 24** 某闸门的大小和形状如图 6.24 所示,闸门的上部为矩形  $ABCD$ ,下部由二次抛物线与线段  $AB$  所围成. 当水面与闸门的上端相平时,欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为  $5:4$ ,闸门矩形部分的高应为多少米?

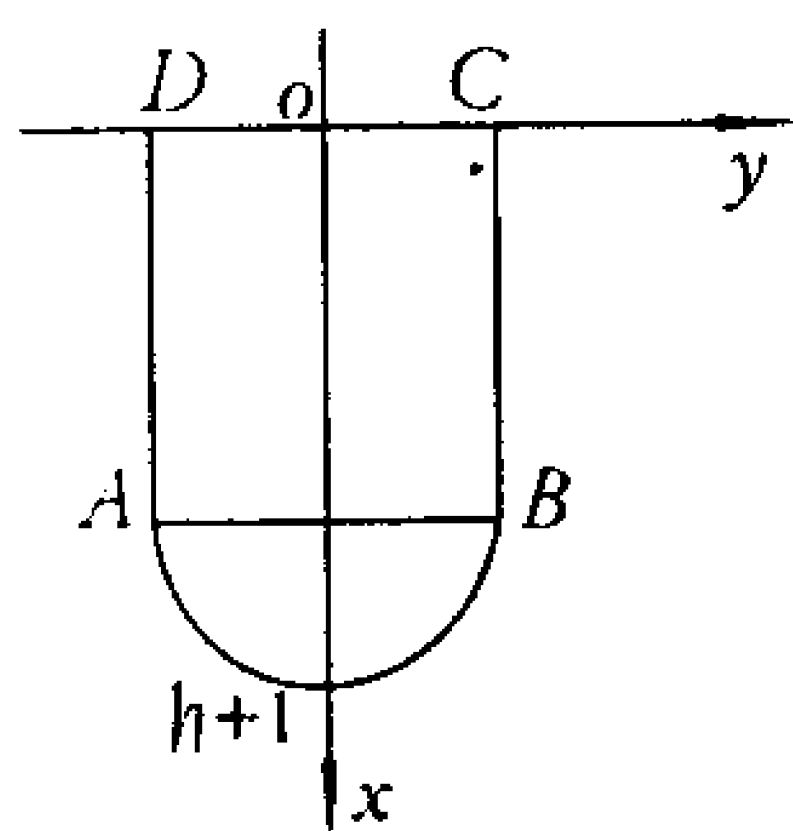


图 6.24

**解** 取坐标系如图,则抛物线方程为

$$x = h + 1 - y^2.$$

闸门矩形部分所受水压力

$$p_1 = 2 \int_0^h \rho g x dx = \rho g h^2,$$

闸门下部承受水压力

$$\begin{aligned} p_2 &= 2 \int_h^{h+1} \rho g x \sqrt{h+1-x} dx, \\ &\stackrel{\sqrt{h+1-x}=t}{=} 4\rho g \int_0^1 (h+1-t^2)t^2 dt \\ &= 4\rho g \left[ (h+1) \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right] \Big|_0^1 = 4\rho g \left( \frac{h}{3} + \frac{2}{15} \right). \end{aligned}$$

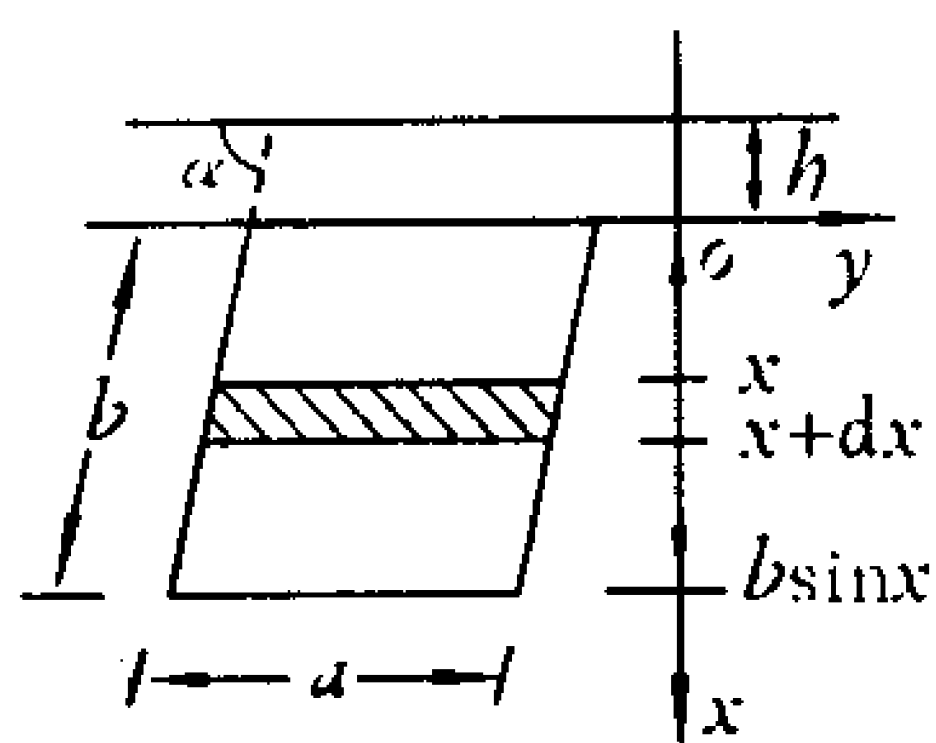


图 6.25

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{h^2}{4(h/3 + 2/15)} = \frac{5}{4} \Rightarrow h = 2.$$

即闸门矩形部分高应为 2m.

**例 25** 一边长为  $a$  和  $b$  ( $a > b$ ) 的矩形薄板与液面成  $\alpha$  角沉入液体中,其长边平行于液面,位于深  $h$  处. 若液体的密度为  $\rho$ . 求薄板每面上的液体压力.

解 如图 6.25 建立坐标系.  $x$  的变化区间为  $[0, b\sin\alpha]$ ,  $dS = a \cdot \frac{1}{\sin\alpha} dx$ , 压力微元  $dp = \rho(h+x) \frac{a dx}{\sin\alpha}$ , 于是

$$\begin{aligned} p &= \int_0^{b\sin\alpha} \rho(h+x) \frac{a dx}{\sin\alpha} = \frac{a\rho}{\sin\alpha} \left( hx + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{b\sin\alpha} \\ &= \rho ab \left( h + \frac{b}{2} \sin\alpha \right). \end{aligned}$$

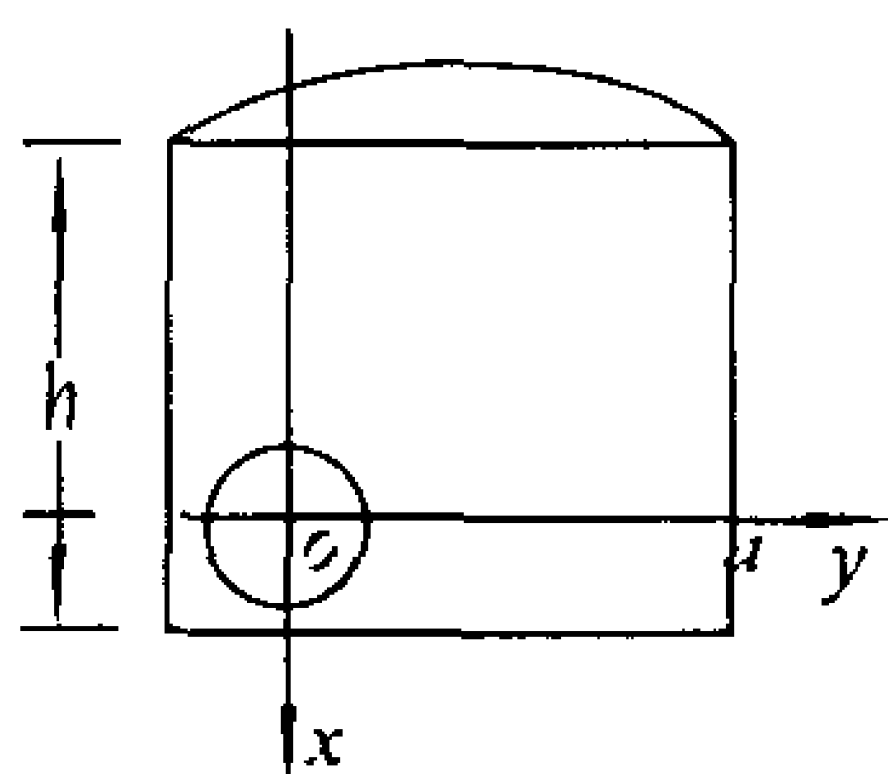


图 6.26

解 如图 6.26 建立坐标系. 圆孔方程为  $x^2 + y^2 = R^2$ , 积分区间为  $[-R, R]$ . 对应于小区间  $[x, x+dx]$  的压力微元

$$dp = \rho(h+x) 2\sqrt{R^2 - x^2} dx,$$

故孔口挡板所受压力

$$\begin{aligned} p &= \int_{-R}^R 2\rho(h+x) \sqrt{R^2 - x^2} dx = 4\rho h \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \\ &= 4\rho h \cdot \frac{\pi}{4} R^2 = \rho h \pi R^2. \end{aligned}$$

将题给数据代入得

$$\begin{aligned} p &= 960 \times 6.8 \times 3.4 \times 0.38^2 \approx 2952 \text{ (kg)} \\ \Rightarrow n &= \left[ \frac{2952}{500} \right] + 1 \approx 6. \end{aligned}$$

所以至少需要 6 个紧固螺钉.

例 27 一个半径  $R = 3$ 、密度  $\rho = 2$  的实心球完全沉没在水中, 球顶部到水面的距离为 16, 求把球提高到底部与水面相齐需做的功.

解 因为球的体积  $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$ , 球的质量  $M = V\rho =$

$72\pi$ , 当球完全沉没水中时, 浮力为  $36\pi$ . 所以, 球提升到顶部与水面相切时所做的功

$$W_1 = (72 - 36)\pi \times 16 = 576\pi.$$

如图 6.27 建立坐标系, 考虑将球提升出水面需做功  $W_2$ . 设将球顶从点  $(0,0)$  提到点  $(0,y)$  ( $0 \leq y \leq 6$ ), 记此时水面上球的体积为  $V_1$ , 水面下部体积为  $36\pi - V_1$ . 用平行截面积方法求  $V_1$ , 在点  $(0,0)$  与点  $(0,y)$  间任取一点  $(0,Y)$  作截面圆, 设其半径为  $X$ , 则应有

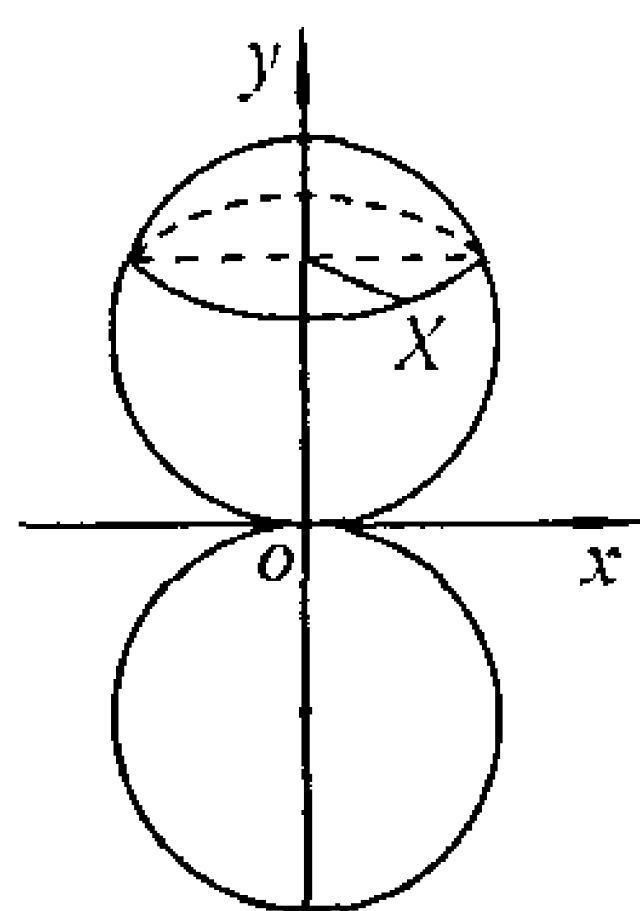


图 6.27

$$X^2 + (Y - y + 3)^2 = 3^2,$$

$$\begin{aligned} \text{故 } V_1 &= \pi \int_0^y X^2 dy = \pi \int_0^y [9 - (Y - y + 3)^2] dy \\ &= \pi \left[ 9Y - \frac{1}{3}(Y - y + 3)^3 \right] \Big|_0^y \\ &= \frac{\pi}{3}(9 - y)y^2. \end{aligned}$$

于是提升力

$$F = V\rho - (36\pi - V_1) \times 1 = 36\pi + \frac{\pi}{3}(9 - y)y^2.$$

$$\begin{aligned} \text{故 } W_2 &= \int_0^6 F dy = \int_0^6 \left[ 36\pi + \frac{\pi}{3}(9 - y)y^2 \right] dy \\ &= \left[ 36\pi y + \pi y^3 - \frac{\pi}{12}y^4 \right] \Big|_0^6 = 36 \times 9\pi = 324\pi. \end{aligned}$$

所以, 总功  $W = W_1 + W_2 = 900\pi$ .

**例 28** 用铁锤将一铁钉钉入木块, 设木块对铁钉的阻力与铁钉钉入木块的深度成正比. 锤击第一次时, 铁钉钉入 1cm. 若铁锤每次锤击时所做的功相等, 问第二次锤击钉子时钉入多深.

**解** 设锤击第二次时, 锤入深度为  $h$ . 因为

$$F = kx, \quad dW = Fdx = kx dx.$$

第一次锤击所做的功

$$W_1 = \int_0^1 kx dx = \frac{1}{2}kx^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}k;$$

第二次锤击所做的功

$$W_2 = \int_1^{1+h} kx dx = \frac{1}{2}k(h^2 + 2h).$$

由题设  $W_1 = W_2 \Rightarrow \frac{1}{2}k = \frac{1}{2}k(h^2 + 2h) \Rightarrow h^2 + 2h - 1 = 0$ ,

解得  $h = \sqrt{2} - 1$  (cm) (负值舍去).

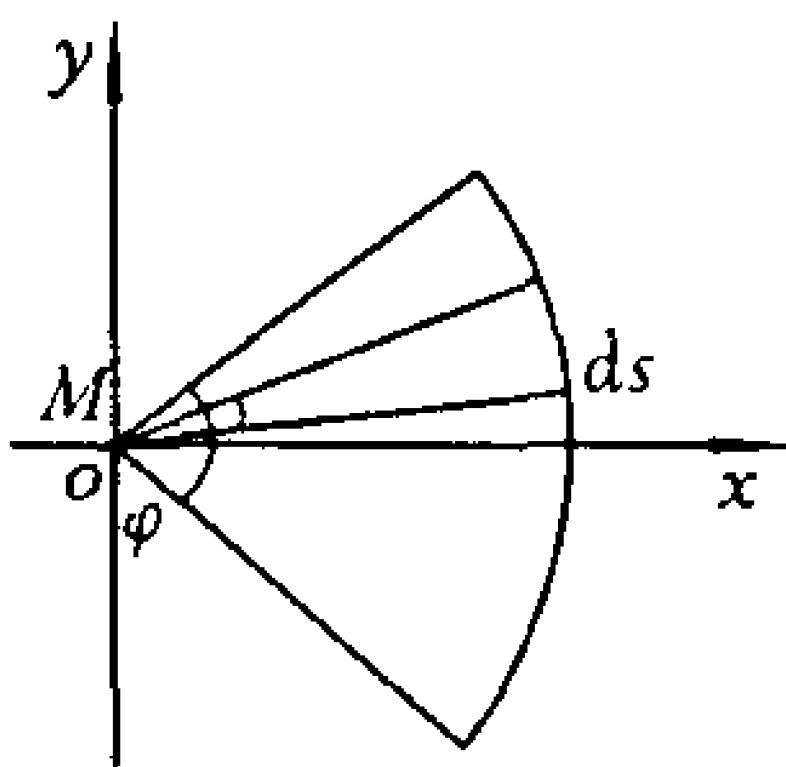


图 6.28

**例 29** 设有一半径为  $R$ , 中心角为  $\varphi$  的圆弧细棒, 其线密度为常数  $\rho$ , 在圆心处有一质量为  $m$  的质点  $M$ , 求这细棒对质点  $M$  的引力.

**解** 如图 6.28, 建立坐标系. 圆弧中一小段  $ds$  对质点  $M$  的引力微元

$$dF = \frac{m\rho dx}{R^2} = \frac{km\rho}{R^2}(Rd\theta) = \frac{km\rho}{R}d\theta.$$

$$\begin{aligned} \text{故 } F_x &= \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} dF \cos\theta = \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} \frac{km\rho}{R} \cos\theta d\theta \\ &= \frac{2km\rho}{R} \sin\theta \Big|_0^{\varphi/2} = \frac{2km\rho}{R} \sin \frac{\varphi}{2}, \end{aligned}$$

$$F_y = \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} dF \sin\theta = 2 \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} \frac{km\rho}{R} \sin\theta d\theta = 0.$$

所以, 引力的大小为  $\frac{2km\rho}{R} \sin \frac{\varphi}{2}$ , 方向自点  $M$  指向圆弧中点.

**例 30** 有一质量为  $M$ 、长为  $l$  的均匀细棒  $AB$  和一质量为  $M_0$  的质点. 质点位于坐标原点,  $AB$  垂直于  $x$  轴,  $\angle CoA = \alpha$ ,  $\angle CoB = \beta$ ,  $oC = a$ . 求此棒对质点的引力.

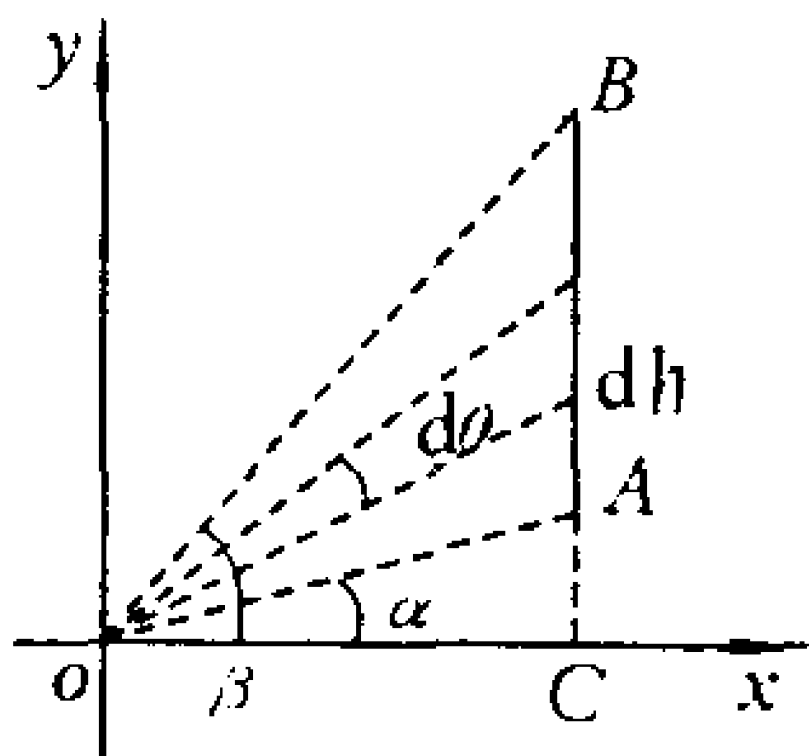


图 6.29

**解** 如图 6.29 建立坐标系. 细棒上微元  $dh$  对质点的引力

$$dF = \frac{1}{r^2} M_0 \cdot \frac{M}{l} dh \cdot r_0,$$

其中  $r_0 = \{\cos\theta, \sin\theta\}$ . 而

$$r = \frac{a}{\cos\theta}, \quad h = a \tan\theta, \quad dh = a \sec^2\theta.$$

于是  $dF = \frac{M_0 M}{al} d\theta r_0$ , 从而

$$F_x = \int_a^\beta dF_x = \frac{M_0 M}{al} \int_a^\beta \cos\theta d\theta = \frac{M_0 M}{al} (\sin\beta - \sin\alpha),$$

$$F_y = \int_a^\beta dF_y = \frac{M_0 M}{al} \int_a^\beta \sin\theta d\theta = \frac{M_0 M}{al} (-\cos\beta + \cos\alpha).$$

故 
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{M_0 M}{al} \sqrt{2 - 2\cos(\beta - \alpha)}$$
  

$$= \frac{2M_0 M}{al} \sin \frac{\beta - \alpha}{2},$$

方向  $\theta = \arctan \frac{F_y}{F_x} = \arctan \left( \tan \frac{\beta + \alpha}{2} \right) = \frac{\beta + \alpha}{2}.$

**例 31** 一个半径为  $R$  的圆环形导线均匀带电, 电荷密度为  $\delta$ , 在过圆心且垂直于圆环所在平面的直线上与圆心相距为  $a$  处有一带电量为  $q$  的点电荷. 求导线与电荷之间的作用力.

**解** 如图 6.30 建立坐标系. 点电荷位于原点, 圆环方程为

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad z = a.$$

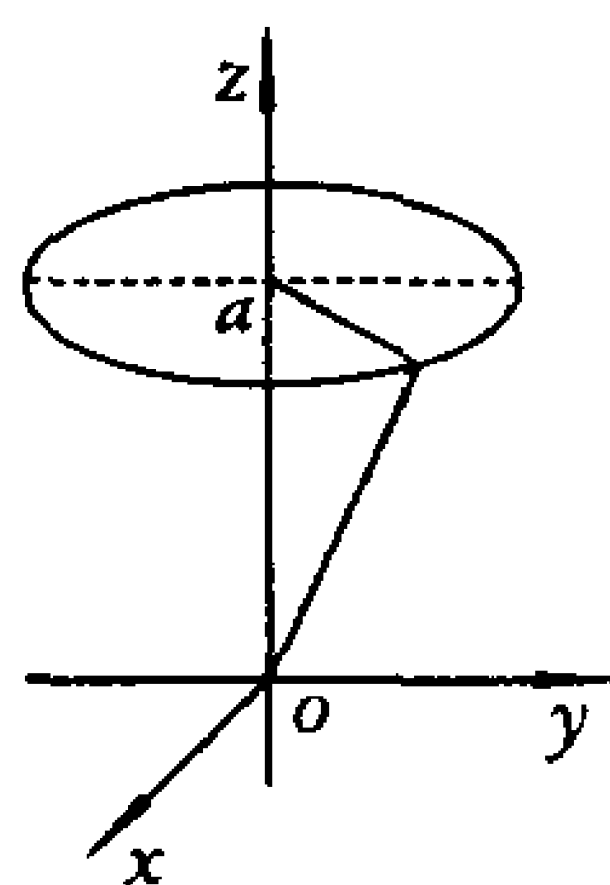


图 6.30

在圆环上点  $(x, y, z)$  处取微元  $ds$ , 将其视作带电量为  $\delta ds$  的点电荷, 由库仑定律, 引力微元

$$\begin{aligned} dF &= \frac{kq\delta ds}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{r}^0 \\ &= \frac{kq\delta(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + a\mathbf{k})}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} \sqrt{1 + (x/y)^2} dx \\ &= \frac{kqR\delta(\mathbf{i} + y\mathbf{j} + a\mathbf{k})}{|y|(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} dx. \end{aligned}$$

故 
$$dF_x = \frac{kqR\delta x}{|y|(R^2 + a^2)^{3/2}} dx = \frac{kqR\delta x}{(R^2 + a^2)^{3/2} \sqrt{R^2 - x^2}} dx,$$

$$dF_y = \frac{kqR\delta y}{|y|(R^2 + a^2)^{3/2}}dx = \begin{cases} \frac{kqR\delta}{(R^2 + a^2)^{3/2}}dx, & y \geq 0, \\ -\frac{kqRs}{(R^2 + a^2)^{3/2}}dx, & y < 0, \end{cases}$$

$$dF_z = \frac{kqR\delta a}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

所以  $F_x = 2\int_{-R}^R dF_x = 0, F_y = 2\int_{-R}^R dF_y = 0,$

$$F_z = 2\int_{-R}^R dF_z = \frac{2kqR\delta a}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \int_{-R}^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{2\pi kqR\delta a}{(R^2 + a^2)^{3/2}}.$$

于是,所求引力为

$$F = F_x i + F_y j + F_z k = \frac{2\pi kqR\delta a}{(R^2 + a^2)^{3/2}} k,$$

引力大小为  $\frac{2\pi kqR\delta a}{(R^2 + a^2)^{3/2}}$ , 方向竖直向上.

**例 32** 证明古尔金第一定理: 弧  $C(\widehat{AB})$  绕着不与它相交的轴旋转而成的旋转面的面积等于这个弧的长度与这弧的质心所画出的圆周之长的乘积.

**证** 设弧  $C(\widehat{AB})$  的方程是  $y = y(x)$  ( $x_1 \leq x \leq x_2$ ), 则  $C$  绕  $x$  轴所得旋转面面积为  $S_r = 2\pi \int_{(A)}^{(B)} y ds$ .

又曲线  $C$  的弧长为  $s = \int_{(A)}^{(B)} ds$ , 而弧的质心的纵坐标为  $\eta = \frac{\int_{(A)}^{(B)} y ds}{\int_{(A)}^{(B)} ds}$ , 所以

$$2\pi \int_{(A)}^{(B)} y ds = \int_{(A)}^{(B)} ds \cdot 2\pi \left[ \frac{\int_{(A)}^{(B)} y ds}{\int_{(A)}^{(B)} ds} \right] = s \cdot 2\pi \eta.$$

**例 33** 证明古尔金第二定理: 面积  $S$  绕着不与它相交的轴旋转而成的旋转体体积等于面积  $S$  与这面积的质心所画出的圆周长的乘积.

**证** 设面积的边界曲线由  $y = y_1(x)$  和  $y = y_2(x)$  组成 (其中  $y = y_1(x) < y = y_2(x)$ ), 则面积  $S$  绕  $x$  轴旋转所得旋转体体积

为  $V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} (y_2^2 - y_1^2) dx$ .

而面积质心的纵坐标  $\eta = \int_{x_1}^{x_2} (y_2^2 - y_1^2) dx / (2S)$ . 所以

$$V_x = 2\pi \cdot \left[ \int_{x_1}^{x_2} (y_2^2 - y_1^2) dx / (2S) \right] S = S \cdot 2\pi\eta.$$

**例 34** 旋转体容器是什么形状时, 才能使液体流出时, 液体表面的下降是均匀的?

**解** 如图 6.31 建立坐标系. 设孔的半径为单位厘米. 小孔中流出液体流量为

$$dQ = \pi v dt = \pi c \sqrt{2gy} dt.$$

而容器内减少的液体量为  $A(y) dy$ .

故由  $\pi c \sqrt{2gy} dt = A(y) dy$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dy} = \frac{A(y)}{\pi c \sqrt{2gy}}.$$

由题设  $\frac{dt}{dy}$  是常数, 令  $\frac{dt}{dy} = k$ , 则有

$$\frac{A(y)}{\pi c \sqrt{2gy}} = k \Rightarrow A(y) = k_1 \sqrt{y} \quad (k_1 \text{ 为常数}).$$

因为旋转体是由  $y = f(x)$  绕  $y$  轴旋转所得, 故  $A(y) = \pi x^2$ , 所以

$$y = cx^4 \quad (c \text{ 为常数}).$$

即旋转曲面是由曲线  $y = cx^4$  旋转而成的.

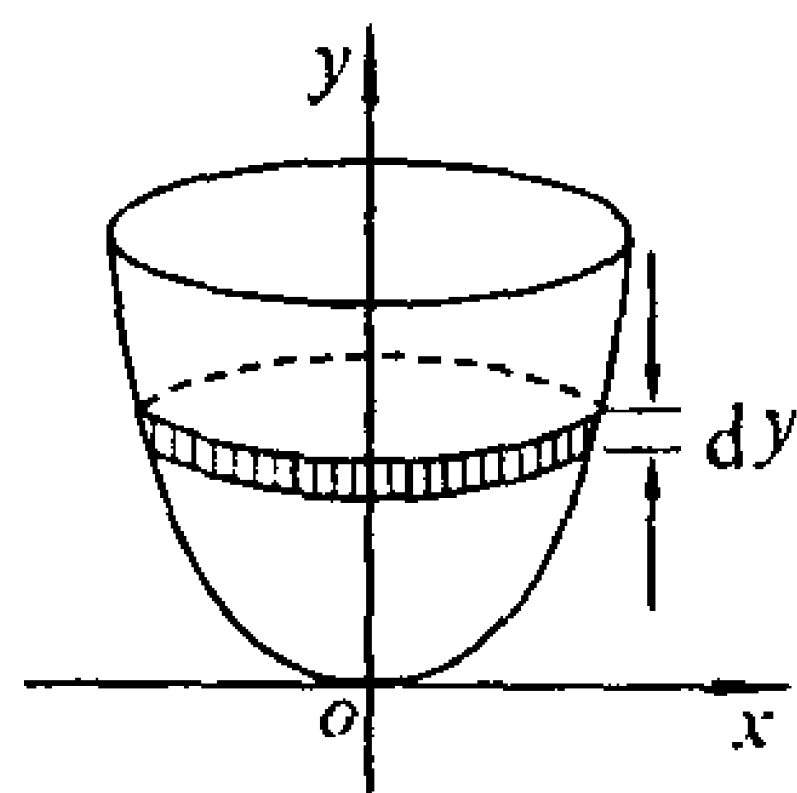


图 6.31

[ General Information ]

□□=□□□□ □□□□□□□□ □□□□

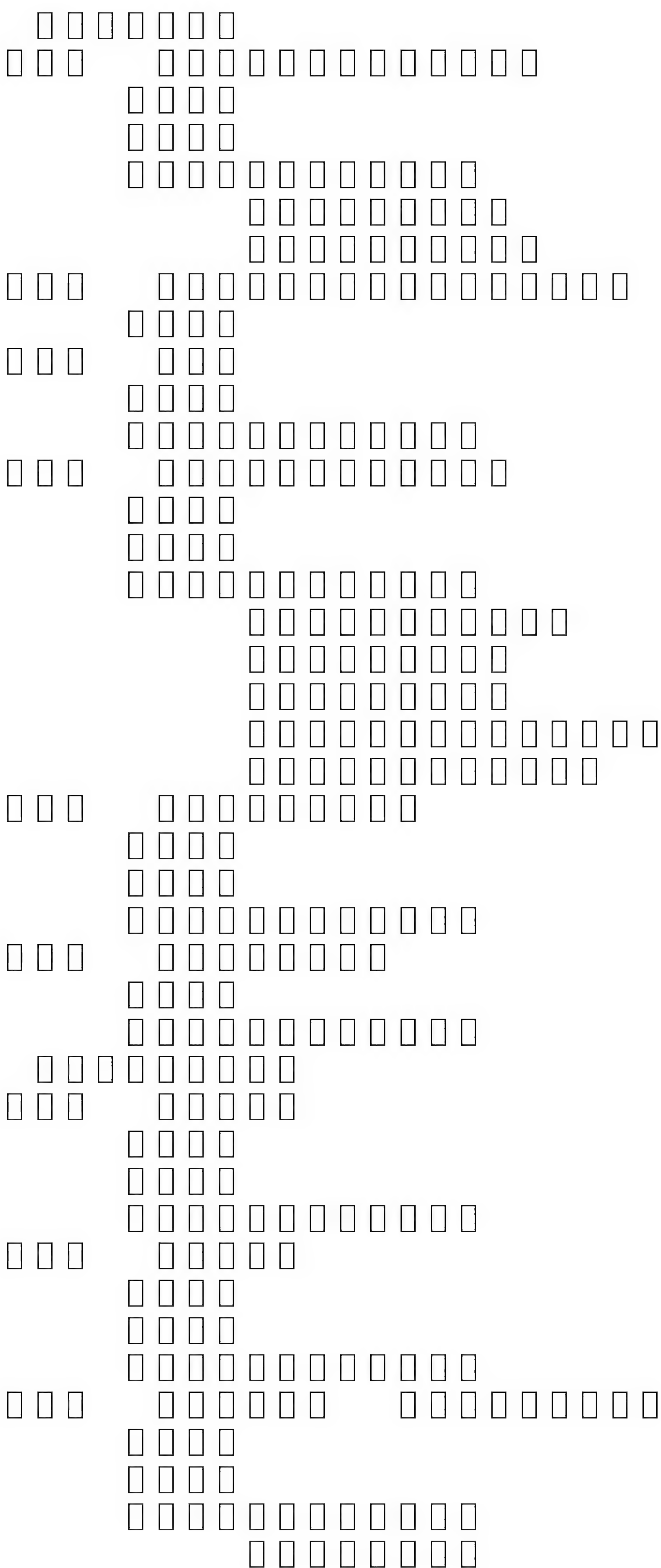
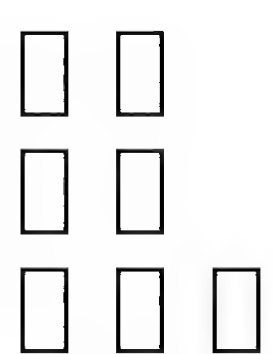
□□=□□□ □□

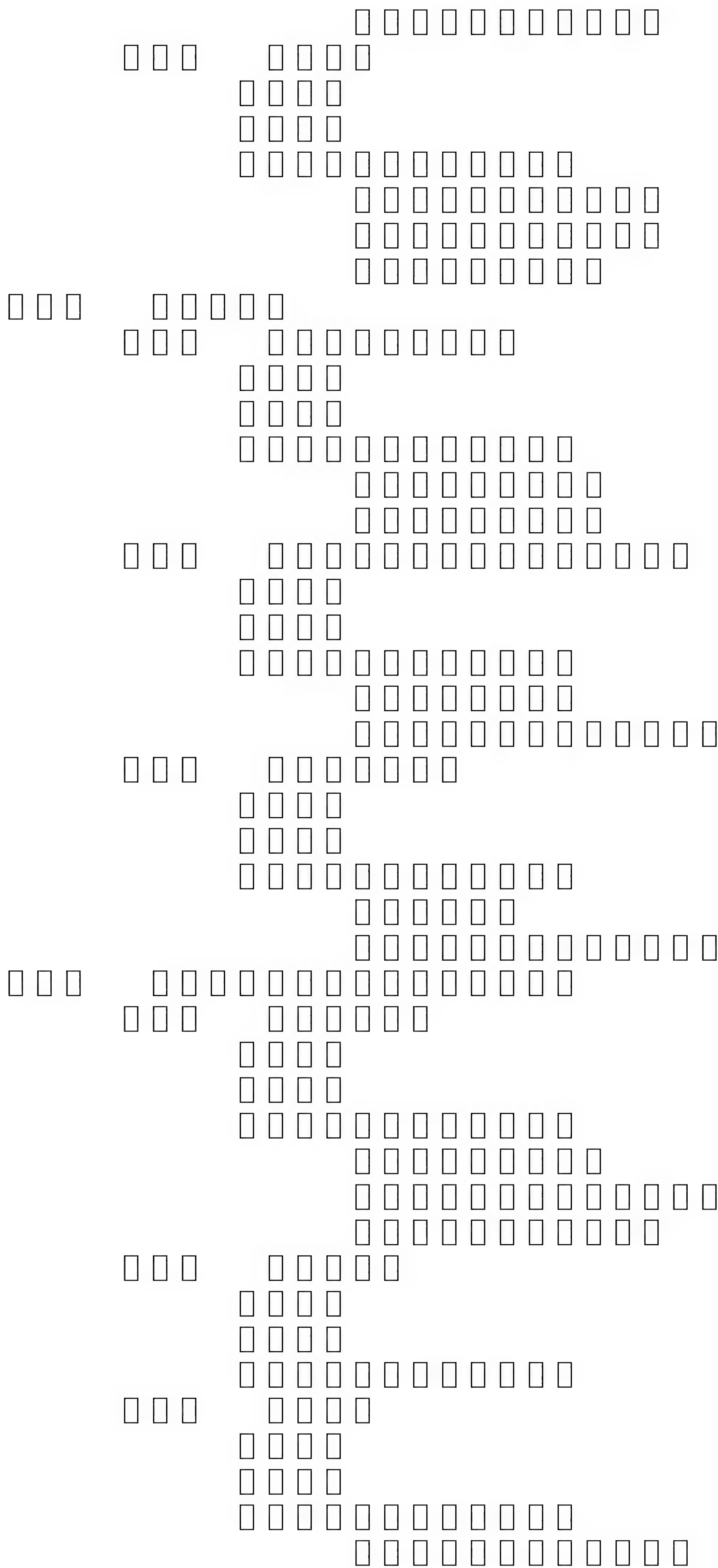
□□=4 8 9

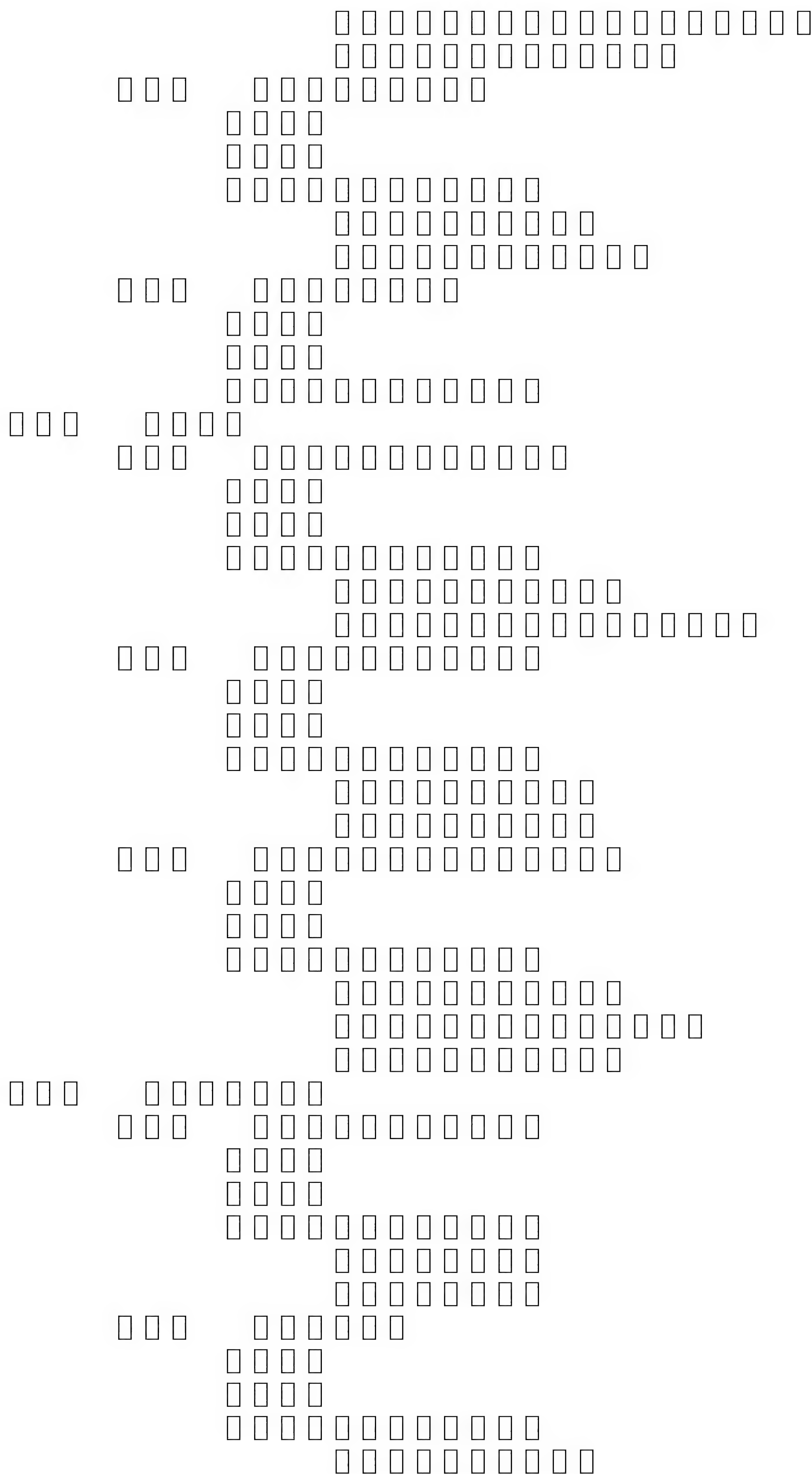
SS□=1 1 2 1 9 8 4 4

□□□□=2 0 0 3 □ 0 7 □□ 1 □









The diagram illustrates a sequence of 100 small squares arranged in a grid-like pattern. The squares are organized into rows, with some squares containing the text "( )". The arrangement is as follows:

- Row 1: 10 squares, all empty.
- Row 2: 10 squares, all empty.
- Row 3: 10 squares, all empty.
- Row 4: 10 squares, all empty.
- Row 5: 10 squares, all empty.
- Row 6: 10 squares, all empty.
- Row 7: 10 squares, all empty.
- Row 8: 10 squares, all empty.
- Row 9: 10 squares, all empty.
- Row 10: 10 squares, all empty.
- Row 11: 10 squares, all empty.
- Row 12: 10 squares, all empty.
- Row 13: 10 squares, all empty.
- Row 14: 10 squares, all empty.
- Row 15: 10 squares, all empty.
- Row 16: 10 squares, all empty.
- Row 17: 10 squares, all empty.
- Row 18: 10 squares, all empty.
- Row 19: 10 squares, all empty.
- Row 20: 10 squares, all empty.
- Row 21: 10 squares, all empty.
- Row 22: 10 squares, all empty.
- Row 23: 10 squares, all empty.
- Row 24: 10 squares, all empty.
- Row 25: 10 squares, all empty.
- Row 26: 10 squares, all empty.
- Row 27: 10 squares, all empty.
- Row 28: 10 squares, all empty.
- Row 29: 10 squares, all empty.
- Row 30: 10 squares, all empty.
- Row 31: 10 squares, all empty.
- Row 32: 10 squares, all empty.
- Row 33: 10 squares, all empty.
- Row 34: 10 squares, all empty.
- Row 35: 10 squares, all empty.
- Row 36: 10 squares, all empty.
- Row 37: 10 squares, all empty.
- Row 38: 10 squares, all empty.
- Row 39: 10 squares, all empty.
- Row 40: 10 squares, all empty.
- Row 41: 10 squares, all empty.
- Row 42: 10 squares, all empty.
- Row 43: 10 squares, all empty.
- Row 44: 10 squares, all empty.
- Row 45: 10 squares, all empty.
- Row 46: 10 squares, all empty.
- Row 47: 10 squares, all empty.
- Row 48: 10 squares, all empty.
- Row 49: 10 squares, all empty.
- Row 50: 10 squares, all empty.
- Row 51: 10 squares, all empty.
- Row 52: 10 squares, all empty.
- Row 53: 10 squares, all empty.
- Row 54: 10 squares, all empty.
- Row 55: 10 squares, all empty.
- Row 56: 10 squares, all empty.
- Row 57: 10 squares, all empty.
- Row 58: 10 squares, all empty.
- Row 59: 10 squares, all empty.
- Row 60: 10 squares, all empty.
- Row 61: 10 squares, all empty.
- Row 62: 10 squares, all empty.
- Row 63: 10 squares, all empty.
- Row 64: 10 squares, all empty.
- Row 65: 10 squares, all empty.
- Row 66: 10 squares, all empty.
- Row 67: 10 squares, all empty.
- Row 68: 10 squares, all empty.
- Row 69: 10 squares, all empty.
- Row 70: 10 squares, all empty.
- Row 71: 10 squares, all empty.
- Row 72: 10 squares, all empty.
- Row 73: 10 squares, all empty.
- Row 74: 10 squares, all empty.
- Row 75: 10 squares, all empty.
- Row 76: 10 squares, all empty.
- Row 77: 10 squares, all empty.
- Row 78: 10 squares, all empty.
- Row 79: 10 squares, all empty.
- Row 80: 10 squares, all empty.
- Row 81: 10 squares, all empty.
- Row 82: 10 squares, all empty.
- Row 83: 10 squares, all empty.
- Row 84: 10 squares, all empty.
- Row 85: 10 squares, all empty.
- Row 86: 10 squares, all empty.
- Row 87: 10 squares, all empty.
- Row 88: 10 squares, all empty.
- Row 89: 10 squares, all empty.
- Row 90: 10 squares, all empty.
- Row 91: 10 squares, all empty.
- Row 92: 10 squares, all empty.
- Row 93: 10 squares, all empty.
- Row 94: 10 squares, all empty.
- Row 95: 10 squares, all empty.
- Row 96: 10 squares, all empty.
- Row 97: 10 squares, all empty.
- Row 98: 10 squares, all empty.
- Row 99: 10 squares, all empty.
- Row 100: 10 squares, all empty.

## 内 容 简 介

本书是学习数学分析课程的一本极好的指导书. 本书的编写顺序与一般的数学教科书同步, 本册内容包括级数、函数项级数与幂级数、傅里叶级数、多元函数微分学、隐函数定理及应用、向量函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分. 读者可以通过学习它循序渐进地理解和掌握数学分析的概念和方法. 本书在归纳内容、释疑解难的基础上, 用大量、全面的例题为读者诠释概念、演绎技巧、举证方法, 使读者可以更好地融会知识、理解概念、熟悉技巧和掌握方法. 因此, 读者有必要认真学习本书, 通过它化教科书上的抽象概念为自己的切实有用的知识.

希望本书能成为你的良师益友, 欢迎你选用本系列丛书.

## 内 容 简 介

本书是学习数学分析课程的一本极好的指导书. 本书的编写顺序与一般的数学教科书同步, 本册内容包括级数、函数项级数与幂级数、傅里叶级数、多元函数微分学、隐函数定理及应用、向量函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分. 读者可以通过学习它循序渐进地理解和掌握数学分析的概念和方法. 本书在归纳内容、释疑解难的基础上, 用大量、全面的例题为读者诠释概念、演绎技巧、举证方法, 使读者可以更好地融会知识、理解概念、熟悉技巧和掌握方法. 因此, 读者有必要认真学习本书, 通过它化教科书上的抽象概念为自己的切实有用的知识.

希望本书能成为你的良师益友, 欢迎你选用本系列丛书.

# 前 言

数学分析是高等学校 数学专业的主要基础课程. 数学初学者来说, 数学分析课程的概念难懂, 方法抽象, 解题难以入手, 思维难以展开. 为了帮助大家学好数学分析, 解决学习中的困难, 指导学习的方法, 提高学习的效率, 我们编写了本书.

为了使读者能循序渐进, 扎扎实实地从理论上、思维上、方法上掌握数学分析的概念与内容、方法及技巧, 我们采用与教材同步、以章节为序的方法, 对问题逐个地进行讨论、分析、举例、归纳, 在提升知识、解析疑难的基础上, 用大量的例题为读者诠释概念、演绎技巧、举证方法, 使读者通过例题边分析、边练习、边讨论、边总结, 从而更好地融会知识、理解概念、熟悉技巧和掌握方法, 将书本上的抽象理论真正化为自己的切实有用的知识, 更为后续课程打下良好的数学基础.

本书不像某些重点讲授方法的参考书那样, 以问题归类来讨论方法. 因此希望读者学习以后, 自己做一些归纳提高、整理加工的工作, 以增强自己的实践能力.

数学分析的题目及其解法浩如烟海, 编者只能选编其中一小部分比较普遍的和比较典型的献给读者. 有些例题是为了举证方法而选用的, 因此不一定是该例的最佳方法. 本书以较多的篇幅来讨论命题的论证, 这是数学分析的理论基础, 但也用了相当篇幅来叙述计算方法, 希望能以此提高读者的计算和证明能力.

本书的编写出版得到了华中科技大学出版社的热心支持和帮助, 在此向他们表示衷心的感谢. 在本书写作中, 曾参阅了一些作

者关于数学分析问题的著作,我们借此机会向他们表示诚挚的谢意.

由于经验不足和学识所限,本书的失误之处在所难免,望同行和读者热心指正.

孙清华 孙 昊

2003 年 11 月



# 目 录

第七章 级数	(1)
第一节 级数的敛散性与正项级数	(1)
主要内容	(1)
疑难解析	(5)
方法、技巧与典型例题分析	(6)
一、级数的敛散性问题	(6)
二、正项级数的敛散性问题	(24)
第二节 一般项级数	(40)
主要内容	(40)
疑难解析	(42)
方法、技巧与典型例题分析	(44)
第三节 无穷乘积	(69)
主要内容	(69)
疑难解析	(70)
方法、技巧与典型例题分析	(71)
第八章 函数项级数与幂级数	(81)
第一节 一致收敛性	(81)
主要内容	(81)
疑难解析	(84)
方法、技巧与典型例题分析	(85)
一、函数列的收敛性与一致收敛性	(85)
二、函数项级数的收敛性与一致收敛性	(94)
第二节 一致收敛的函数列与函数项级数的性质	(106)
主要内容	(106)
疑难解析	(107)
方法、技巧与典型例题分析	(108)

第三节 幂级数 .....	(118)
主要内容 .....	(118)
疑难解析 .....	(120)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(121)
一、幂级数的收敛半径与收敛域 .....	(121)
二、幂级数的性质 .....	(130)
三、其它类型例题 .....	(153)
第四节 函数展开成幂级数 .....	(158)
主要内容 .....	(158)
疑难解析 .....	(160)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(160)
第九章 傅里叶级数 .....	(179)
第一节 傅里叶级数展开式 .....	(179)
主要内容 .....	(179)
疑难解析 .....	(180)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(182)
第二节 以 $2l$ 为周期的函数的展开式 .....	(204)
主要内容 .....	(204)
疑难解析 .....	(205)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(205)
第三节 收敛定理 .....	(212)
主要内容 .....	(212)
疑难解析 .....	(213)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(214)
第十章 多元函数微分学 .....	(228)
第一节 平面点集与多元函数 .....	(228)
主要内容 .....	(228)
疑难解析 .....	(230)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(231)
第二节 二元函数的极限与连续性 .....	(241)
主要内容 .....	(241)

疑难解析 .....	(243)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(245)
一、二元函数的极限 .....	(245)
二、二元函数的连续性 .....	(252)
第三节 多元函数的偏导数与全微分 .....	(259)
主要内容 .....	(259)
疑难解析 .....	(261)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(262)
第四节 复合函数微分法与方向导数 .....	(272)
主要内容 .....	(272)
疑难解析 .....	(274)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(275)
一、多元复合函数求导与全微分 .....	(275)
二、方向导数与梯度 .....	(282)
第五节 泰勒公式与极值问题 .....	(287)
主要内容 .....	(287)
疑难解析 .....	(289)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(290)
一、高阶偏导数与全微分 .....	(290)
二、泰勒公式 .....	(293)
三、无条件极值与最值 .....	(297)
<b>第十一章 隐函数定理及其应用 .....</b>	<b>(305)</b>
第一节 隐函数与隐函数组 .....	(305)
主要内容 .....	(305)
疑难解析 .....	(308)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(308)
一、隐函数及其偏导数 .....	(308)
二、隐函数组及其偏导数 .....	(313)
第二节 几何应用与条件极值 .....	(321)
主要内容 .....	(321)
疑难解析 .....	(323)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(324)

一、隐函数的几何应用问题 .....	(324)
二、条件极值问题 .....	(329)
<b>第十二章 向量函数微分学</b> .....	(336)
第一节 $n$ 维欧几里德空间与向量函数 .....	(336)
主要内容 .....	(336)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(338)
第二节 向量函数的微分 .....	(343)
主要内容 .....	(343)
疑难解析 .....	(345)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(345)
第三节 隐函数定理与反函数定理 .....	(354)
主要内容 .....	(354)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(355)
<b>第十三章 重积分</b> .....	(363)
第一节 二重积分的概念 .....	(363)
主要内容 .....	(363)
疑难解析 .....	(364)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(365)
第二节 二重积分的计算 .....	(370)
主要内容 .....	(370)
疑难解析 .....	(372)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(373)
一、二重积分的计算 .....	(373)
二、二重积分证明题 .....	(382)
三、其它二重积分问题 .....	(385)
第三节 三重积分 .....	(391)
主要内容 .....	(391)
疑难解析 .....	(393)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(394)
第四节 重积分的应用 .....	(406)
主要内容 .....	(406)

方法、技巧与典型例题分析 .....	(408)
一、重积分的几何应用 .....	(408)
二、重积分的物理应用 .....	(413)
第五节 含参变量的非正常积分 .....	(420)
主要内容 .....	(420)
疑难解析 .....	(423)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(424)
<b>第十四章 曲线积分与曲面积分</b> .....	(433)
第一节 第一型曲线积分与第一型曲面积分 .....	(433)
主要内容 .....	(433)
疑难解析 .....	(434)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(435)
一、第一型曲线积分的计算与应用 .....	(435)
二、第一型曲面积分的计算与应用 .....	(439)
第二节 第二型曲线积分 .....	(442)
主要内容 .....	(442)
疑难解析 .....	(443)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(444)
第三节 格林公式 曲线积分与路径的无关性 .....	(448)
主要内容 .....	(448)
疑难解析 .....	(449)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(450)
第四节 第二型曲面积分 .....	(458)
主要内容 .....	(458)
疑难解析 .....	(459)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(459)
第五节 高斯公式与斯托克斯公式 .....	(465)
主要内容 .....	(465)
疑难解析 .....	(466)
方法、技巧与典型例题分析 .....	(467)

## 第七章 级数

无穷级数是数学分析理论的重要组成部分,在应用数学与工程技术中有广泛的应用.无穷级数又分为数项级数和函数项级数,本书着重研究数项级数中的正项级数、一般项级数以及函数项级数中的幂级数.

### 第一节 级数的敛散性与正项级数

#### 主要内容

##### 一、级数的敛散性

1. 给定一个数列  $\{u_n\}$ , 则表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为数项级数或无穷级数.  $u_n$  称为级数的一般项.

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

称为上述数项级数的第  $n$  个部分和, 简称部分和.

2. 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的部分和数列  $\{S_n\}$  有极限  $S$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , 则

称无穷级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.  $S$  称为无穷级数的和, 记作

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad \text{或} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

若  $\{S_n\}$  没有极限, 则称无穷级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

3. 柯西 (Cauchy) 审敛原理 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛的充分必要条件为:  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ , 使得当  $n > N$  时, 对任意的自然数  $p$  均有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \epsilon.$$

推论 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛的必要条件是  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

4. 收敛级数的基本性质

(1) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛于  $S$ ,  $k$  为常数, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$  也收敛, 其和为  $kS$ .

(2) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  分别收敛于  $S$  和  $T$ ,  $c, d$  为常数, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (cu_n + dv_n)$  也收敛, 其和为  $cS + dT$ .

(3) 去掉、增加或改变级数的有限个项, 不改变级数的敛散性.

(4) 对收敛级数的项任意加括号, 不改变级数的敛散性, 也不改变级数的和.

若加括号后的级数发散, 则原级数也发散.

5. 常用结论

(1) 等比级数  $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + \cdots + aq^n + \cdots$  ( $a \neq 0$ ), 当  $|q| < 1$  时收敛, 当  $|q| \geq 1$  时发散.

(2) 调和级数  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$  是发散的.

二、正项级数

若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的一般项  $u_n \geq 0$ , 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为正项级数. 负项级

数可以化为正项级数来研究.

1. 正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛的充要条件是: 部分和数列  $\{S_n\}$  有界.

2. 正项级数的比较原则 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都是正项级数, 如果存在某个  $N > 0$ , 对一切  $n > N$  都有  $u_n \leq v_n$ , 则

(1) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  也收敛;

(2) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  也发散.

3. 比较原则的极限形式 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都是正项级数, 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ , 则

(1) 当  $0 < l < +\infty$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  有相同的敛散性;

(2) 当  $l = 0$  且  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  也收敛;

(3) 当  $l = +\infty$  且  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  也发散.

4. 达朗贝尔 (D'Alembert) 比式判别法 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为正项级数, 且存在某自然数  $N_0$  及常数  $q$  ( $0 < q < 1$ ), 则

(1) 若对一切  $n > N_0$ , 有  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛;

(2) 若对一切  $n > N_0$ , 有  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

5. 比式判别法的极限形式 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为正项级数, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ , 则:



(1) 当  $q < 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛;

(2) 当  $q > 1$  或  $q = +\infty$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

6. 柯西根式判别法 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为正项级数, 且存在某正数  $N_0$  及常数  $l > 0$ , 则

(1) 若对一切  $n > N_0$ , 有  $\sqrt[n]{u_n} \leq l < 1$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛;

(2) 若对一切  $n > N_0$ , 有  $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

7. 根式判别法的极限形式 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为正项级数, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ , 则:

(1) 当  $l < 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛;

(2) 当  $l > 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

8. 对极限不存在, 而上、下极限存在情形, 有以下结论.

设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为正项级数, 则

(1) 若  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \bar{q} < 1$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛;

(2) 若  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \underline{q} > 1$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

9. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为正项级数, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ , 则当  $l < 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛; 当  $l > 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

10. 积分判别法 设  $f(x)$  为  $[1, +\infty)$  上的非负单调减少函

数,则正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  与非正常积分  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  同时收敛或同时发散.

11. 拉贝 (Raabe) 判别法 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为正项级数,且存在极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( 1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = r$ , 则

(1) 当  $r > 1$  时,级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛;

(2) 当  $r < 1$  时,级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

## 疑 难 解 析

1. 怎样理解无穷级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛?

答 无穷级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$  是无穷多项的和,可能是有限数,也可能是无限数,或者是不确定的数. 如

有限数  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 2,$

无限数  $1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots = +\infty,$

不确定数  $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 + \cdots.$

当和是有限数  $S$  时,称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛于  $S$ . 否则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

特别要注意的是,级数的和是无限项的和(简称无限和)与有限项的和(简称有限和)有本质区别. 有限和是一定存在的,但无限和不一定存在. 然而,两者又有十分密切的联系,即无限和可以通过有限和的极限表示. 一般地,级数求和要先求部分和  $S_n$  (有限

和),再求部分和的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ,确定级数的和 $S$ (无限和)是否存在.

2. 判别正项级数敛散性的条件是否都是充分必要的条件?

答 一切判别正项级数敛散性的条件都是充分条件,但不一定是必要条件.

如对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ,若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l < 1$ ,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定收敛,反之则不一定收敛.例如

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots$$

是一个收敛的正项级数,但 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 有两种情形:

$$\frac{1}{3^n} / \frac{1}{2^n} = \left( \frac{2}{3} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

$$\frac{1}{2^{n+1}} / \frac{1}{3^n} = \left( \frac{3}{2} \right)^n \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

所以, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 不存在.

## 方法、技巧与典型例题分析

### 一、级数的敛散性问题

数项级数敛散性问题是级数研究中的一个基本问题.由级数的敛散性定义知,判别级数的敛散性实质上是判别级数部分和数列的敛散性,求级数的和就是求级数部分和数列的极限.因此,研究级数的基本思想方法就是将级数的问题转化为其部分和数列的相应问题.同时,在实际问题中,我们还需利用已知敛散性的级数和级数的性质来帮助确定级数的敛散性及推断级数的一些性质.

**例 1** 一弹性小球从高 $h_0$ 处落下,落地后弹起的高度为前次下落高度的一半.如此往复起落,问小球的起落是否会停止.

解 从理论上讲,小球的起落次数是无穷的.是否停止跳动,要看完成这无数次起落的时间是否是有限的.于是,问题可以归结为一个无穷级数的敛散性问题.

依自由落体基本规律有,  $h = \frac{1}{2}gt^2$ , 所以小球从高  $h_0$  处落地所需时间为  $t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$ , 小球弹起  $\frac{h_0}{2}$  再落地所需时间为  $t_1 = 2\sqrt{\frac{h_0}{g}}$ , 小球第  $i$  次弹起再落地所需时间为  $t_i = 2\sqrt{\frac{h_0}{2^{i-1}g}}$ , 于是, 小球从开始下落至第  $n$  次落地所用时间为

$$\begin{aligned} T_n &= t + t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1} \\ &= \sqrt{\frac{2h_0}{g}} + 2\sqrt{\frac{h_0}{g}} + 2\sqrt{\frac{h_0}{2g}} + \cdots + 2\sqrt{\frac{h_0}{2^{n-1}g}} \\ &= \sqrt{\frac{2h_0}{g}} + 2\sqrt{\frac{h_0}{g}} \frac{1 - (1/\sqrt{2})^n}{1 - 1/\sqrt{2}} \rightarrow (4 + 3\sqrt{2})\sqrt{\frac{h_0}{g}}. \end{aligned}$$

故  $T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = (4 + 3\sqrt{2})\sqrt{h_0/g}$ . 由此可知,完成这无数次起落所用的时间是有限的,因此,小球的弹跳过程一定会停止.

例 2 判断下列命题的真伪,给出证明或举出反例.

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$  发散;
- (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$  发散;
- (3)  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l \neq 0$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛;
- (4)  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + |u_n|}$  发散.

解 (1) 真. 用反证法证明. 若  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$  收敛, 则由  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

收敛知,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} [(u_n + v_n) - u_n]$  也收敛. 这与题设矛盾.

(2) 伪. 例如,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$  发散, 但是,

$\sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + (-1)^{n+1}]$  收敛.

(3) 伪. 比式判别法的极限形式只对正项级数适用. 例如

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$  收敛, 令  $v_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{(-1)^n / \sqrt{n}}{(-1)^n / \sqrt{n} + 1/n} = 1 \neq 0.$$

但是, 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 依题(1)知,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散.

(4) 真. 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ . 于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + |u_n|} =$

1. 由级数收敛的必要条件知,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + |u_n|}$  发散.

**例 3 证明:**

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{1}{a} \quad (a > 0);$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2a+2n-1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{1}{a} \quad (a > 0).$$

**证** 利用  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  证明.

$$\begin{aligned} (1) S_n &= \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \cdots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} \\ &= \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} \right) + \left( \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} \right) + \cdots \\ &\quad + \left( \frac{1}{a+n-1} - \frac{1}{a+n} \right) \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+n}, \end{aligned}$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{a}$ . 所以命题成立.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad S_n &= \frac{2a+1}{a(a+1)} - \frac{2a+3}{(a+1)(a+3)} + \cdots \\
 &\quad + (-1)^{n+1} \frac{2a+2n-1}{(a+n-1)(a+n)} \\
 &= \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} \right) - \left( \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} \right) + \cdots \\
 &\quad + (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{a+n-1} + \frac{1}{a+n} \right) \\
 &= \frac{1}{a} + (-1)^{n+1} \frac{1}{a+n},
 \end{aligned}$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{a}$ . 所以命题成立.

例 4 证明:

(1) 若  $b_n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$  发散;

(2) 若  $u_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ),  $\sum_{k=1}^{\infty} (u_{2k-1} - u_{2k})$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛;

(3) 若  $a_n \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a$ ;

(4) 若  $b_n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 则  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = \frac{1}{b_1}$ .

证 利用数列的敛散性研究级数的敛散性.

(1)  $S_n = \sum_{k=1}^n (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1 \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 所以级

数  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$  发散.

(2) 设  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ ,  $T_n = \sum_{k=1}^n (u_{2k-1} + u_{2k})$ , 则

当  $n=2k$  时,  $S_n = T_k$ ,  $k=1, 2, \cdots$ ,

当  $n=2k-1$  时,  $S_n = T_{k-1} + u_n$ ,  $k=1, 2, \cdots$ .

故当  $n \rightarrow \infty$  时,  $k \rightarrow \infty$ ,  $u_n \rightarrow 0$ , 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k = \lim_{k \rightarrow \infty} T_{k-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (u_{2k-1} + u_{2k}),$$

所以级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.

$$\begin{aligned} (3) \quad S_n &= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) \\ &= a_1 - a_{n+1} \rightarrow a_1 - a \quad (n \rightarrow \infty, a_{n+1} \rightarrow a). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad S_n &= \left( \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} \right) + \left( \frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_3} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}} \rightarrow \frac{1}{b_1} \quad (n \rightarrow \infty, \frac{1}{b_{n+1}} \rightarrow 0). \end{aligned}$$

**例 5** 证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = a$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也收敛.

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \text{令 } S_n &= \sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k-1}) \\ &= (a_1 - a_0) + (2a_2 - 2a_1) + \cdots + (na_n - na_{n-1}) \\ &= -a_0 - a_1 - \cdots - a_{n-1} + na_n, \end{aligned}$$

于是  $\sum_{k=0}^{n-1} a_k = na_n - S_n$ . 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a - S \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \rightarrow a - S.$$

即级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

**例 6** 设级数  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$  都收敛, 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也收敛.

**证** 设  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的部分和分别为  $S_n(1)$ ,  $S_n(2)$

和  $S_n$ , 因为  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$  和  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$  收敛, 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(1) = S'$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(2) = S''$ . 显然

$$S_{2m} = S_m(1) + S_m(2), \quad S_{2m-1} = S_m(1) + S_{m-1}(2).$$

于是  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S' + S'', \quad \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m-1} = S' + S''.$

依收敛级数的性质,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S' + S'',$  即级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

例 7 证明: 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 且

$$a_n \leq c_n \leq b_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  也收敛.

证 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 由柯西审敛原理,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$ , 使得当  $n > N_1$  时, 有  $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon; \exists N_2 \in \mathbb{N}$ , 使得当  $n > N_2$  时, 有  $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \right| < \varepsilon.$

于是, 取  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 则当  $n > N$  时, 上面两不等式都成立. 从而

$$-\varepsilon < \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k < \varepsilon,$$

即  $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \right| < \varepsilon.$  故依柯西审敛原理,  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  收敛.

例 8 证明: 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \geq 0)$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  也收敛.

证 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$  因此, 当  $n > N_0$  时, 必有  $a_n < 1$ , 从而  $a_n^2 < a_n < 1$ , 则

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k^2 < \sum_{k=1}^n a_k = B_n \rightarrow B.$$

所以,  $\{A_n\}$  是单调增加有上界的数列, 由此可知, 数列  $\{A_n\}$  收敛,

即级数  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$  收敛.



逆命题不成立. 如  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 但是级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  却发散.

如果  $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ , 对一切  $p > N$  和  $q > N$ , 恒有  $|S_p - S_q| < \varepsilon$ , 则称数列  $\{S_n\}$  为柯西数列. 由柯西审敛原理(见第一章), 柯西数列是收敛数列; 反之, 若数列收敛, 则必为柯西数列. 级数收敛的充分必要条件是: 级数的部分和数列  $\{S_n\}$  是柯西数列.

例 9 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 且  $a_n > 0$ , 证明:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}} \text{ 收敛}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 - a_n} \text{ 收敛}, a_n \neq 1.$$

证 利用柯西数列证明.

(1) 因  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$  也收敛, 记其部分和数列为  $\{T_n\}$ , 则  $\{T_n\}$  为柯西数列, 而

$$\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}),$$

故  $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ , 对一切  $p > q > N$ , 有

$$\begin{aligned} |S_p - S_q| &= \sum_{k=q+1}^p \sqrt{a_k a_{k+1}} \leq \sum_{k=q+1}^p \frac{a_k + a_{k+1}}{2} \\ &= |T_p - T_q| < \varepsilon. \end{aligned}$$

即  $\{S_n\}$  也是柯西数列, 故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$  收敛.

(2) 因级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 故存在  $N > 0$ , 对一切  $n > N$ , 有  $a_n < 1/2$ , 于是

$$0 < \frac{a_n}{1 - a_n} < 2a_n.$$

从而由原级数收敛知,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 - a_n}$  也收敛.

例 10 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 数列  $\{\lambda_n\}$  具有性质: 存在常数  $k$ , 对

一切  $n$ , 恒有  $\sum_{i=1}^n |\lambda_i - \lambda_{i+1}| < k$ . 证明: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$  也收敛.

证 记  $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ,  $T_n = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$ , 当  $m > n$  时, 有

$$\begin{aligned} T_m - T_n &= \lambda_m a_m + \cdots + \lambda_{n+1} a_{n+1} \\ &= \lambda_m (S_m - S_{m-1}) + \cdots + \lambda_{n+1} (S_{n+1} - S_n) \\ &= \lambda_m S_m - \lambda_{n+1} S_n + S_{m-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) + \cdots \\ &\quad + S_{n+1} (\lambda_{n+1} - \lambda_{n+2}), \end{aligned}$$

$$|T_m - T_n| \leq |\lambda_m S_m - \lambda_{n+1} S_n| + \sum_{i=n+1}^{m-1} |\lambda_i - \lambda_{i+1}| |S_i|.$$

现在来证明  $\{T_m\}$  是柯西数列.

先证  $\{S_n\}$  和  $\{\lambda_n\}$  有界. 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 所以  $\{S_n\}$  有界, 即对一

切  $n$ ,  $\exists M > 0$ , 使得  $|S_n| < M$ . 又由  $\sum_{i=1}^n |\lambda_i - \lambda_{i+1}| < k$  知, 级数

$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i - \lambda_{i+1}|$  收敛 (因为级数单调增加且有上界), 故数列  $\{|\lambda_i - \lambda_{i+1}|\}$  是柯西数列. 因此,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0$ , 使得对一切  $m > n > N_1$ , 总有

$$\sum_{i=n+1}^m |\lambda_i - \lambda_{i+1}| < \frac{\varepsilon}{3M},$$

从而 
$$\sum_{i=n+1}^{m-1} |\lambda_i - \lambda_{i+1}| |S_i| < \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M = \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1)$$

又  $|\lambda_i - \lambda_1| = |(\lambda_n - \lambda_{n-1}) + (\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}) + \cdots + (\lambda_2 - \lambda_1)|$

$$\leq \sum_{i=1}^{n-1} |\lambda_i - \lambda_{i+1}| < k,$$

即对一切  $n$ , 有  $|\lambda_n| < k + |\lambda_1| = L$ .

由  $\sum_{i=n+1}^m |\lambda_i - \lambda_{i+1}| \leq \frac{\varepsilon}{3M}$  还可得到

$$\begin{aligned} |\lambda_m - \lambda_{n+1}| &= |(\lambda_m - \lambda_{m-1}) + \cdots + (\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1})| \\ &\leq \sum_{i=n+1}^{m-1} |\lambda_i - \lambda_{i+1}| < \frac{\varepsilon}{3M}. \end{aligned}$$

由于  $\{S_n\}$  是柯西数列, 故  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 > 0$ , 使得对一切  $m > n > N_2$ , 总有  $|S_m - S_n| < \frac{\varepsilon}{3L}$ . 于是, 对一切  $m > n > N = \max\{N_1, N_2\}$ , 总有

$$\begin{aligned} |\lambda_m S_m - \lambda_{n+1} S_n| &= |\lambda_m (S_m - S_n) + (\lambda_m - \lambda_{n+1}) S_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned} \quad (2)$$

将式①、式②代入  $|T_m - T_n|$  式, 得  $|T_m - T_n| < \varepsilon$ .

故  $\{T_n\}$  是柯西数列, 于是知  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$  收敛.

由本例命题立即可以得到阿贝尔(Abel)判别法:

若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 数列  $\{\lambda_n\}$  单调有界, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$  收敛.

**例 11** 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的部分和数列  $\{S_n\}$  有界, 即  $\exists M > 0$ , 使得对一切  $|S_n| < M$ . 在数列  $\{\lambda_n\}$  满足  $|S_m - S_n| < \varepsilon/(3L)$  ( $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ , 当  $m > n > N$  时, 而  $|\lambda_n| < L$ ) 且  $\lambda_n \rightarrow 0$  时, 证明

$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$  收敛.

**证** 同例 10 可证得

$$|T_m - T_n| \leq |\lambda_m S_m - \lambda_{n+1} S_n| + \sum_{i=n+1}^{m-1} |\lambda_i - \lambda_{i+1}| |S_i| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$\text{及} \quad \sum_{i=n+1}^{m-1} |\lambda_i - \lambda_{i+1}| |S_i| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3)$$

又由题设  $\lambda_n \rightarrow 0$  知,  $\exists N > 0$ , 当  $m > n > N$  时,  $|\lambda_m|$  和  $|\lambda_n|$  均小于  $\varepsilon/(3M)$ , 从而

$$|\lambda_m S_m - \lambda_{n+1} S_n| \leq |\lambda_m| |S_m| + |\lambda_{n+1}| |S_n| < 2\epsilon/3. \quad (4)$$

将式③、式④代入  $|T_m - T_n|$  式, 得  $|T_m - T_n| < \epsilon$ .

故  $\{T_n\}$  是柯西数列, 于是知  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$  收敛.

由本例命题立即可得狄利克雷(Dirichlet)判别法:

若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的部分和数列有界, 数列  $\{\lambda_n\}$  单调且  $\lambda_n \rightarrow 0$ , 则级

数  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$  收敛.

**例 12** 试用狄利克雷判别法确定下列级数的敛散性:

$$(1) 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots;$$

$$(2) \{\lambda_n\} \text{ 单调且 } \lambda_n \rightarrow 0, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin n\theta, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos n\theta \quad (\theta \neq 2k\pi).$$

**解** (1) 因为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$  的部分和  $\{S_n\}$  有界, 取  $\lambda_n = 1/n$ , 则  $\{\lambda_n\}$  单调且  $\lambda_n \rightarrow 0$ . 由狄利克雷判别法知级数收敛.

(2)  $\{\lambda_n\}$  单调且  $\lambda_n \rightarrow 0$ , 又有

$$S_n = \sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta = \left[ \sin \frac{n+1}{2} \theta \sin \frac{n}{2} \theta \right] / \sin \frac{\theta}{2},$$

$$T_n = \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta$$

$$= \left[ \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] / \left( 2 \sin \frac{\theta}{2} \right) - \frac{1}{2}$$

均有界. 依狄利克雷判别法, 两级数均收敛.

**例 13** 设  $a_n > 0$ , 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

收敛.

**证** 用收敛的定义证明. 因为

$$\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

$$= \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})} - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)},$$

所以 
$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)}$$

$$= \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}.$$

又  $a_n > 0$ , 故  $\{S_n\}$  单调减少且有下界, 故收敛. 从而级数收敛.

**例 14** 求下列级数的和:

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1};$       (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)};$

(3)  $\sum_{n=0}^{\infty} [x^{2^n}/(1-x^{2^{n+1}})], 0 < x < 1;$

(4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{2n^2}$  和  $\sum_{n=2}^{\infty} \arctan \frac{2}{4n^2-4n+1}.$

**解** 本例的解法称为连锁消去法. 即, 将通项分解, 利用前后项连锁相消的方法求出部分和  $S_n$ , 再取  $n \rightarrow \infty$  时  $S_n$  的极限, 求级数的和.

$$\begin{aligned} (1) S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$  的和是  $\frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned} (2) S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$  的和是  $\frac{1}{4}$ .

$$\begin{aligned}
 (3) \quad S_n &= \sum_{k=0}^n [x^{2^k}/(1-x^{2^{k+1}})] \\
 &= \sum_{k=0}^n [1/(1-x^{2^k}) - 1/(1-x^{2^{k+1}})] \\
 &= \frac{1}{1-x} - 1/(1-x^{2^{n+1}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1-x},
 \end{aligned}$$

故级数  $\sum_{n=0}^{\infty} [x^{2^n}/(1-x^{2^{n+1}})]$  ( $0 < x < 1$ ) 的和是  $\frac{x}{1-x}$ .

(4) 由公式  $\arctan \frac{x-y}{1+xy} = \arctan x - \arctan y$  知

$$\arctan \frac{1}{2k^2} = \arctan \frac{1}{2k-1} - \arctan \frac{1}{2k+1},$$

$$\begin{aligned}
 \arctan \frac{2}{4k^2 - 4k + 1} &= \arctan \frac{1}{2(k-1/2)^2} \\
 &= \arctan \frac{1}{2(k-1/2)-1} - \arctan \frac{1}{2(k-1/2)+1},
 \end{aligned}$$

得 
$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n \left( \arctan \frac{1}{2k-1} - \arctan \frac{1}{2k+1} \right) \\
 &= \arctan 1 - \arctan \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_n &= \sum_{k=2}^n \left[ \arctan \frac{1}{2(k-1/2)-1} - \arctan \frac{1}{2(k-1/2)+1} \right] \\
 &= \arctan \frac{1}{2 \cdot 3/2 - 1} - \arctan \frac{1}{2(n-1/2)+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \arctan \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{2n^2}$  的和是  $\frac{\pi}{4}$ , 级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \arctan \frac{1}{4n^2 - 4n + 1}$  的和是  $\arctan \frac{1}{2}$ .

**例 15** 计算级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})$  的和.

**解** 仍用连锁消去法.

$$\begin{aligned}
 S_n &= (1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{4}) \\
 &\quad + (\sqrt{3} - 2\sqrt{4} + \sqrt{5}) + \cdots + (\sqrt{n-1} - 2\sqrt{n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{n+1}) + (\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}) \\
& = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} \\
& = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \sqrt{2},
\end{aligned}$$

故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})$  的和是  $1 - \sqrt{2}$ .

**例 16** 计算下列级数的和:

$$(1) \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} + \cdots;$$

$$(2) \frac{8}{3} + \frac{11}{3^2} + \frac{14}{3^3} + \cdots + \frac{3n+5}{3^n} + \cdots.$$

**解** 可用组合法计算,即利用  $S_n$  与  $aS_n$  的组合(适当选取  $a \neq 0$ ), 求出  $S_n$ , 再求出  $S$ .

$$(1) S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-3}{2^{n-1}} + \frac{2n-1}{2^n},$$

$$2S_n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n-1}},$$

$$\text{于是 } S_n = 2S_n - S_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n}$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \Big/ \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{2n-1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3,$$

所以原级数的和是 3.

$$(2) S_n = \frac{8}{3} + \frac{11}{3^2} + \frac{14}{3^3} + \cdots + \frac{3(n-1)+5}{3^{n-1}} + \frac{3n+5}{3^n},$$

$$\frac{1}{3}S_n = \frac{8}{3^2} + \frac{11}{3^3} + \frac{14}{3^4} + \cdots + \frac{3(n-1)+5}{3^n} + \frac{3n+5}{3^{n+1}},$$

$$\frac{2}{3}S_n = \frac{8}{3} + 3\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}}\right) - \frac{3n+5}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{8}{3} + 3\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^n}\right) \Big/ \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \frac{3n+5}{3^{n+1}},$$

$$S_n = 4 + \frac{27}{4}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{3^n}\right) - \frac{3}{2} \cdot \frac{(3n+5)}{3^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4 + \frac{3}{4} = \frac{19}{4},$$

所以原级数的和是  $\frac{19}{4}$ .

类似地, 利用  $S_n = 2S_n - S_n$ , 可求出  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  的和是 2; 利用  $(1 - e^{-x})S_n$ , 可求出  $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$  的和是  $e^{-x}/(1 - e^{-x})^2$ .

例 17 计算:

$$q\cos\alpha + q^2\cos 2\alpha + \cdots + q^n\cos n\alpha + \cdots \quad (|q| < 1).$$

解 建立关于  $S_n$  的方程式, 解出  $S_n$ , 再求  $S_n$  的极限. 因为

$$S_n = \sum_{k=1}^n q^k \cos k\alpha,$$

$$\begin{aligned} 2q\cos\alpha S_n &= \sum_{k=1}^n 2q^{k+1} \cos\alpha \cos k\alpha \\ &= \sum_{k=1}^n q^{k+1} [\cos(k+1)\alpha + \cos(k-1)\alpha], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{即} \quad 2q\cos\alpha S_n &= [q^{n+1}\cos(n+1)\alpha + S_n - q\cos\alpha] \\ &\quad + [q^2 + q^2 S_n - q^{n+2}\cos n\alpha], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{得} \quad S_n &= \frac{q^{n+2}\cos n\alpha - q^{n+1}\cos(n+1)\alpha + q\cos\alpha - q^2}{1 + q^2 - 2q\cos\alpha} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{q\cos\alpha - q^2}{1 + q^2 - 2q\cos\alpha}. \end{aligned}$$

故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos n\alpha$  的和是  $\frac{q\cos\alpha - q^2}{1 + q^2 - 2q\cos\alpha}$ .

类似可得, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin n\alpha$  的和是  $\frac{q\sin\alpha}{1 + q^2 - 2q\cos\alpha}$ .

本例可由复变函数中的欧拉(Euler)公式  $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$  得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} q^n (\cos n\alpha + i\sin n\alpha) &= \sum_{n=1}^{\infty} (qe^{i\alpha})^n \quad (\text{等比级数}) \\ &= \frac{q\cos\alpha - q^2 + i q\sin\alpha}{1 + q^2 - 2q\cos\alpha}. \end{aligned}$$

比较等式两边的实部与虚部即得两级数的和.



例 18 证明: (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2$ ;

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} = \frac{1}{m} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \right), m \in \mathbf{Z}.$$

证 由上册第一章知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = C \quad (C \text{ 称为欧拉数}),$$

$$\text{故有 } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \alpha_n \quad (\alpha_n \rightarrow 0).$$

当  $n=2m$  时, 有

$$\begin{aligned} S_{2m} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2m} \\ &= \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2m} \right) - 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m} \right) \\ &= \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2m} \right) - \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \right) \\ &= \ln 2m + C + \alpha_{2n} - \ln m - C - \alpha_n \\ &= \ln 2 + (\alpha_{2n} - \alpha_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln 2, \end{aligned}$$

当  $n=2m+1$  时, 有

$$S_{2m+1} = S_{2m} + \frac{1}{2m+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln 2.$$

$$\text{所以 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2.$$

$$\begin{aligned} (2) S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{m} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+m} \right) \\ &= \frac{1}{m} \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{m+n} \right) \right], \end{aligned}$$

当  $n > m$  时, 有

$$S_n = \frac{1}{m} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \right) + \frac{1}{m} \left( \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n} \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{m+n}\right) \\
& =\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)-\frac{1}{m}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+m}\right) \\
& \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right).
\end{aligned}$$

例 19 已知  $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$ , 求  $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$  的和.

解 因为  $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ , 而

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{2n-1}-a_{2n}+\cdots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}+\cdots,$$

$$\begin{aligned}
\text{故 } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1} & =-(a_2+a_4+\cdots+a_{2n}+\cdots) \\
& =-\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=2-5=-3,
\end{aligned}$$

所以 
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3+5=8.$$

例 20 由级数的性质确定下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} / \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{2^n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

解 (1) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} / \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \neq 0$ , 不满足收敛的必要条件, 所以级数发散.

(2) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{2^n} / \frac{\pi}{2^n} \cdot \pi = \pi \neq 0$ , 不满足收敛的必要条件, 所以级数发散.

(3) 依拉格朗日 (Lagrange) 中值定理, 有

$$\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{n+\theta} < \frac{1}{n} \quad (0 < \theta < 1).$$

对  $n$  作不等式求和, 得

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} > \ln(N+1) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty,$$

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散.

(4) 因为  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$ , 所以

$$S_n = \ln(1+n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  发散.

**例 21** 用柯西审敛原理证明下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \quad (2) 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}; \quad (4) \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \cdots + \frac{\sin nx}{2^n};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}.$$

**证** 利用柯西审敛原理解题, 有时要注意  $p$  的取法和  $N$  的取法, 取法正确可使证明过程简单.

(1) 因为  $\forall n, p \in \mathbf{N}$ , 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\ & < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p+1)(n+p)} \\ & = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

故只需取  $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ , 则当  $n > N$  时, 即有

$$0 < \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

所以级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛.

(2) 由级数正负项的规律性, 取  $p=3n$ , 则

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &= \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6} + \cdots + \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right| \\ &> \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{1}{4n-2} \right| \\ &> \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} + \cdots + \frac{1}{4n} = n \cdot \frac{1}{4n} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

所以, 原级数当  $\epsilon_0 = \frac{1}{4}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p=3n$ , 使得  $|S_{n+p} - S_n| > \epsilon_0$ , 故级数发散.

(3)  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 取  $p=n$ , 使得  $\forall \epsilon_0 < \frac{1}{2}$ , 则

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} > \epsilon_0. \end{aligned}$$

所以, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散.

(4)  $\forall p \in \mathbb{N}$ , 有

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &= \left| \frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \left( 1 - \frac{1}{2^p} \right) \bigg/ \left( 1 - \frac{1}{2} \right) < \frac{1}{2^n}, \end{aligned}$$

故  $\forall \epsilon > 0$ , 只需取  $N = [\log_2 (1/\epsilon)] + 1$ , 则当  $n > N$  时,  $\forall p \in \mathbb{N}$ , 都有上式成立, 即知级数收敛.

(5)  $\forall \epsilon > 0, \exists N$ , 当  $n > N$  时,  $\forall p \in \mathbb{N}$ , 有

$$\begin{aligned}
|S_{n+p} - S_n| &= \left| \frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n+p+1)x}{n+p} \right. \\
&\quad - \frac{\cos(n+2)x}{(n+1)(n+2)} - \frac{\cos(n+3)x}{(n+2)(n+3)} \\
&\quad \left. - \dots - \frac{\cos(n+p)x}{(n+p-1)(n+p)} \right| \\
&\leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+p} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} \\
&\quad + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

所以,级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$  收敛.

## 二、正项级数的敛散性问题

正项级数的显著特点是其部分和数列  $\{S_n\}$  单调增加. 因此, 如果能确定  $\{S_n\}$  有上界, 级数的敛散性就确定了. 判别正项级数敛散性的方法很多, 读者只有牢记各个方法的条件与结论, 才能运用自如. 遇到敛散性不能确定的情形, 应另觅良法.

**例 22** 证明: 若  $u_n \geq 0, u_n \geq u_{n+1}$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛的充分必

要条件是级数  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^k u_{2^k}$  收敛.

**证** 记  $S_n = \sum_{i=1}^n u_i, T_k = \sum_{j=1}^n 2^j u_{2^j}$ , 则  $\forall n$ , 总有  $k \in \mathbb{N}$ , 使得  $2^{k-1} < n \leq 2^k$ , 所以

$$\begin{aligned}
S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n \leq u_1 + u_2 + \dots + u_{2^k} \\
&\leq u_1 + (u_2 + u_3) + (u_4 + \dots + u_7) + \dots \\
&\quad + (u_{2^{k-1}} + \dots + u_{2^k-1}) + (u_{2^k} + \dots + u_{2^{k+1}-1}) \\
&\leq u_1 + 2u_2 + 4u_4 + \dots + 2^k u_{2^k} = T_k,
\end{aligned}$$

而  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 必有  $n$ , 使得  $2^k < n < 2^{k+1}$ , 所以

$$\begin{aligned}
S_n &\geq u_1 + u_2 + \dots + u_{2^k} \\
&= u_1 + u_2 + (u_3 + u_4) + (u_5 + \dots + u_8) + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (u_{2^{k-1}} + \cdots + u_{2^k}) \\
& \geq u_1 + u_2 + 2u_4 + 4u_8 + \cdots + 2^{k-1}u_{2^k} \\
& \geq \frac{1}{2}(u_1 + 2u_2 + 2^2u_4 + \cdots + 2^ku_{2^k}) = \frac{1}{2}T_k.
\end{aligned}$$

于是, 由  $S_n \leq T_k \leq 2S_n$  表明两级数的敛散性相同.

**例 23** 用比较原则确定下列级数的敛散性:

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$ ; (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  ( $p$  级数);
- (3)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ ; (4)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ ;
- (5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n / (\sqrt{n} \cdot 2^n)$ ; (6)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$ ;
- (7)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n} / n$  ( $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 且  $a_n \geq 0$ ).

**解** 利用比较原则的关键是选择一个已知敛散性的级数进行比较, 常用作比较对象的是等比级数与  $p$  级数(见本例题(2)).

(1)  $2^n \sin \frac{\pi}{3^n} < 2^n \frac{\pi}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \pi$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \pi$  是收敛级数, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$  也收敛.

(2) 当  $p > 1$  时,  $\frac{1}{n^p} \geq 0$ ,  $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{(n+1)^p}$ . 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^n} = \frac{1}{2^{p-1}} \left/ \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right)\right. = \frac{1}{2^{p-1} - 1},$$

所以依例 21,  $p$  级数当  $p > 1$  时收敛.

当  $p \leq 1$  时,  $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$ , 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 所以  $p$  级数当  $p \leq 1$  时发散.

也可以用加括号的方法来证:

$$1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{7^p}\right) + \cdots$$

$$\leq 1 + \left( \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} \right) + \left( \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{4^p} \right) + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left( \frac{1}{2^{p-1}} \right)^2 + \cdots$$

是公比为  $1/2^{p-1} < 1$  的等比级数, 当  $p > 1$  时级数收敛.

还可利用积分判别法证明: 令  $f(x) = \frac{1}{x^p}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1-p} - 1}{1-p} \stackrel{p>1}{=} \frac{1}{p-1}.$$

(3) 当  $p > 1$  时,  $\frac{1}{n(\ln n)^p} > 0$ , 且

$$\frac{1}{n(\ln n)^p} > \frac{1}{(n+1)[\ln(n+1)]^p},$$

因为  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n (\ln 2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^p n^p}$  收敛, 依例 21 结论, 级数收敛;  
当  $p \leq 1$  时级数发散.

(4) 当  $n$  充分大时, 有

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{e^{\ln n \cdot \ln(\ln n)}} \leq \frac{1}{e^{2 \ln n}} = \frac{1}{n^2},$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$  收敛.

(5) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n / \sqrt{n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x / \sqrt{x} = 0$ , 所以当  $n$  充分大

时,  $0 < \ln n / \sqrt{n} < 1$ , 即  $0 < \frac{\ln n}{2^n \sqrt{n}} < \frac{1}{2^n}$ . 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  是收敛级数,

故  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n / (2^n \sqrt{n})$  也收敛.

(6) 因为

$$1 - \cos \frac{\pi}{n} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \leq 2 \left( \frac{\pi}{2n} \right)^2 = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{1}{n^2},$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)$  收敛.

(7) 因为  $0 < \frac{\sqrt{a_n}}{n} = \sqrt{a_n} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{n^2} \right) < a_n + \frac{1}{n^2}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n + \frac{1}{n^2} \right)$  收敛, 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}/n$  收敛.

**例 24** 判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right];$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2}, x_n \text{ 是方程 } x = \tan x \text{ 的正根 (按递增顺序排列)}.$$

**解** (1) 直接找可比级数很困难, 利用  $\ln(1+x)$  在  $x=0$  (当  $n \rightarrow \infty$  时,  $1/n \rightarrow 0$ ) 处的二阶泰勒 (Taylor) 公式, 得

$$\frac{1}{n} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} - \left[ \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o \left( \frac{1}{n^2} \right) \right] = \frac{1}{2n^2} + o \left( \frac{1}{n^2} \right),$$

所以,  $\frac{1}{n} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$  与  $\frac{1}{n^2}$  是同阶无穷小 ( $n \rightarrow \infty$ ), 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收

敛, 从而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right]$  也收敛.

(2) 因为  $x_n \in \left( \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right)$ ,  $n=1, 2, \dots$ , 所以

$$x_n > \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi = \left( n - \frac{1}{2} \right) \pi,$$

$$\frac{1}{x_n^2} < \frac{1}{(n-1/2)^2 \pi^2} < \frac{1}{n^2}, n=1, 2, \dots,$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2}$  也收敛.

**例 25** 用比式判别法或根式判别法确定下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x > 0); \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} \quad (a > 0);$$



$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}) \cdots (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2});$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2 + 1/n)^n}; \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! a^n}{n^n} \quad (a > 0).$$

**解** 比式判别法是最易使用的方法,而根式判别法一般在通项中含因式的 $n$ 次方时才使用.它们的缺点是,当极限为1时无法确定敛散性,需要另辟蹊径.

(1) 用比式判别法. 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1,$$

所以,级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  ( $x > 0$ ) 收敛.

(2) 用比式判别法. 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1.$$

所以,级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$  收敛.

(3) 用比式判别法. 因为  $a = 0$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  显然收敛. 当  $a \neq 0$  时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1 + a^{n+1}} = \begin{cases} a, & 0 < a < 1, \\ 1/2, & a = 1, \\ 0, & a > 1. \end{cases}$$

所以,当  $a \geq 0$  时,原级数均收敛.

(4) 用比式判别法. 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} - \sqrt[2n+3]{2}) = \sqrt{2} - 1 < 1,$$

所以,原级数收敛.

(5) 用根式判别法. 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 / (2 + 1/n)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}}{2 + 1/n}$$

$$= 1/2 < 1,$$

所以,原级数收敛.

(6) 用比式判别法. 因为

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{(n+1)! a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \bigg/ \frac{n! a^n}{n^n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} = \frac{a}{e}.\end{aligned}$$

所以,当  $a < e$  时,级数收敛;当  $a > e$  时,级数发散.

当  $a = e$  时,依斯特林(Stirling)公式(见上册):  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$ , 故  $\frac{n! e^n}{n^n} \sim \sqrt{2\pi n} \rightarrow \infty$ , 所以级数发散.

**例 26** 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是正项级数,若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ . 反之不成立.

**证** 求证根式判别法的适用范围比比式判别法更广泛.

设  $l > 0, \forall \epsilon > 0 (\epsilon < l), \exists N \in \mathbb{N}$ , 使得当  $n > N$  时,有

$$0 < l - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \epsilon,$$

$$\text{则 } l - \epsilon < \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < l + \epsilon, l - \epsilon < \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} < l + \epsilon, \dots, l - \epsilon < \frac{a_n}{a_{n-1}} < l + \epsilon.$$

将以上不等式对应项相乘,得

$$(l - \epsilon)^{n-N-1} < \frac{a_n}{a_{N+1}} < (l + \epsilon)^{n-N-1},$$

$$(l - \epsilon)^n \frac{a_{N+1}}{(l - \epsilon)^{N+1}} < a_n < (l + \epsilon)^n \frac{a_{N+1}}{(l + \epsilon)^{N+1}},$$

$$(l - \epsilon) \sqrt[n]{\frac{a_{N+1}}{(l - \epsilon)^{N+1}}} < \sqrt[n]{a_n} < (l + \epsilon) \sqrt[n]{\frac{a_{N+1}}{(l + \epsilon)^{N+1}}},$$

当  $n \rightarrow \infty$  时,由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ , 可得

$$l - \epsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq l + \epsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

当  $l=0$  或  $l=+\infty$  时, 类似可证  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ .

反之, 可举例说明. 如级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1,$$

所以级数收敛. 但是, 若依比式判别法, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+(-1)^{n+1}}{2[2+(-1)^n]} = \begin{cases} 3/2, & n \text{ 为奇数,} \\ 1/6, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  不存在. 可见, 此时比式判别法失效.

**例 27** 讨论下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 1 / \int_0^n \sqrt[4]{1+x^4} dx \right];$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x^2(1-x)^n dx, \text{ 并求和.}$$

**解** (1) 因为  $a_n = \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$ , 有

$$0 \leq a_n \leq \int_0^{1/n} \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}.$$

而级数  $\frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$  是  $p$  级数,  $p > 1$ , 级数收敛, 故原级数收敛.

(2) 因为  $0 < a_n < 1 / \int_0^n x dx = \frac{2}{n^2}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 所以原级数收敛.

$$(3) \text{ 因为 } a_n = \int_0^1 x^2(1-x^2)^n dx = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{1/n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} = 2.$$

所以原级数收敛.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left[ \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) - \left( \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) - \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{n+3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6},
\end{aligned}$$

故级数的和是  $1/6$ .

**例 28** 证明导数判别法: 设  $f(1/n) = a_n > 0$ ,  $f(0+0) = 0$ ,  $f'(x)$  在  $x=0$  的右邻域存在.

若  $\exists \delta > 0$ , 当  $0 < x < \delta$  时, 有  $\frac{xf'(x)}{f(x)} \geq G > 1$ , 则级数

$\sum_{n=1}^{\infty} f(1/n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛; 若  $\frac{xf'(x)}{f(x)} \leq 1$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f(1/n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

其极限形式是: 设  $f(1/n) = a_n > 0$ ,  $f(x+0) = 0$ . 若  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xf'(x)}{f(x)} = G$ , 则当  $G > 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛; 当  $G \leq 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

**证** 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$  ( $c \neq 0$ ) 敛散性相同, 且改变有限项不影响级数的敛散性, 故不妨设  $a_n = 1$ , 即  $f(1) = 1$ . 于是

(1) 取  $r$ : 使得  $G > r > 1$ , 作辅助函数  $F(x) = \ln f(x) - \ln x^r$ , 则

$$F'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{r}{x} \quad (0 < x < \delta).$$

因为  $\frac{xf'(x)}{f(x)} \geq G > r$ , 即  $\frac{f'(x)}{f(x)} > \frac{r}{x}$ , 所以  $F'(x) > 0$ . 从而  $F(x)$  在  $(0, 1]$  上严格单调增加. 又  $F(1) = \ln f(1) - \ln 1^r = 0$ , 即得  $F(x) < 0$ , 所以  $f(x) < x^r \Rightarrow a_n = f\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n^r}$ . 而  $p$  级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$  ( $r > 1$ ) 收敛, 从而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

(2) 若  $\frac{xf'(x)}{f(x)} \leq 1$ , 则  $\frac{f'(x)}{f(x)} \leq \frac{1}{x}$ , 作辅助函数  $F(x) = \ln f(x) - \ln x$ , 有

$$F'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{x} \leq 0.$$

从而  $F(x)$  在  $(0, 1]$  上严格单调减少,  $F(x) > F(1) = 0$  ( $0 < x < 1$ ), 即  $f(x) \geq x$ , 得  $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{n}$ . 由于  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$  发散.

由导数判别法可得正项级数收敛的一个充要条件:

设  $f\left(\frac{1}{n}\right) = a_n > 0$ ,  $f''(0)$  存在, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛的充要条件是  $f(0) = f'(0) = 0$ .

**例 29** 用导数判别法判别下列级数敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (\ln n)^p} \quad (p \in \mathbf{Z}^+); \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right).$$

**解** (1) 令  $f(x) = \frac{x^\alpha}{(-\ln x)^p}$ , 则

$$f'(x) = \frac{\alpha x^{\alpha-1} (-\ln x)^p + x^\alpha (-\ln x)^{p-1}}{(\ln x)^{2p}},$$

$$\frac{xf'(x)}{f(x)} = \alpha - \frac{p}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \alpha.$$

由导数判别法的极限形式知, 当  $\alpha > 1$  时, 原级数收敛; 当  $\alpha < 1$  时, 原级数发散; 当  $\alpha = 1$  时, 同例 22 题(3), 当  $p > 1$  时收敛, 当  $p = 1$  时发散.

(2) 令  $f(x) = 1 - \cos x$ , 则  $f'(x) = \sin x$ ,  $f''(x) = \cos x$ . 于是  $f(0) = f'(0) = 0$ ,  $f''(0)$  存在. 由正项级数的导数判别法知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$  收敛.

**例 30** 用根式判别法确定下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{b}{a_n} \right)^n, \text{ 其中 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a \neq b, a, b, a_n > 0.$$

解 (1) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{n}{2n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$ , 所以, 原级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n$  收敛.

(2) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{3n-1} \right)^{2-1/n} = \frac{1}{9} < 1$ , 所以, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1}$  收敛.

(3) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(b/a_n)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (b/a_n) = b/a$ , 所以, 当  $b < a$  时, 级数收敛; 当  $b > a$  时, 级数发散; 当  $b = a$  时, 敛散性不能确定.

例 31 用积分判别法确定下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}; \quad (2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}.$$

解 能用积分判别法判别的级数很少, 这两例用其它方法已求解过, 在此再作判别.

$$(1) \text{ 令 } f(x) = \frac{1}{x^p}, \text{ 则 } \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \frac{n^{1-p} - 1}{1-p} \quad (p \neq 1).$$

当  $p > 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1-p} - 1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$ , 原级数收敛;

当  $p < 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1-p} - 1}{1-p} = +\infty$ , 原级数发散;

当  $p = 1$  时, 原级数即调和级数, 发散.

$$(2) \text{ 令 } f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}, \text{ 则 } f'(x) = -\frac{(\ln x)^p + p(\ln x)^{p-1}}{x^2(\ln x)^{2p}}, \text{ 故}$$

当  $x \geq 2$  时,  $f'(x) \leq 0$ ,  $f(x)$  单调减少.

$$\text{又 } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \frac{1}{1-p} (\ln x)^{1-p} \Big|_2^{+\infty}. \text{ 当 } p < 1 \text{ 时, 级数和是}$$

$+\infty$ , 原级数发散; 当  $p > 1$  时, 级数和是  $\frac{1}{p-1}(\ln 2)^{1-p}$ , 原级数收

敛; 当  $p = 1$  时, 级数和是  $\ln \ln x \Big|_2^{+\infty} = \infty$ , 原级数发散.

**例 32** 用拉贝判别法判别下列级数的敛散性:

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\lambda \ln n}$ ; (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$ ;  
 (3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^{n+p}}$ ; (4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)} \quad (p, q > 0)$ ;  
 (5)  $\frac{a}{b} + \frac{a(a+d)}{b(b+d)} + \frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)} + \cdots \quad (a, b, d > 0)$ .

**解** 先求出  $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ , 再讨论极限.

$$\begin{aligned} (1) \quad n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) &= n\left(\frac{2^{-\lambda \ln n}}{2^{-\lambda \ln(n+1)}} - 1\right) = n(2^{\lambda \ln(1+1/n)} - 1) \\ &= n[e^{\ln 2^\lambda \cdot \ln(1+1/n)} - 1] \quad (\text{等价无穷小代换}) \\ &\sim n[\ln 2^\lambda \cdot \ln(1+1/n)] \\ &= n[1/n + o(1/n)] \ln 2^\lambda \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln 2^\lambda, \end{aligned}$$

故当  $\ln 2^\lambda > 1$ , 即  $\lambda > \log_2 e$  时, 级数收敛; 当  $\lambda < \log_2 e$  时, 级数发散;  
 当  $\lambda = \log_2 e$  时,  $a_n = 2^{-\lambda \ln n} = 1/n$ , 级数是调和级数.

$$\begin{aligned} (2) \quad n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) &= n\left[\frac{2n(2n+1)}{(2n-1)^2} - 1\right] = \frac{n(6n-1)}{(2n-1)^2} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3/2 > 1. \end{aligned}$$

故知原级数收敛.

$$\begin{aligned} (3) \quad n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) &= n\left[\frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+p} - 1\right] \\ &= \left[\frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+p} - 1\right] / \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+p} - 1\right] / \frac{1}{n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{e}(1+x)^{1/x+p} - 1\right] / x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{e} \cdot e^{(\frac{1}{x}+p)\ln(1+x)} - 1\right] / x \quad (\text{利用泰勒公式}) \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{e} \cdot e^{1 + (p - \frac{1}{2})x + o(x)} \right] / x = p - \frac{1}{2}.$$

故当  $p - 1/2 > 1$ , 即  $p > 3/2$  时, 级数收敛.

$$\begin{aligned} (4) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^p \left( 1 + \frac{q}{n+1} \right) - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1+x)^p \left( 1 + \frac{qx}{1+x} \right) - 1 \right] / x \\ &= p + q, \end{aligned}$$

故当  $p + q > 1$  时, 级数收敛.

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{b + nd}{a + nd} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)n}{a + nd} = \frac{b-a}{d},$$

故当  $\frac{b-a}{d} > 1$  时, 级数收敛.

在用拉贝判别法讨论极限时, 应特别注意利用等价无穷小代换和泰勒公式.

**例 33** 证明弗林克(Frink)判别法 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为正项级数, 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/a_{n-1})^n = k$  存在, 证明: 当  $k < 1/e$  时, 级数收敛; 当  $k > 1/e$  时, 级数发散.

**证** 记  $k = e^{-\lambda}$ , 则  $\lambda = \ln k$ . 若  $k < 1/e$ , 即  $\lambda > 1$ , 于是存在数  $s, \lambda > s > 1$ . 引入级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^s}$ , 是收敛的  $p$  级数. 又

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^s \Rightarrow \left( \frac{b_n}{b_{n-1}} \right)^n = \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{ns},$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{b_n}{b_{n-1}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{-n \cdot (-s)} = e^{-s} > e^{-\lambda} = k.$$

当  $N$  充分大时,  $\forall n > N$ , 有

$$\left( \frac{b_n}{b_{n-1}} \right)^n > \left( \frac{a_n}{a_{n-1}} \right)^n, \quad \text{即} \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} < \frac{b_n}{b_{n-1}},$$

依比式判别法知,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.



若  $k > \frac{1}{e}$ , 即  $e^{-\lambda} > e^{-1}$ . 引入级数  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , 是发散的调和级数. 又

$$\left(\frac{c_n}{c_{n-1}}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{c_n}{c_{n-1}}\right)^n = e^{-1} < e^{-\lambda} = k,$$

当  $N$  充分大时,  $\forall n > N$ , 有

$$\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^n > \left(\frac{c_n}{c_{n-1}}\right)^n, \quad \text{即} \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} > \frac{c_n}{c_{n-1}},$$

依比较原则知,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

如果对  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^n = k$  两边取对数, 即得对数判别法:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为正项级数, 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$ , 则级数收敛; 若

$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$ , 则级数发散.

**例 34** 用对数判别法确定下列级数敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln x} \quad (x > 0); \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}.$$

**解** (1)  $\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \ln x [\ln n - \ln(n+1)] = \ln x \ln \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln x \cdot \ln \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \ln x \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = -\ln x, \end{aligned}$$

故当  $-\ln x > 1$ , 即  $x < 1/e$  时, 级数收敛; 否则级数发散.

(2)  $\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \ln \{ [\ln(n+1)]^{\ln \ln(n+1)} / (\ln n)^{\ln \ln n} \}$ , 故  $\exists n_0$ , 当  $n >$

$n_0$  时,  $n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$ , 所以级数发散.

**例 35** 证明库默尔(Kummer)判别法 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  为

两个正项级数. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) > 0$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛; 若

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) < 0$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

证 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) > 0$ , 则  $\exists N, \forall n \geq N$  有  $\frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \geq k > 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \geq k a_{n+1}$ . 则对  $p > q = N$ , 有

$$\sum_{i=q}^{p-1} \left( \frac{a_i}{b_i} - \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} \right) \geq \sum_{i=q}^{p-1} k a_{i+1},$$

即 
$$k \sum_{i=q}^{p-1} a_{i+1} \leq \frac{a_q}{b_q} - \frac{a_p}{b_p} < \frac{a_q}{b_q} = \frac{a_N}{b_N} \Rightarrow \sum_{i=q}^{p-1} a_{i+1} \leq \frac{1}{k} \cdot \frac{a_N}{b_N}.$$

于是, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的部分和

$$\begin{aligned} S_p &= a_1 + a_2 + \cdots + a_N + (a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_p) \\ &\leq a_1 + a_2 + \cdots + a_N + \frac{1}{k} \cdot \frac{a_N}{b_N} = M \quad (a_N, b_N \text{ 不随 } p \text{ 变化}), \end{aligned}$$

即  $\{S_p\}$  单调增加且有上界, 所以级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) < 0$ , 则  $\exists N, \forall n \geq N$ , 有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \leq -k \quad (k > 0) \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{1}{b_n} < \frac{1}{b_{n+1}},$$

即 
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

依比较判别法知, 当  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散时  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

由库默尔判别法立即可得拉贝判别法(只需取  $b_n = 1/n$  即可证).

例 36 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为正项级数, 证明:

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] \ln n > 1$ , 则级数收敛;

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] \ln n < 1$ , 则级数发散.

证 取  $\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ , 该级数发散(见例 30 题(2)), 则

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot n \ln n - (n+1) \ln(n+1).$$

因为  $(n+1) \ln(n+1) - (n+1) \ln n = (n+1) \ln(1+1/n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ ,  
所以

$$\begin{aligned} \left[ n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] \ln n &= \frac{a_n}{a_{n+1}} n \ln n - (n+1) \ln n \\ &> \frac{a_n}{a_{n+1}} n \ln n - (n+1) \ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \end{aligned}$$

依库默尔判别法即得上述命题.

**例 37** 证明高斯(Gauss)判别法: 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为正项级数, 从某项开始, 有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\sigma}{n} + \frac{c_n}{n^\lambda},$$

其中  $|c_n| < M < +\infty$ ,  $\lambda > 1$ ,  $\sigma, \lambda, M$  均与  $n$  无关, 则当  $\sigma > 1$  时, 级数收敛; 当  $\sigma \leq 1$  时, 级数发散.

证 将  $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\sigma}{n} + \frac{c_n}{n^\lambda}$  代入例 35 式中, 得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] \ln n \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sigma + \frac{c_n}{n^{\lambda-1}} - 1 \right] \ln n = \begin{cases} +\infty > 1, & \sigma > 1, \\ 0, & \sigma = 1, \\ -\infty < 1, & \sigma < 1, \end{cases} \end{aligned}$$

所以, 当  $\sigma > 1$  时, 级数收敛; 当  $\sigma \leq 1$  时, 级数发散.

**例 38** 用高斯判别法确定下列级数敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^{-p}}{q(q+1)(q+2)\cdots(q+n)} \quad (p > 0, q > 0);$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q} \quad (p > 0, q > 0).$$

解 高斯判别法往往与拉贝判别法一起使用. 一般, 用来判别参数为定值的敛散性时, 还要借助于泰勒公式.

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \frac{(q+n+1)(1+1/n)^p}{n+1} - 1 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \left( 1 + \frac{q}{n+1} \right) \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n - 1 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \left( 1 + \frac{q}{n+1} \right) \frac{(1+1/n)^p - 1}{1/n} \right] \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \left( 1 + \frac{q}{n+1} \right) - 1 \right] = p + q. \end{aligned}$$

故当  $p+q > 1$  时, 级数收敛; 当  $p+q < 1$  时, 级数发散.

当  $p+q=1$  时, 有

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \left( 1 + \frac{q}{n+1} \right) \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{1-q} \\ &= \left[ 1 + \frac{q}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \left[ 1 + \frac{1-q}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^1+\epsilon}\right) \quad (\epsilon > 0), \end{aligned}$$

依高斯判别法知, 当  $p+q=1$  时, 级数发散.

$$\begin{aligned} (2) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \frac{n+1}{p+n} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^q - 1 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{p+n} \frac{(1+1/n)^q - 1}{1/n} + \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{n+1}{p+n} - 1 \right) \\ &= q + 1 - p. \end{aligned}$$

故当  $q+1-p > 1$ , 即  $q > p$  时级数收敛, 当  $q < p$  时级数发散.

当  $q=p$  时, 级数可以化为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^p},$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{n+p} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p$$

$$= \left[1 + \frac{1-p}{n} + o\left(\frac{1}{n^{1+\epsilon}}\right)\right] \left[1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n^{1+\epsilon}}\right)\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^{1+\epsilon}}\right).$$

依高斯判别法知, 当  $p=q$  时, 级数发散.

## 第二节 一般项级数

### 主要内容

#### 1. 各项符号正负相间的级数

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1}u_n + \cdots$$

$$(u_n > 0, n = 1, 2, \cdots)$$

称为交错级数.

#### 2. 莱布尼茨判别法 若交错级数满足以下条件:

$$(1) \text{ 数列 } \{u_n\} \text{ 单调减少}, \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

则交错级数收敛.

若交错级数满足莱布尼茨条件, 则收敛级数的余项估计式为  $|R_n| \leq u_{n+1}$ .

#### 3. 若级数 $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ 各项绝对值组成的级数

$$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots$$

收敛, 则称原级数绝对收敛.

绝对收敛的级数一定收敛.

可用考察正项级数的各种判别法考察绝对值级数的敛散性.

#### 4. 绝对收敛级数的两个重要性质

(1) 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  绝对收敛, 其和为  $S$ , 则任意重排各项后所得级数仍绝对收敛, 且其和不变.

(2) 柯西定理 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = A$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = B$  都绝对收敛, 则两级数的每一项的所有可能乘积  $u_i v_j$  按任意顺序排列所得的级数  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$  也绝对收敛, 且其和为  $AB$ .

#### 5. 阿贝尔判别法

(1) 阿贝尔变换 设  $\epsilon_i, v_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 为两组实数, 若令  $\sigma_k = v_1 + v_2 + \dots + v_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ), 则有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \epsilon_i v_i &= (\epsilon_1 - \epsilon_2) \sigma_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_3) \sigma_2 + \dots \\ &\quad + (\epsilon_{n-1} - \epsilon_n) \sigma_{n-1} + \epsilon_n \sigma_n. \end{aligned}$$

上式又称为分部求和公式.

(2) 阿贝尔引理 若  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  为单调数组, 且对任一自然数  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ), 有  $|\sigma_k| \leq A$  ( $\sigma_k$  如(1)所定义), 则当

$$\epsilon = \max \{ |\epsilon_k| \}$$

时, 有  $\left| \sum_{k=1}^n \epsilon_k v_k \right| \leq 3\epsilon A$ .

(3) 阿贝尔判别法 若  $\{a_n\}$  为单调有界数列, 且级数  $\sum_{n=1}^n b_n$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.

6. 狄利克雷判别法 若数列  $\{a_n\}$  单调减少, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 又级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  的部分和数列有界, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.

## 疑难解析

1. 对任意项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , 怎样判别其敛散性?

答 对任意项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , 若其绝对收敛, 则一定收敛. 因此可将正项级数判别法用于绝对收敛的级数上. 对条件收敛级数, 需要更加精细的判别法, 如阿贝尔判别法、狄利克雷判别法. 对特殊情形, 如交错级数, 莱布尼茨判别法是狄利克雷判别法的特殊情形.

2. 绝对收敛级数与条件收敛级数有什么不同的特性? 表现在哪些方面?

答 绝对收敛级数与条件收敛级数虽然都是收敛级数, 但它们有不同的特性, 主要表现在运算上. 绝对收敛级数与有限和有相同的运算律(结合律、交换律、分配律), 而条件收敛级数不满足交换律.

若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  绝对收敛, 则可以任意交换  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  各项的位置而不改变其和. 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都绝对收敛, 且其和分别为  $A, B$ , 则乘积  $\sum_{i,j=1}^{\infty} u_i v_j$  也绝对收敛, 其和为  $AB$ .

对级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的子级数(数列  $\{u_n\}$  的子数列形成的级数), 绝对收敛级数有以下特性: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  绝对收敛的充要条件是它的一切子级数都收敛.

若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的一切子级数都收敛, 可令

$$u_n^+ = \frac{|u_n| + u_n}{2}, \quad u_n^- = \frac{|u_n| - u_n}{2},$$

则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$  分别是  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的正项部分与负项部分, 都是  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

的子级数, 由所设知  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$  都收敛. 而  $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ , 故

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛, 即  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  绝对收敛. 反之, 当  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  绝对收敛时, 由  $0$

$\leq u_n^+ \leq |u_n|, 0 \leq u_n^- \leq |u_n|$ , 故  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$  都收敛. 于是对

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的任一子级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n_k}$ , 令

$$v_n = \begin{cases} 0, & n \neq n_k, \\ u_{n_k}, & n = n_k, \end{cases}$$

则  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n_k}$ , 且  $0 \leq v_n^+ \leq u_n^+, 0 \leq v_n^- \leq u_n^-$ . 依比较判别法知,

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n^+$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^-$  都收敛,  $|v_n| = v_n^+ + v_n^-$ , 故  $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$  收敛, 从而

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_{n_k}|$  收敛, 得  $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n_k}$  收敛.

条件收敛级数有以下特性: 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  条件收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$  都发散到正无穷大.

若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$  有一个收敛, 不妨设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$  收敛, 因  $u_n^+ = \frac{|u_n| + u_n}{2}$ , 即  $|u_n| = 2u_n^+ - u_n$ , 由  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$

收敛, 即  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  绝对收敛. 从而引出矛盾, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$  都发散.



## 方法、技巧与典型例题分析

对于任意项级数,首先是区别其是否为交错级数,这一般可以由  $u_n$  的形式确定.若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为交错级数,通常可以用莱布尼茨判别法确定其敛散性.若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为一般的任意项级数,则可以用正项级数的判别法确定  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  的敛散性,从而判别  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  是否绝对收敛.而条件收敛的判别则比较复杂,一般可使用阿贝尔判别法、狄利克雷判别法.

**例 1** 讨论下列交错级数的敛散性,并对收敛级数判别是绝对收敛还是条件收敛.

$$(1) 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)^n}{2n^{n+1}};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n^{1/n} - 1);$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}; \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}.$$

**解** 本例的级数均为交错级数.

(1)  $u_n = (-1)^{n-1} \cdot 1/n^{1/2}$ . 满足  $|u_n| \geq |u_{n+1}|$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , 所以,依莱布尼茨判别法知,级数收敛.

又  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1/2}$  是  $p$  级数,  $p < 1$ , 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  不收敛,即原级数条件收敛.

$$(2) u_n = \frac{(n+1)^n}{2n^{n+1}}. \text{ 因为}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n|}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{e}{2},$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  发散, 原级数不绝对收敛.

但  $\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|} = \frac{(n+1)^n}{2n^{n+1}} \cdot \frac{2(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}} = \left( \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} \right)^{n+1} > 1$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot \frac{1}{n} = 0$ , 依莱布尼茨判别法, 原级数收敛, 即原级数条件收敛.

(3)  $u_n = (-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}}$ . 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3^n} \cdot \frac{3^{n-1}}{n} = \frac{1}{3} < 1,$$

所以,  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛, 即原级数绝对收敛.

(4) 设  $a_n = n^{1/n} - 1$ , 则  $a_n > 0$ . 设  $f(x) = x^{1/x}$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^0 = 1,$$

所以,  $|u_n| = a^n \rightarrow 0$ . 又由  $f'(x) = (e^{\frac{1}{x} \ln x})' = x^{1/x} \frac{1 - \ln x}{x^2}$  知, 当  $x > e$  时,  $f'(x) < 0$ . 故当  $x > e$  时,  $f(x)$  单调减少, 即  $a_n > a_{n+1}$  ( $n = 3, 4, \dots$ ), 依莱布尼茨判别法知, 原级数收敛.

(5) 令  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ , 则  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$  ( $x > e$ ). 故当  $n \geq 3$  时,  $\{a_n\} = \left\{ \frac{\ln n}{n} \right\}$  单调减少, 且  $a_n \rightarrow 0$ . 依莱布尼茨判别法知, 原级数收敛.

又当  $n \geq 3$  时,  $a_n = \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散. 故原级数不绝对收敛, 所以原级数条件收敛.

(6)  $u_n = (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}$ , 而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n^2}}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot 2^n \cdots 2^n}{n(n-1) \cdots 1} = \infty,$$

所以原级数发散.

**例 2** 讨论下列交错级数的敛散性, 并对收敛级数判别是绝对收敛还是条件收敛.

$$\begin{aligned} (1) & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}; & (2) & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n - \ln n}; \\ (3) & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^p; & (4) & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n + \ln n}. \end{aligned}$$

**解** (1)  $u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$ . 因为

$$\frac{1}{\sqrt{2n-1}} \bigg/ \frac{1}{n^{1/2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以, 原级数不绝对收敛.

但是,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}} = 0$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$ , 所以依莱布尼茨判别法, 原级数收敛, 即条件收敛.

(2)  $u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n - \ln n}$ . 因为  $\frac{1}{n - \ln n} > \frac{1}{n}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 所以, 原级数不绝对收敛.

又  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ , 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n - \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1 - \ln n/n} = 0.$$

又令  $f(x) = x - \ln x$ , 由  $f'(x) = 1 - 1/x > 0$  ( $x > 0$ ), 知  $n - \ln n$  单调增加, 即  $\frac{1}{n - \ln n}$  单调减少. 所以依莱布尼茨判别法知, 原级数收敛, 即条件收敛.

$$(3) u_n = (-1)^{n-1} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^p.$$

当  $p \leq 0$  时,  $|u_n| \geq 1$ , 故  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

当  $0 \leq p \leq 2$  时, 令  $u_n = (-1)^{n-1} a_n$ , 由  $\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p < 1$  易知

$$a_n > \left[\frac{2n+1}{2(n+1)}\right]^p a_n = a_{n+1} \quad (n=1, 2, \dots),$$

而  $0 < a_n < \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)^p \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$

依莱布尼茨判别法知,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.

但是,  $\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p$ , 依拉贝判别法, 有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{|u_n|}{|u_{n+1}|} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(2n+2)/(2n+1)]^p - 1}{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + p/(2n+1) + o(1/n) - 1}{1/n} = \frac{p}{2}, \end{aligned}$$

所以当  $0 < p \leq 2$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  发散, 即原级数条件收敛.

当  $p > 2$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛, 即原级数绝对收敛.

(4)  $u_n = (-1)^n \frac{1}{2^n + \ln n}$ . 因为

$$|u_n| = \frac{1}{2^n + \ln n} < \frac{1}{2^n},$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  收敛, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛, 即原级数绝对收敛.

**例 3** 判别下列级数是否收敛. 若收敛, 是绝对收敛还是条件收敛.

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} \sin(n\pi + 1/\ln n); \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + a^2}).$$

**解** (1)  $u_n = (-1)^n \sin(1/\ln n)$ , 当  $n \geq 2$  时, 有

$$0 < \frac{1}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln 2} = \log_2 e < \log_2 (2\sqrt{2}) = \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

故  $0 < \sin(1/\ln n) < 1$ , 原级数为交错级数. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n|}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/\ln n)}{1/\ln n} \cdot \frac{n}{\ln n} = +\infty,$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 所以  $\sum_{n=2}^{\infty} |u_n|$  发散, 原级数不绝对收敛.

但当  $n$  增大时,  $1/\ln n$  单调减少,  $\sin(1/\ln n)$  也单调减少, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(1/\ln n) = 0$ , 故依莱布尼茨判别法知, 原级数条件收敛.

$$\begin{aligned} (2) \quad u_n &= \sin(\pi \sqrt{n^2 + a^2}) = \sin[n\pi + \pi \sqrt{n^2 + a^2} - n\pi] \\ &= (-1)^n \sin \pi(\sqrt{n^2 + a^2} - n) \\ &= (-1)^n \sin \frac{a^2 \pi}{\sqrt{n^2 + a^2} + n}, \end{aligned}$$

故原级数是交错级数.

但是,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{a^2 \pi}{\sqrt{n^2 + a^2} + n} = 0$ ,  $|u_n| > |u_{n+1}|$ , 所以依莱布尼茨判别法知, 原级数收敛.

**例 4** 判别下列级数是否收敛. 若收敛, 是绝对收敛还是条件收敛.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{a}{n} \quad (a > 0); \quad (2) \sum_{n=2}^{\infty} \left( \sin \frac{n\pi}{12} \right) / \ln n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n^{2k} + 1}};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n^2 + n\alpha + \beta}{n} \pi, \quad \alpha, \beta \text{ 为常数.}$$

**解** (1) 当  $n$  充分大时,  $\sin(a/n) > 0$ , 且单调减少并趋向于零, 依莱布尼茨判别法知, 原级数收敛.

又  $\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{a}{n} \right) / \frac{a}{n} = 1$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n}$  发散, 故原级数不绝对收敛, 即原级数条件收敛.

(2) 当  $n > 2$  时,  $1/\ln n > 0$ , 且单调减少并趋向于零.

$\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{n=2}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{12}$  的部分和的绝对值

$$|S_n| = \left| \sum_{k=2}^n \sin \frac{k\pi}{12} \right| = \left| \frac{\cos(3\pi/24) - \cos[(n+1/2)\pi/12]}{2\sin(\pi/24)} \right|$$

$$\leq 1/\sin(\pi/24).$$

即  $S_n$  有界, 依狄利克雷判别法知, 原级数收敛.

$$\text{又 } \left| \left( \sin \frac{n\pi}{12} \right) / \ln n \right| \geq \frac{\sin^2(n\pi/12)}{\ln n} = \frac{1 - \cos(n\pi/6)}{2\ln n}.$$

$$= \frac{1}{2\ln n} - \frac{\cos(n\pi/6)}{2\ln n},$$

而  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2\ln n}$  发散,  $\sum_{n=2}^{\infty} \left( \cos \frac{n\pi}{6} \right) / (2\ln n)$  收敛, 故原级数不绝对收敛, 即原级数条件收敛.

(3) 因为  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0$ , 所以原级数是交错级数. 而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0,$$

又设  $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ , 则

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x(x+1)}} < 0.$$

所以  $f(x)$  单调减少, 原级数收敛.

$$(4) u_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n^{2k}+1}}.$$

当  $k > 1$  时,  $|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n^{2k}+1}} < \frac{1}{n^k}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$  收敛, 所以原级数绝对收敛.

当  $0 < k \leq 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| / \frac{1}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{\sqrt{n^{2k}+1}} = 1$ , 由比较审

敛法的极限形式知,  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  发散. 但是

$$\frac{1}{\sqrt{n^{2k}+1}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)^{2k}+1}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^{2k}+1}} = 0,$$

依莱布尼茨判别法知,原级数收敛,即条件收敛.

$$(5) u_n = \sin \frac{n^2 + n\alpha + \beta}{n} \pi = \sin[n\pi + (\alpha + \beta/n)\pi] \\ = (-1)^n \sin(\alpha + \beta/n)\pi,$$

当  $\alpha \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ , 故原级数发散.

当  $\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  时,  $u_n = (-1)^{n+\alpha} \sin(\beta\pi/n)$ . 若  $\beta = 0$ , 则原级数绝对收敛; 若  $\beta \neq 0$ , 不妨设  $\beta > 0$  (当  $\beta < 0$  时,  $u_n = (-1)^{n+\alpha+1} \sin(|\beta|\pi/n)$ ),  $u_n = (-1)^{n+\alpha} \sin(\beta\pi/n) \sim (-1)^{n+\alpha} (\beta\pi/n)$ .

依莱布尼茨判别法知,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+\alpha} (\beta\pi/n)$  条件收敛, 则原级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+\alpha} \sin(\beta\pi/n) \text{ 条件收敛.}$$

例 5 讨论下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n}{\ln n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \frac{\sin n}{n}.$$

解 两级数都是任意项级数.

$$(1) \sum_{n=2}^k \sin n = \frac{\cos(3/2) - \cos(k + 1/2)}{2\sin(1/2)}, \quad k = 2, 3, \dots,$$

故  $\left| \sum_{n=2}^k \sin n \right| \leq 1/\sin(1/2), \quad k = 2, 3, \dots.$

又当  $n \geq 2$  时,  $\frac{1}{\ln n} > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0$ , 故依狄利克雷判别法知,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n}{\ln n} \text{ 收敛.}$$

设  $f(x) = |\sin x| + |\sin(x+1)|, x \in (-\infty, +\infty)$ ,

则  $f(x)$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的正值连续周期函数, 存在  $c > 0$ , 使得  $f(x) > c$ . 于是

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\sin n|}{\ln n} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{|\sin 2k|}{\ln 2k} + \frac{|\sin(2k+1)|}{\ln(2k+1)} \right] \\ \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin 2k| + |\sin(2k+1)|}{\ln(2k+1)}$$

$$\geq c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2k+1)},$$

而  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2k+1)}$  发散, 故原级数不绝对收敛, 即原级数条件收敛.

(2) 令  $a_n = \frac{1}{n} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right)$ ,  $b_n = \sin n$ , 则

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n(n+1)} \left[ - \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) + \frac{n}{n+1} \right].$$

由于  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散于正无穷大, 故当  $n$  充分大时,  $a_{n+1} - a_n < 0$ , 即  $\{a_n\}$  单调减少. 又

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = C + \ln n + \epsilon_n, C \text{ 为欧拉数}, \epsilon_n \rightarrow 0, \text{ 所以}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n(n+1)} \left[ - (C + \ln n + \epsilon_n) + \frac{n}{n+1} \right] \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

由题(1) 知  $\sum_{k=1}^n \sin k$  有界. 故依狄利克雷判别法知, 原级数收敛.

利用与题(1) 类似方法, 可证题(2) 的原级数不绝对收敛, 即原级数条件收敛.

类似地, 若  $\{a_n\}$  单调减少,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,  $x \neq 2k\pi$ , 则级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$  收敛, 并可由此证明: 当  $x \neq 2k\pi$  时,

$\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \frac{\cos nx}{n}$  收敛.

事实上, 若  $x \neq 2k\pi$ , 则  $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}$ . 于是

$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$  的部分和数列有界, 且  $a_n$  单调减少并趋向于零. 依狄利

克雷判别法知,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$  收敛.



而  $a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n}$  单调减少并且趋向于零. 故依上述结果知,  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{\cos nx}{n}$  当  $x \neq 2k\pi$  时收敛.

**例 6** 设  $\{a_n\}$  是实数序列, 且  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛, 证明  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  也收敛. 并举例说明  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  可能发散.

**解** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ , 所以  $\exists N \in \mathbb{N}$ , 使得当  $n > N$  时,  $|a_n| < 1$ , 则  $|a_n| > a_n^2$ , 依比较审敛法知,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛.

如  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$  是条件收敛级数, 而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  是调和级数, 是发散的.

**例 7** 讨论  $a$  (实数) 的情况, 使得级数  $1 - \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^a} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6^a} + \cdots$  收敛.

**解** 显然, 当  $a \leq 0$  时, 不满足  $u_n \rightarrow 0$ , 所以级数发散; 当  $a > 1$  时, 有

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^a} \cdot \frac{1}{k^a}.$$

式中第一项趋向于  $+\infty$ , 第二项趋向于有限数, 所以级数发散; 当  $a = 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  条件收敛.

当  $0 < a < 1$  时, 因为

$$\frac{1}{(2n)^a} - \frac{1}{(2n+1)^a} = \frac{1}{(2n)^a} \left[ 1 - \frac{(2n)^a}{2n+1} \right] \approx \frac{1}{(2n)^a},$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^a}$  发散, 即原级数加括号后发散. 故原级数发散.

综上所述知,当  $a = 1$  时,级数收敛,其它情形级数发散.

**例 8** 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ . 并证明: 若将级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  重排,先有  $p$  个正项,后有  $q$  个负项,如此循环,则新级数和为  $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$ .

**证** 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  是收敛的交错级数,设其部分和为  $S_n$ ,则  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ . 不妨求  $S_{2n}$ .

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &\quad - 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} - \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

由上册第一章中关于欧拉数的定义,有

$$\begin{aligned} S_{2n} &= (\ln 2n + C + r_{2n}) - (\ln n + C + r_n) \\ &= \ln 2 + r_{2n} - r_n. \end{aligned}$$

其中  $C$  为欧拉数,  $r_{2n}, r_n$  均趋向于零,于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \ln 2.$$

又设依要求重排后的新级数部分和为  $S_n$ ,则  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,有

$$\begin{aligned} S_{(p+q)k} &= \left( 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1} \right) - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2q} \right) \\ &\quad + \cdots + \left[ \frac{1}{2p(k-1)+1} + \cdots + \frac{1}{2pk-1} \right] \\ &\quad - \left[ \frac{1}{2q(k-1)+2} + \cdots + \frac{1}{2qk} \right] \\ &= \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2pk-1} \right) - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2qk} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2pk-1} + \frac{1}{2pk} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{pk} \right) - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{qk} \right) \\
&= \ln 2pk + C + r_{2pk} - \frac{1}{2} (\ln pk + C + r_{pk}) - \frac{1}{2} (\ln qk + C + r_{qk}) \\
&= \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q} + r_{2pk} - \frac{1}{2} (r_{pk} + r_{qk}),
\end{aligned}$$

故 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{(p+q)k} = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}.$$

又因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 0$ , 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{(p+q)k+m} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{(p+q)k} = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q},$$

故新级数的和  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}.$

于是可得

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{3}{2} \ln 2,$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2} \ln 2.$$

**例 9** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为任意项级数, 令  $u_n^+ = \frac{|u_n| + u_n}{2}, u_n^- = \frac{|u_n| - u_n}{2}$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$  都是正项级数, 分别称为  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的正部和负部. 证明:

(1) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  绝对收敛  $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$  都收敛, 且  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ ;

(2) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  条件收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$  都发散到正无穷大.

**证** 参看本节疑难解析 2.

例 10 证明黎曼(Riemann)定理 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  条件收敛,

则对任给  $B$  (有限实数或  $\pm \infty$ ), 都有级数的一个重排  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ , 使得

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'.$$

证 (1) 设  $B$  为有限实数, 不妨设  $B > 0$ . 由例 9 知, 存在

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+ = +\infty, \sum_{n=1}^{\infty} u_n^- = -\infty. \text{按下述方法对原级数重排: 先取 } p_1$$

个正项, 使得  $B < \sum_{n=1}^{p_1} u_n^+ \leq B + u_{p_1}^+$ , 再取  $q_1$  个负项, 使  $B + u_{q_1}^- \leq$

$$\sum_{n=1}^{p_1} u_n^+ + \sum_{n=1}^{q_1} u_n^- \leq B; \text{然后又取 } p_2 - p_1 \text{ 个正项, 再取 } q_2 - q_1 \text{ 个负}$$

项; ……如此继续下去, 得到如下的重排:

$$\begin{aligned} & (u_1^+ + \cdots + u_{p_1}^+) + (u_1^- + \cdots + u_{q_1}^-) + \cdots \\ & + (u_{p_1+1}^+ + \cdots + u_{p_2}^+) + (u_{q_1+1}^- + \cdots + u_{q_2}^-) + \cdots \\ & + (u_{p_{k-1}+1}^+ + \cdots + u_{p_k}^+) + (u_{q_{k-1}+1}^- + \cdots + u_{q_k}^-) + \cdots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{满足 } B & < (u_1^+ + \cdots + u_{p_1}^+) + (u_1^- + \cdots + u_{q_1}^-) + \cdots \\ & + (u_{p_{k-1}+1}^+ + \cdots + u_{p_k}^+) \\ & \leq B + u_{p_k}^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{和 } B + u_{q_k}^- & \leq (u_1^+ + \cdots + u_{p_1}^+) + (u_1^- + \cdots + u_{q_1}^-) + \cdots \\ & + (u_{p_{k-1}+1}^+ + \cdots + u_{p_k}^+) + (u_{q_{k-1}+1}^- + \cdots + u_{q_k}^-) \\ & < B. \end{aligned}$$

因为  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^+ = \lim_{n \rightarrow -\infty} u_n^- = 0$ , 故  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{p_k}^+ = \lim_{n \rightarrow -\infty} u_{q_k}^- = 0$ . 从而重排后

级数收敛于  $B$ , 此级数去括号后即为  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ , 即  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n' = B$ .

(2) 设  $B = +\infty$  ( $-\infty$  可类似证明).

先取  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$  的前  $m_1$  项, 使得

$$u_1^+ + u_2^+ + \cdots + u_{n_1}^+ > 1 - u_1^-;$$

再取  $m_2 > m_1$ , 使得

$$u_1^+ + \cdots + u_{m_1}^+ + u_{m_1+1}^+ + \cdots + u_{m_2}^+ > 2 - u_1^- - u_2^-;$$

更一般地, 取  $m_k > m_{k-1}$ , 使得

$$u_1^+ + \cdots + u_{m_1}^+ + \cdots + u_{m_k}^+ > k - u_1^- - \cdots - u_k^-,$$

其中  $k=2, 3, \cdots$ . 由于  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^+$  是发散的, 故上述重排是可行的, 所以重排后级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n' = B$ .

**例 11** 判断下列命题是否正确, 如正确加以证明, 如不正确举出反例.

(1) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$  收敛;

(2) 若  $|a_n|$  收敛于零, 则  $\{a_n\}$  是有界变差的;

(3) 若  $2|a_{n+1}| \leq |a_n|$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  收敛.

**解** (1) 正确. 因为  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  绝对收敛, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq M \quad (M > 0),$$

故  $|a_n(a_1 + \cdots + a_n)| \leq M|a_n|$ ,

从而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(a_1 + \cdots + a_n)$  收敛.

(2) 不正确. 若  $\{a_n\}$  满足  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n-1}| < +\infty$ , 则称  $\{a_n\}$  是有界变差的. 例如  $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ , 有  $|a_n| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ , 但  $\{a_n\}$  不是有界变差的.

(3) 正确. 由  $2|a_{n+1}| \leq |a_n|$ , 有  $|a_{n+1}| \leq \frac{1}{2^n} |a_1|$ , 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

收敛.

例 12 讨论下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} C_m^n; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} C_m^n.$$

解  $C_m^n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}.$

(1) 当  $m$  为正整数时, 级数只有有限项, 所以级数必然收敛.

当  $m$  不是正整数时, 有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m-n}{n+1} = -\frac{n-m}{n+1}.$$

(i) 若  $m \leq -1$ , 有  $n-m \geq n+1$ , 则  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \geq 1$ , 从而  $|u_n| \geq |u_1| = |m| > 1$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| \neq 0$ , 原级数发散.

(ii) 若  $m > -1$ , 在  $n > m$  时,  $-1 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 0$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为交错级数,  $|u_n|$  单调减少, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$ , 于是由莱布尼茨判别法知, 原级数收敛.

事实上, 因为

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{n-m}{n+1} = 1 - \frac{m+1}{n+1},$$

所以若记  $a_n = \frac{m+1}{n+1}$ , 则  $0 < a_n < 1$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ . 由  $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$  收

敛的充要条件是  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛 (见第三节例 6), 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) = +\infty.$$

但是  $1+a_n = \frac{1-a_n^2}{1+a_n} < \frac{1}{1+a_n}$ , 于是

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)$$

$$< \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+a_1} \cdot \frac{1}{1+a_2} \cdots \frac{1}{1+a_n} = 0,$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{m+2}}{u_{m+1}} \right| \cdot \left| \frac{u_{m+3}}{u_{m+2}} \right| \cdots \left| \frac{u_{m+n+1}}{u_{m+n}} \right| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0.$$

(2) 当  $m$  是正整数时, 原级数收敛.

当  $m$  不是正整数, 而  $n$  充分大时, 有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n-m}{n+1} > 0,$$

则级数是同号级数(不妨设为正项级数). 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( 1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = m + 1,$$

依拉贝判别法, 当  $m > 0$  时, 原级数收敛; 当  $m < 0$  时, 原级数发散.

**例 13** 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 且  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$  绝对收敛, 证明:

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  也收敛.

**证** 由题设  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n-1}|$  收敛, 则由柯西准则,  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$\exists N_1 \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N_1$  时,  $\forall p \in \mathbb{N}$ , 有

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| + |a_{n+3} - a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p} - a_{n+p-1}| < \varepsilon, \quad (1)$$

即  $|a_{n+p} - a_{n+1}|$

$$\leq |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + \cdots + |a_{n+2} - a_{n+1}| < \varepsilon. \quad (2)$$

又由  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 则其部分和序列  $\{S_n\}$  收敛. 由柯西准则, 对前述  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N_2$  时,  $\forall p \in \mathbb{N}$ , 有

$$|S_{n+p} - S_p| < \varepsilon. \quad (3)$$

故  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 有  $b_k = S_k - S_{k-1}$  ( $S_0 = 0$ ).

由式 (2)、式 (3) 知, 数列  $\{b_n\}$  和  $\{S_n\}$  都收敛, 从而都有界. 即  $\exists M > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 有  $|a_n| \leq M$  与  $|S_n| \leq M$ .

综上所述知,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N = \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n > N$ ,  $\forall p \in \mathbb{N}$ , 有

$$|a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{n+p}b_{n+p}|$$

$$\begin{aligned}
&= |a_{n+1}(S_{n+1}-S_n) + a_{n+2}(S_{n+2}-S_{n+1}) + \cdots \\
&\quad + a_{n+p}(S_{n+p}-S_{n+p-1})| \\
&= |S_{n+1}(a_{n+1}-a_{n+2}) + S_{n+2}(a_{n+2}-a_{n+3}) + \cdots \\
&\quad + S_{n+p-1}(a_{n+p-1}-a_{n+p}) + a_{n+p}S_{n+p} - a_{n+1}S_n| \\
&\leq |S_{n+1}| |a_{n+1}-a_{n+2}| + |S_{n+2}| |a_{n+2}-a_{n+3}| + \cdots \\
&\quad + |S_{n+p-1}| |a_{n+p-1}-a_{n+p}| \\
&\quad + |a_{n+p}S_{n+p} - a_{n+p}S_n + a_{n+p}S_n - a_{n+1}S_n| \\
&\leq M(|a_{n+2}-a_{n+1}| + |a_{n+3}-a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}-a_{n+p-1}|) \\
&\quad + M|S_{n+p}-S_n| + M|a_{n+p}-a_{n+1}| \\
&< M\epsilon + M\epsilon + M\epsilon = 3M\epsilon.
\end{aligned}$$

即  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.

**例 14** 证明: 级数  $1 - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{7} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots$  是收敛的.

**证** 因为

$$\begin{aligned}
|u_n| &= \frac{1}{2n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{(2n-1)+2}{(2n-1)(2n+1)} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2n+1} \left[ \left(1 + \frac{2}{2n-1}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \right] \\
&> \frac{1}{2n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = |u_{n+1}|, n=1, 2, \cdots,
\end{aligned}$$

所以  $\{u_n\}$  单调减少. 又

$$|u_n| = \frac{1}{2n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n-1} (\ln n + C + \epsilon_n) \rightarrow 0,$$

其中  $C$  为欧拉数.

故依莱布尼茨判别法知, 原级数收敛.

**例 15** 证明: 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$  发散,  $S_n = a_1 + a_2 + \cdots +$



$a_n$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$  也发散.

证 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散, 则其部分和序列  $\{S_n\}$  单调增加且无上界.  $\forall n \in \mathbf{N}, \exists p \in \mathbf{N}$ , 使得  $S_{n+p} \geq 2S_n$  或  $S_n/S_{n+p} \leq 1/2$ . 有

$$\begin{aligned} & \frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{S_{n+2}} + \cdots + \frac{a_{n+p}}{S_{n+p}} \\ & > \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}}{S_{n+p}} \\ & = \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

即  $\exists \varepsilon_0 = 1/2 > 0, \forall N \in \mathbf{N}, \exists n > N, \exists p \in \mathbf{N}$  (使  $S_{n+p} \geq 2S_n$ ), 有

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{S_{n+2}} + \cdots + \frac{a_{n+p}}{S_{n+p}} \geq \frac{1}{2},$$

于是级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$  也发散.

例 16 证明: 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$  收敛,  $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n}$  发散.

证  $\forall n \in \mathbf{N}, r_n > 0$ , 且  $\{r_n\}$  严格单调减少. 由于  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ . 故  $\forall n \in \mathbf{N}, \exists p \in \mathbf{N}$ , 使得  $2r_{n+p} < r_{n+1}$

或  $\frac{r_{n+p}}{r_{n+1}} < \frac{1}{2}$ .  $\forall n \in \mathbf{N}, r_n = a_n + r_{n+1}$ , 或  $r_{n+1} = r_n - a_n$ , 有

$$\begin{aligned} & \frac{a_{n+1}}{r_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{r_{n+2}} + \cdots + \frac{a_{n+p}}{r_{n+p}} \\ & > \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}}{r_{n+1}} = \frac{r_{n+1} - r_{n+p+1}}{r_{n+1}} \\ & = \frac{r_{n+1} - r_{n+p} + a_{n+p}}{r_{n+1}} = 1 - \frac{r_{n+p}}{r_{n+1}} + \frac{a_{n+p}}{r_{n+1}} \end{aligned}$$

$$> 1 - \frac{r_{n+p}}{r_{n+1}} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

即  $\exists \varepsilon_0 = 1/2 > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, \exists p \in \mathbb{N}$  (使  $2r_{n+p} < r_{n+1}$ ), 有

$$\frac{a_{n+1}}{r_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{r_{n+2}} + \cdots + \frac{a_{n+p}}{r_{n+p}} > \frac{1}{2}.$$

所以级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n}$  发散.

**例 17** 若记  $E(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$ , 则对任何实数  $\lambda$ ,  $E(\lambda)$  绝对收敛,

证明:

$$(1) E(a)E(b) = E(a+b); \quad (2) E(a)E(-a) = 1;$$

$$(3) E\left(\frac{m}{k}\right) = \left[E\left(\frac{1}{k}\right)\right]^m; \quad (4) E\left(\frac{1}{k}\right) = [E(1)]^{1/k}.$$

证 (1) 由

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} \right| / \left| \frac{\lambda^n}{n!} \right| = \frac{|\lambda|}{n+1} \rightarrow 0$$

知,  $E(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$  是绝对收敛的. 而积级数  $E(a)E(b)$  的一般项为

$$\begin{aligned} w_n &= u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0 \\ &= 1 \cdot \frac{b^n}{n!} + \frac{a}{1!} \cdot \frac{b^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{n!} \left( b^n + \frac{n}{1!} a b^{n-1} + \cdots + \frac{n}{1!} a^{n-1} b + a^n \right) \\ &= \frac{1}{n!} (C_n^0 b^n + C_n^1 a b^{n-1} + \cdots + C_n^{n-1} a^{n-1} b + C_n^n a^n) \\ &= \frac{1}{n!} (a+b)^n. \end{aligned}$$

即 
$$E(a)E(b) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = E(a+b).$$

$$(2) E(a)E(-a) = E(a-a) = E(0) = 1.$$

$$(3) \quad E\left(\frac{m}{k}\right) = E\left(\frac{1}{k}\right) E\left(\frac{m-1}{k}\right) = E\left(\frac{1}{k}\right)^2 E\left(\frac{m-2}{k}\right) = \cdots \\ = E\left(\frac{1}{k}\right)^m.$$

$$(4) \quad [E(1)]^{1/k} = \left[E\left(\frac{k}{k}\right)\right]^{1/k} = \left[E\left(\frac{1}{k}\right)^k\right]^{1/k} = E\left(\frac{1}{k}\right).$$

**例 18** 若  $\sum a_n$  和  $\sum b_n$  两级数均收敛, 且其中至少有一个绝对收敛, 证明: 积级数  $\sum c_n$  也收敛, 且  $\sum c_n = \sum a_n \sum b_n$ .

**证** 不妨设  $\sum a_n$  绝对收敛, 部分和分别为

$$A_m = \sum_{n=0}^m a_n, \quad B_m = \sum_{n=0}^m b_n, \quad C_m = \sum_{n=0}^m c_n,$$

$$\begin{aligned} \text{则 } C_m &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \cdots + a_m b_0) \\ &= a_0 (b_0 + b_1 + \cdots + b_m) + a_1 (b_0 + b_1 + \cdots + b_{m-1}) \\ &\quad + \cdots + a_{m-1} (b_0 + b_1) + a_m b_0 \\ &= a_0 B_m + a_1 B_{m-1} + \cdots + a_m B_0, \end{aligned}$$

记  $\sum a_n = A$ ,  $\sum b_n = B$ , 则  $B_k = B + \beta_k (k=0, 1, 2, \cdots)$ ,  $\beta_m \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} \text{又 } C_m &= a_0 (B + \beta_m) + a_1 (B + \beta_{m-1}) + \cdots + a_m (B + \beta_0) \\ &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_m) B + a_0 \beta_m + a_1 \beta_{m-1} + \cdots + a_m \beta_0 \\ &= A_m B + R_m, \end{aligned}$$

当  $m > N$  时, 有

$$\begin{aligned} R_m &= a_0 \beta_m + a_1 \beta_{m-1} + \cdots + a_m \beta_0 \\ &= (a_0 \beta_m + a_1 \beta_{m-1} + \cdots + a_N \beta_{m-N}) \\ &\quad + (a_{N+1} \beta_{m-N-1} + \cdots + a_m \beta_0) \end{aligned}$$

由于  $\beta_m \rightarrow 0$ , 故  $\exists k > 0$ , 对任意  $n$ ,  $|\beta_n| < k$ , 且当  $N$  充分大时, 只要  $n > N$ , 就有  $|\beta_n| < \epsilon$ . 又  $\sum a_n$  绝对收敛, 则  $\exists N_a > 0$ , 使得  $\forall m > N_a$ , 有

$$|a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots + |a_m| < \frac{\epsilon}{2k}.$$

若记  $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{N_a}| = M$ , 可取  $N_1$ , 使得对一切  $n > N_1$ , 有

$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$ . 对上述  $N_1$  和  $N_a$  以及  $m > N_1 + N_a$ , 有

$$\begin{aligned} |R_m| &\leq |a_0\beta_m + a_1\beta_{m-1} + \cdots + a_{N_a}\beta_{m-N_a}| \\ &\quad + |a_{N_a+1}\beta_{m-N_a-1} + \cdots + a_m\beta_0| \\ &\leq M \frac{\varepsilon}{2M} + k \frac{\varepsilon}{2k} = \varepsilon. \end{aligned}$$

即有  $R_m \rightarrow 0$ , 也就是  $\lim_{m \rightarrow \infty} C_m = \lim_{m \rightarrow \infty} A_m B = AB$ , 故

$$\sum c_n = \left( \sum a_n \right) \left( \sum b_n \right).$$

**例 19** 证明: 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}$  收敛, 则  $\forall \beta > \alpha$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\beta}$  也收敛.

**证** 因为  $\beta = \alpha + \lambda, \lambda > 0$ , 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\alpha+\lambda}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} \cdot \frac{1}{n^\lambda},$$

而  $\left\{ \frac{1}{n^\lambda} \right\}$  单调减少且有下界(如零), 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}$  收敛, 依阿贝尔判别法

知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\beta}$  收敛.

**例 20** 证明: 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ) 收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n^\alpha} = 0.$$

**证** 依柯西准则, 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}$  收敛, 故  $\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$ , 有

$$\left| \frac{a_{m+1}}{(m+1)^\alpha} + \frac{a_{m+2}}{(m+2)^\alpha} + \cdots + \frac{a_{m+p}}{(m+p)^\alpha} \right| < \varepsilon,$$

而  $0 < \left( \frac{m+1}{m+p} \right)^\alpha < \left( \frac{m+2}{m+p} \right)^\alpha < \cdots < \left( \frac{m+p}{m+p} \right)^\alpha = 1.$

依阿贝尔变换, 有

$$\left| \frac{a_{m+1}}{(m+1)^a} \left( \frac{m+1}{m+p} \right)^a + \frac{a_{m+2}}{(m+2)^a} \left( \frac{m+2}{m+p} \right)^a + \dots \right. \\ \left. + \frac{a_{m+p}}{(m+p)^a} \left( \frac{m+p}{m+p} \right)^a \right| < \varepsilon,$$

即 
$$\left| \sum_{k=m+1}^{m+p} \frac{a_k}{(m+p)^a} \right| < \varepsilon.$$

当  $m$  固定时, 有

$$\left| \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{(m+p)^a} \right| = \left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{(m+p)^a} \right| \rightarrow 0 \quad (p \rightarrow +\infty),$$

即对上述  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists L \in \mathbb{N}$ ,  $\forall p > L$ , 有

$$\left| \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{(m+p)^a} \right| = \left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{(m+p)^a} \right| < \varepsilon.$$

于是,  $\forall \varepsilon > 0$  ( $\exists m \in \mathbb{N}$ ),  $\exists L \in \mathbb{N}$ ,  $\forall p > L$ , 有

$$\left| \sum_{k=1}^{m+p} \frac{a_k}{(m+p)^a} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{(m+p)^a} \right| + \left| \sum_{k=m+1}^{m+p} \frac{a_k}{(m+p)^a} \right| > 2\varepsilon.$$

由于  $p > L$  且可任意大, 故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n^a} = 0.$$

**例 21** 设  $f(x)$  在点  $x=0$  的某邻域内有二阶连续导数, 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ , 证明: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$  绝对收敛.

**证** 由题设知,  $f(x)$  在  $x=0$  的邻域内有二阶泰勒公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(\xi)x^2 = \frac{1}{2}f''(\xi)x^2.$$

又由  $f''(x)$  的连续性知,  $\exists M > 0$ , 使得  $|f''(x)| \leq M$ , 于是

$$|f(x)| = \frac{1}{2}|f''(\xi)x^2| \leq \frac{M}{2}x^2,$$

令  $x = \frac{1}{n}$ , 得  $\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$ . 因  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$  绝对收敛.

例 22 证明: (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  自乘的柯西乘积收敛;

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$  自乘的柯西乘积发散.

证 (1) 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  是收敛的交错级数,

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right)^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{n-k+1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[ \frac{1}{1 \cdot n} + \frac{1}{2(n+1)} + \cdots + \frac{1}{n \cdot 1} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n. \end{aligned}$$

所以,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$  是交错级数, 要证明其收敛.

$$\begin{aligned} c_n - c_{n-1} &= \left[ \frac{1}{1 \cdot n} + \frac{1}{2(n-1)} + \cdots + \frac{1}{n \cdot 1} \right] \\ &\quad - \left[ \frac{1}{1 \cdot (n+1)} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{n \cdot 2} + \frac{1}{(n+1) \cdot 1} \right] \\ &= \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{n+1} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

即数列  $\{c_n\}$  单调减少并趋向于零.

$$\begin{aligned} \text{又 } c_{2n} &= \frac{1}{1 \cdot (2n)} + \frac{1}{2(2n-1)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)n} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2} + \frac{1}{(2n) \cdot 1} \\ &= 2 \left[ \frac{1}{1 \cdot (2n)} + \frac{1}{2(2n-1)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right] \\ &\leq 2 \left[ \frac{1}{1 \cdot (n+1)} + \frac{1}{2(n+1)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{n+1} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = \frac{2}{n+1} (\ln n + C + r_n).$$

其中  $C$  为欧拉数,  $r_n \rightarrow 0$ , 因而  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{2n} = 0$ . 即单调减少数列  $\{c_n\}$  的一个偶子列极限为零, 因而  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ .

依莱布尼茨判别法知,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$  收敛, 即  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  自乘的柯西乘积收敛.

(2) 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$  是收敛的交错级数,

$$\begin{aligned} c_n &= a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot (-1)^{n-k-1} \frac{1}{\sqrt{n-k}} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}. \end{aligned}$$

当  $n > k \geq 1$  时, 显然有  $\sqrt{k(n-k)} \leq \sqrt{n-1} \cdot \sqrt{n-1}$ , 所以

$$|c_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-k}} \geq (n-1) \frac{1}{\sqrt{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}} = 1,$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \neq 0$ , 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$  自乘的柯西乘积发散.

**例 23** 研究级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[n]} \frac{1}{n}$  的敛散性.

**解** 将级数中相邻且符号相同的项合并成一项, 可得一新的交错级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[ \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2-1} \right].$$

$$\text{而 } k \cdot \frac{1}{k^2+k} < \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \cdots + \frac{1}{k^2+(k-1)} < k \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k},$$

$$(k+1) \frac{1}{k^2+k} < \frac{1}{k^2+k} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2-1}$$

$$< (k+1) \frac{1}{(k+1)^2-1} = \frac{1}{k},$$

所以  $\frac{2}{k+1} < \frac{1}{k^2} + \dots + \frac{1}{k^2 + (k-1)} + \frac{1}{k^2 + k} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2 - 1} < \frac{2}{k}$ .

于是, 新交错级数通项当  $k \rightarrow \infty$  时趋向于零, 且绝对值单调减少. 依莱布尼茨判别法知, 新级数收敛.

又原级数部分和包含在新级数两相邻部分和之间, 因而原级数部分和极限存在, 即原级数收敛. 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[n]} \frac{1}{n}$  不绝对收敛, 从而确定原级数条件收敛.

下面讨论级数与非正常积分的关系.

**例 24** 证明下列非正常积分收敛:

$$(1) \int_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]} dx; \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x} dx.$$

**证** (1) 对给定的  $A > 0$ , 有惟一的  $n > 0$ , 使得  $\sqrt{n} < A < \sqrt{n+1}$ , 当  $A \rightarrow +\infty$  时,  $n \rightarrow +\infty$ . 于是, 当  $\sqrt{k-1} \leq x < \sqrt{k}$  时,  $k-1 \leq x^2 < k$ ,  $[x^2] = k-1$ , 从而

$$\begin{aligned} \int_0^A (-1)^{[x^2]} dx &= \sum_{k=1}^n \int_{\sqrt{k-1}}^{\sqrt{k}} (-1)^{[x^2]} dx + \int_{\sqrt{n}}^A (-1)^{[x^2]} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} + (-1)^n (A - \sqrt{n}). \end{aligned}$$

由莱布尼茨判别法知,  $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}$  收敛, 又

$$|(-1)^n (A - \sqrt{n})| \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0,$$

所以  $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A (-1)^{[x^2]} dx = S$ , 即积分  $\int_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]} dx$  收敛.

(2) 因为  $\frac{x}{1+x^6 \sin^2 x}$  在  $[0, +\infty)$  非负, 故只需证级数

$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x} dx$  收敛. 为此, 先估计

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x} dx \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{(k+1)\pi}{1+(k\pi)^6 \sin^2 x} dx$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{k\pi}^{k\pi+\pi/2} \frac{(k+1)\pi d(\tan x)}{1 + [(k\pi)^6 + 1]\tan^2 x} \\
&\quad + \int_{k\pi+\pi/2}^{(k+1)\pi} \frac{(k+1)\pi d(\tan x)}{1 + [(k\pi)^6 + 1]\tan^2 x} \\
&= \frac{(k+1)\pi}{\sqrt{(k\pi)^6 + 1}} \left[ \arctan(\sqrt{(k\pi)^6 + 1}\tan x) \right] \Big|_{k\pi}^{k\pi+\pi/2-0} \\
&\quad + \arctan(\sqrt{(k\pi)^6 + 1}\tan x) \Big|_{k\pi+\pi/2+0}^{(k+1)\pi} \\
&= \frac{(k+1)\pi}{\sqrt{(k\pi)^6 + 1}} \cdot \pi \leq \frac{(k+1)\pi^2}{(k\pi)^3} = \frac{2}{\pi k^2}.
\end{aligned}$$

而级数  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k^2}$  收敛, 所以  $\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x} dx$  收敛. 从而原非正常积分收敛.

**例 25** 函数  $f(x)$  在  $x \geq 0$  单调有定义, 且非正常积分  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  存在, 证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} h[f(h) + f(2h) + \cdots] = \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

**证** 设  $f(x)$  单调增加 ( $f(x)$  单调减少类似可证或考虑  $-f(x)$ ), 则  $\forall h > 0$ , 有

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(x)dx &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{(k-1)h}^{kh} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{+\infty} hf(kh) \\
&\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{kh}^{(k+1)h} f(x)dx = \int_h^{+\infty} f(x)dx.
\end{aligned}$$

令  $h \rightarrow 0^+$ , 得

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} h \sum_{k=1}^{+\infty} f(kh) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{k=1}^{\infty} hf(kh) = \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

**例 26** 利用例 25 计算

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} (1-t) \left( \frac{t}{1+t} + \frac{t^2}{1+t^2} + \cdots + \frac{t^n}{1+t^n} + \cdots \right).$$

**解** 本例的关键是将级数的通项写为  $f(nh)$ , 然后说明  $f(x)$  符合上例的条件.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{t \rightarrow 1-0} (1-t) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{1+t^n} = \lim_{t \rightarrow 1-0} (1-e^{\ln t}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n \ln t}}{1+e^{n \ln t}} \\
&\stackrel{\text{令 } h = -\ln t}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1-e^{-h}}{h} \cdot h \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nh}}{1+e^{-nh}} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1-e^{-h}}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} h \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nh}}{1+e^{-nh}} \\
&= 1 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \ln 2,
\end{aligned}$$

其中  $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$  符合例 25 条件.

### 第三节 无穷乘积

#### 主要内容

1. 对于一个给定的数列  $\{f_n\}$  ( $f_n \neq 0, n=1, 2, \dots$ ), 称积式

$$f_1 f_2 \cdots f_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} f_n$$

为无穷乘积. 并定义部分乘积  $\{P_m\}$ :

$$P_m = f_1 f_2 \cdots f_m = \prod_{n=1}^m f_n.$$

2. 当部分积数列  $\{P_m\}$  收敛于一个非零常数  $P$  时, 称无穷乘积

$\prod_{n=1}^{\infty} f_n$  收敛于  $P$ , 即

$$\prod_{n=1}^{\infty} f_n = \lim_{m \rightarrow \infty} P_m = P.$$

否则称无穷乘积  $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$  发散. 发散包括:

(1)  $P_m \rightarrow \infty$ , 记作  $\prod_{n=1}^{\infty} f_n \rightarrow \infty$ ;

(2)  $P_m$  摆动;

(3)  $P_m \rightarrow 0$ . 称  $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$  发散于零, 记作  $\prod_{n=1}^{\infty} f_n = 0$ .

$$\pi_m = f_{m+1} f_{m+2} \cdots = \prod_{n=m+1}^{\infty} f_n$$

称为  $m$  项后的余项. 当  $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$  收敛时,  $\pi_m = \frac{P}{P_m}$ .

3. 若  $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$  收敛于  $P$ , 则

$$\begin{cases} \lim_{m \rightarrow \infty} f_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{P_m}{P_{m-1}} = \frac{P}{P} = 1, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \pi_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{P}{P_{m-1}} = \frac{P}{P} = 1. \end{cases}$$

4. 无穷乘积  $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$  收敛的充要条件有

(1) 部分积数列  $\{P_m\}$  是柯西数列, 且存在常数  $k > 0$ , 对一切  $P_m$ , 有  $|P_m| \geq k > 0$ ;

(2)  $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N$  及  $k \geq 1$ , 有

$$|P_{n+k}/P_{n-1}| < \epsilon.$$

5. 若无穷乘积  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|)$  收敛, 则称无穷乘积  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$

绝对收敛.  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  收敛但不绝对收敛的无穷乘积称为条件收敛.

## 疑难解析

1. 无穷乘积与无穷级数有什么关系?

答 无穷乘积  $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$  与无穷级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  都是由无穷数列  $\{f_n\}$

引出的,都有收敛和发散、绝对收敛与条件收敛等概念.

无穷乘积的收敛往往与某个无穷级数的收敛有关. 例如:

$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  绝对收敛的充要条件是级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$  绝对收敛 (见例 10); 当  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛时  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  收敛, 当  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  发散时  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  发散于零 (见例 11).

## 方法、技巧与典型例题分析

无穷乘积的计算主要是证明等式, 往往通过先求部分乘积  $P_n$ , 然后取  $n \rightarrow \infty$  的极限得到. 其技巧表现为, 求部分乘积时要借助一些已知公式与结果, 使运算更为简捷. 无穷乘积的另一主要类型习题是研究无穷乘积的敛散性, 这可以根据有关定义、命题并经一些转化求解, 有一定的难度, 因而要求读者熟悉概念和变换.

**例 1** 证明下列等式:

$$\begin{aligned} (1) \quad \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &= \frac{1}{2}; & (2) \quad \prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} &= \frac{2}{3}; \\ (3) \quad \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right] &= 2; & (4) \quad \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} &= \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

**证** (1)  $P_n = \prod_{k=2}^n f_k = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2},$$

故  $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$

$$\begin{aligned} (2) \quad P_n &= \prod_{k=2}^n f_k = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdots \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

故 
$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2}{3}.$$

$$(3) P_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right),$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) P_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}},$$

故 
$$P_n = \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}\right] / \left(1 - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - 1/2} = 2,$$

即 
$$\prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right] = 2.$$

$$(4) P_n = \cos \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2^3} \cdots \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2 \sin(\pi/2^{n+1})} \cos \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2^3} \cdots \left(\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

$$= \cdots = \frac{\sin(\pi/2)}{2^n \sin(\pi/2^{n+1})} = \frac{2^{\pi/2^{n+1}}}{\sin(\pi/2^{n+1})} \cdot \frac{2}{\pi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi},$$

故 
$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}.$$

**例 2** 讨论下列无穷乘积的敛散性:

$$(1) \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right]; \quad (2) \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n};$$

$$(3) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3n-1} \cdot \frac{3n}{3n+1};$$

$$(4) \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots$$

**解** (1) 由瓦里士(Wallis)公式

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 = \pi, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

知 
$$P_n = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right) \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5}\right) \cdots \left(\frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n+2}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2(2n+2)} \left[ \frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!} \right]^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4},$$

故 
$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right] = \frac{\pi}{4}.$$

(2) 当  $x \neq 0$  时, 部分积

$$\begin{aligned} P_n &= \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin(x/2^n)} \\ &= \frac{x/2^n}{\sin(x/2^n)} \cdot \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}, \end{aligned}$$

故 
$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x} \quad (x \neq 0).$$

(3) 由  $\sin x$  的无穷乘积展开  $\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\pi^2}{n^2 x^2} \right)$ , 令  $x = \frac{\pi}{2}$ , 有

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \frac{1}{(3n)^2} \right] = \frac{\pi}{3} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)(3n+1)}{(3n)^2},$$

于是, 有

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3n-1} \cdot \frac{3n}{3n+1} = \frac{\pi/3}{\sin(\pi/3)} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(4) 在题(1)中, 令  $x = \pi/2$ , 利用半角公式, 有

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\left( 1 + \cos \frac{\pi}{4} \right) / 2} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \dots,$$

得 
$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} \cdots,$$

故 
$$\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \cdots = \frac{\pi}{2}.$$

例 3 设  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$  和  $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$  收敛, 讨论下列乘积的敛散性:

(1)  $\prod_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n);$  (2)  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n^2;$

$$(3) \prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n;$$

$$(4) \prod_{n=1}^{\infty} p_n / q_n.$$

解 设  $P = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$ ,  $Q = \prod_{n=1}^{\infty} q_n$ ,  $P_n = \prod_{k=1}^n p_k$ ,  $Q_n = \prod_{k=1}^n q_k$ .

(1) 由无穷乘积  $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$  收敛的必要条件  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 1$  知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1,$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n + q_n) = 2.$$

故  $\prod_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n)$  不收敛.

(2) 因为  $\prod_{k=1}^n p_n^2 = \left( \prod_{k=1}^n p_n \right)^2 = P_n^2$ , 而  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$ , 故

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n^2 = P^2, \text{ 即 } \prod_{n=1}^{\infty} p_n^2 \text{ 收敛.}$$

(3) 因为  $\prod_{k=1}^n p_k q_k = \prod_{k=1}^n p_k \prod_{k=1}^n q_k = P_n Q_n$ , 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = Q$ , 故

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = PQ,$$

即  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n$  收敛.

(4) 因为  $\prod_{n=1}^{\infty} q_n = Q \neq 0$ , 故  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} = \frac{1}{Q}$ . 由题(3)知

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n} = \prod_{n=1}^{\infty} p_n \cdot \frac{1}{Q} = \frac{P}{Q}.$$

例 4 证明:  $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$  收敛  $\Leftrightarrow$  部分积数列  $\{P_m\}$  是柯西数列, 且

$\exists h > 0$ , 对全部  $P_m$ , 有  $|P_m| \geq h > 0$ .

证 必要性 若  $P_m \rightarrow P \neq 0$ , 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ , 对一切  $n > N$ , 有  $|P_m - P| < \varepsilon$ . 取  $\varepsilon = |P|/2$ , 则  $|P_n| > |P|/2$ , 于是, 对全部  $P_m$ , 有

$$|P_m| \geq \min\{|P_1|, |P_2|, \dots, |P_N|, |P|/2\} = h > 0.$$

充分性 若  $|P_m| \geq h > 0$ , 则

$$|P| = \lim_{m \rightarrow \infty} |P_m| \geq h > 0,$$

从而  $P \neq 0$ .

例 5 证明:  $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$  收敛  $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ , 对一切  $n > N$  和  $k \geq 1$ , 有  $|P_{n+k}/P_n - 1| < \epsilon$ .

证 必要性 若  $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$  收敛, 则  $\{P_m\}$  为柯西数列, 且有  $|P_m| \geq h > 0$  (见例 4). 于是  $|P_{n+k} - P_n| < h\epsilon \Rightarrow |P_{n+k}/P_n - 1| < \epsilon$ .

充分性 若  $|P_{n+k}/P_n - 1| < \epsilon$ , 则取  $\epsilon = 1/2$ , 有

$$|P_n/P_N - 1| < 1/2 \quad (n > N).$$

于是

$$|P_N|/2 < |P_n| < 3|P_N|/2,$$

故  $\forall P_m$ , 有

$$|P_m| \geq \min\{|P_1|, |P_2|, \dots, |P_{N-1}|, |P_N|/2\} = h > 0.$$

又  $|P_m| \leq \max\{|P_1|, |P_2|, \dots, |P_{N-1}|, 3|P_N|/2\} = M$ .

在式中取  $|P_{n+k}/P_n - 1| < \epsilon/M \quad (n > N)$ , 得出  $|P_{n+k} - P_n| < \epsilon$ , 即

$\{P_m\}$  是柯西数列, 且  $|P_m| \geq h > 0$ , 由例 4 知,  $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$  收敛.

例 6 证明: 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是正项级数, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  有相同的敛散性.

证 因为对一切  $a_n > 0$  和  $1 + a_n < e^{a_n}$ , 有

$$\begin{aligned} 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ < (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) < e^{a_1 + a_2 + \dots + a_n}, \end{aligned}$$

即

$$1 + S_m < P_m < e^{S_m}.$$

这里  $S_m$  是  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的部分和,  $P_m$  是  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  的部分积.

由于单调有界数列必有极限, 且  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为正项级数, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与



$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  有相同的敛散性.

例 7 证明: 若  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|)$  收敛, 则  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  收敛.

证 设  $P_m = \prod_{n=1}^m (1 + a_n)$ ,  $Q_m = \prod_{n=1}^m (1 + |a_n|)$ , 则

$$\begin{aligned} \left| \frac{P_{n+k}}{P_n} - 1 \right| &= |(1 + a_{n+1})(1 + a_{n+2}) \cdots (1 + a_{n+k}) - 1| \\ &= \left| \sum_{l=n+1}^{n+k} a_l + (a_{n+1}a_{n+2} + a_{n+1}a_{n+3} + \cdots + a_{n+k-1}a_{n+k}) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + a_{n+1}a_{n+2} \cdots a_{n+k} \right| \\ &\leq \left| \sum_{l=n+1}^{n+k} |a_l| + (|a_{n+1}||a_{n+2}| + |a_{n+1}||a_{n+3}| + \cdots \right. \\ &\quad \left. + |a_{n+1}||a_{n+k}|) + \cdots + |a_{n+1}||a_{n+2}| \cdots |a_{n+k}| \right| \\ &= \left| \prod_{l=n+1}^{n+k} (1 + |a_l|) - 1 \right| = \left| \frac{Q_{n+k}}{Q_n} - 1 \right| \end{aligned}$$

所以, 比较  $\left| \frac{P_{n+k}}{P_n} - 1 \right|$  与  $\left| \frac{Q_{n+k}}{Q_n} - 1 \right|$  可知: 若  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|)$  收敛,

则  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  收敛.

故由例 6 可得: 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛,  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  也绝对收敛, 反之也成立.

例 8 证明: 设  $0 \leq a_n < 1$ , 则  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  有相同的敛散性, 且若  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$  发散, 则必发散于零.

证 设  $P_m = \prod_{n=1}^m (1 + a_n)$ ,  $Q_m = \prod_{n=1}^m (1 - a_n)$ , 由题设知,  $P_m$  单调增加,  $Q_m$  单调减少, 且均为正.

设  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$  收敛, 则  $Q_m \rightarrow Q > 0$ , 又  $1 > a_n \geq 0$ , 故  $1 + a_n \leq \frac{1}{1 - a_n}$ ,

$$\text{有 } P_m = \prod_{n=1}^m (1 + a_n) < \left| \prod_{n=1}^m (1 - a_n) \right|^{-1} = \frac{1}{Q_m} \leq \frac{1}{Q},$$

即  $\{P_m\}$  有界, 故  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  收敛, 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

又设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $a_n \rightarrow 0$ . 不妨设  $a_n < \frac{1}{2}$ , 有

$$(1 - a_n)(1 + 2a_n) = 1 + a_n - 2a_n^2 = 1 + a_n(1 - 2a_n) > 1.$$

故有  $1 - a_n > \frac{1}{1 + 2a_n}$ . 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n$  也收敛, 所以  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2a_n)$  收

敛, 设收敛于  $R$  ( $R > 0$ ). 又设  $R_m = \prod_{n=1}^m (1 + 2a_n)$ , 则对一切  $m > N$ , 有

$$\frac{Q_m}{Q_N} = \prod_{n=N+1}^m (1 - a_n) > \left[ \prod_{n=N+1}^m (1 + 2a_n) \right]^{-1} = \frac{R_N}{R_m} \geq \frac{R_N}{R},$$

即  $Q_m > \frac{R_N Q_N}{R} > 0$ .  $Q_m$  单调减少且有下界, 所以  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$  收敛.

综上所述知,  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  有相同的敛散性.

而  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$  发散时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也发散, 由例 6 知  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  也发散, 且  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \rightarrow \infty$ . 故  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m > N$ , 有

$$\prod_{n=N+1}^m (1 + a_n) > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ 使得}$$

$$0 < \prod_{n=N+1}^m (1 - a_n) < \left[ \prod_{n=N+1}^m (1 + a_n) \right]^{-1} < \varepsilon,$$

从而  $Q_m = Q_N \cdot \prod_{n=N+1}^m (1 - a_n) < Q_N \cdot \varepsilon \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ ,

即  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$  发散.

由本例可知, 对于  $0 \leq a_n < 1$  的情形, 正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$ ,  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  有相同的敛散性, 且  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$  发散于零,  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  发散于无穷大.

**例 9** 设  $a_n > -1$ , 证明:  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$  有相同的敛散性, 且对  $P = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  和  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$  有  $P = e^S$  (或  $S = \ln P$ ).

证 设  $P_m = \prod_{n=1}^m (1 + a_n)$ ,  $S_m = \sum_{n=1}^m \ln(1 + a_n)$ , 则

$$P_m = e^{S_m} \quad \text{或} \quad S_m = \ln P_m,$$

可知, 等式两边有相同的敛散性. 在收敛时, 对等式两边取  $m \rightarrow \infty$  的极限, 即得

$$P = \lim_{m \rightarrow \infty} P_m = e^{\lim_{m \rightarrow \infty} S_m} = e^S \quad (\text{或 } S = \ln P),$$

还可写作  $\ln \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$ .

**例 10** 证明:  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  绝对收敛  $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$  绝对收敛.

证 由例 9 知,  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + |a_n|)$  有相同的敛散性. 现证  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + |a_n|)$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} |\ln(1 + a_n)|$  有相同的敛散性. 因为, 当  $a_n \geq 0$  时, 有

$$\ln(1 + |a_n|) = \ln(1 + a_n) = |\ln(1 + a_n)|;$$

当  $a_n < 0$  时, 有  $1 - |a_n| < 1/(1 + |a_n|)$ . 而

$$\ln(1 + a_n) = \ln(1 - |a_n|) < -\ln(1 + |a_n|).$$

所以  $|\ln(1 + a_n)| > \ln(1 + |a_n|)$ .

故当  $\sum_{n=1}^{\infty} |\ln(1 + a_n)|$  收敛时, 有  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + |a_n|)$  收敛.

反之, 若  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + |a_n|)$  收敛, 则  $\ln(1 + |a_n|) \rightarrow 0$ , 即  $1 + |a_n| \rightarrow 1, a_n \rightarrow 0$ . 如例 8, 设  $|a_n| < 1/2$ , 则

$$1 + a_n = 1 - |a_n| > \frac{1}{1 + 2|a_n|}.$$

于是  $\ln(1 + a_n) > -\ln(1 + 2|a_n|)$ ,

$$\begin{aligned} \text{从而 } |\ln(1 + a_n)| &< \ln(1 + 2|a_n|) \leq \ln(1 + 2|a_n| + |a_n|^2) \\ &= 2\ln(1 + |a_n|), \end{aligned}$$

知  $\sum_{n=1}^{\infty} |\ln(1 + a_n)|$  也收敛, 即

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \text{ 绝对收敛} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n) \text{ 绝对收敛}.$$

由本例与例 9 可知: 无穷乘积  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  具有项的可交换性的充要条件是  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  绝对收敛, 即  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  绝对收敛等价

于  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$  绝对收敛, 而级数绝对收敛具有项的可交换性,

且交换后的级数和不变. 由于  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n') = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$ , 故

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n') = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n')} = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n).$$

从而知条件是充分必要的 ( $\{a_n'\}$  是  $\{a_n\}$  的一个重排).

**例 11** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 证明: 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛, 则  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  收

敛;若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  发散,则  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  发散,且发散于零.

证 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \stackrel{L'}{=} \frac{1}{2}$ , 由  $a_n \rightarrow 0$ , 故  $\exists N_1 \in \mathbf{N}$ ,  
 $\forall n > N_1$ , 有  $|\ln(1 + a_n) - a_n| < k a_n^2 (k > 1/2)$ . 于是

$$\left| \sum_{l=n}^{n+k} \ln(1 + a_l) - \sum_{l=n}^{n+k} a_l \right| \leq \sum_{l=n}^{n+k} |\ln(1 + a_l) - a_l| < k \sum_{l=n}^{n+k} a_l^2.$$

当  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛时,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbf{N}, \forall n > N_2$  及  $k \geq 0$ , 有

$$\sum_{l=n}^{n+k} a_l^2 < \frac{\varepsilon}{2k}, \quad \left| \sum_{l=n}^{n+k} a_l \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而, 对  $n > \max\{N_1, N_2\}$ , 有

$$\left| \sum_{l=n}^{n+k} \ln(1 + a_l) \right| \leq \left| \sum_{l=n}^{n+k} a_l \right| + k \sum_{l=n}^{n+k} a_l^2 < \varepsilon,$$

即  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$  收敛, 则依例 9 知,  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  收敛.

当  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  发散时, 由第一个极限式可得  $a_n - \ln(1 + a_n) > k_1 a_n^2$   
 $(0 < k_1 < 1/2)$ . 于是, 当  $n > N$  时, 有

$$\sum_{l=N}^n \ln(1 + a_l) < \sum_{l=N}^n a_l - k_1 \sum_{l=N}^n a_l^2.$$

显然,  $\sum_{l=N}^n a_l$  为有限数(因为  $\sum_{l=N}^{\infty} a_l$  收敛), 而  $\sum_{l=N}^n a_l^2$  发散使得  $k_1 \sum_{l=N}^n a_l^2$

$\rightarrow \infty$ , 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_l) \rightarrow -\infty$ , 故  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  发散, 而

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln \prod_{n=1}^m (1 + a_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\sum_{n=1}^m \ln(1 + a_n)} = e^{-\infty} = 0. \end{aligned}$$

即  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  发散于零.

## 第八章 函数项级数与幂级数

### 第一节 一致收敛性

#### 主要内容

##### 一、函数列的一致收敛性

1. 定义在同一数集  $E$  上的一系列函数  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$  称为定义在  $E$  上的函数列, 记作  $\{f_n\}$ .

2. 若函数列  $\{f_n(x_0)\}$  收敛 ( $x_0 \in E$ ), 则称  $\{f_n\}$  在  $x_0$  收敛,  $x_0$  称为  $\{f_n\}$  的收敛点. 若  $\{f_n\}$  在数集  $D \subset E$  上每一点都收敛, 则称  $\{f_n\}$  在数集  $D$  上收敛.  $\{f_n(x)\}$  称为  $\{f_n\}$  的极限函数, 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), x \in D \quad \text{或} \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x), x \in D.$$

使函数列  $\{f_n\}$  收敛的全体收敛点的集合称为函数列  $\{f_n\}$  的收敛域.

3. 设函数列  $\{f_n\}$  与函数  $f$  都定义在数集  $D$  上, 若  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}$ , 使  $n > N$  时,  $\forall x \in D$ , 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

则称函数列  $\{f_n\}$  在  $D$  上一致收敛于  $f$ , 记作

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad (n \rightarrow \infty), x \in D.$$

4. 函数列一致收敛的柯西准则 函数列  $\{f_n\}$  在数集  $D$  上一致收敛的充要条件是:  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ , 对  $n, m > N$  和一切  $x \in$

$D$ , 有  $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ .

5. 函数列  $\{f_n\}$  在区间  $D$  上一致收敛于  $f$  的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

## 二、函数项级数的一致收敛性

1. 设  $\{u_n(x)\}$  是定义于数集  $E$  上的一个函数列, 则表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x), \quad x \in E$$

称为  $E$  上的函数项级数.

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x), \quad x \in E, \quad n = 1, 2, \cdots$$

称为函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的部分和函数列.

2. 若  $x_0 \in E$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  收敛, 则称  $x_0$  为函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

的收敛点. 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在数集  $D \subset E$  上每一点收敛, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

在  $D$  上收敛. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的全体收敛点的集合称为级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的收敛域.

对  $x \in D$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的和  $S(x)$  是定义在  $D$  上的一个函数, 称

为  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的和函数. 记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x), \quad \text{即} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x).$$

3. 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的部分和函数列  $\{S_n(x)\}$  在数集  $D$  一致收敛于

函数  $S(x)$ , 则称函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $D$  上一致收敛于  $S(x)$ .

4. 函数项级数收敛的柯西准则 函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在数集  $D$  上一致收敛的充要条件是:  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$ , 使  $n > N$  时,  $\forall x \in D$  和  $p \in \mathbf{N}$ , 有

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \epsilon.$$

当  $p = 1$  时, 即得函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在数集  $D$  上一致收敛的必要条件: 函数列  $\{u_n(x)\}$  在  $D$  上一致收敛于零.

5. 函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在数集  $D$  上一致收敛于  $S(x)$  的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |R_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |S(x) - S_n(x)| = 0,$$

其中  $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$  称为函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的余项.

6. 维尔斯特拉斯判别法 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  为数集  $D$  上的函数项级数,  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  是收敛的正项级数. 若对一切  $x \in D$ , 有

$$|u_n(x)| \leq M_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

则函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $D$  上一致收敛. 维尔斯特拉斯判别法又

称为  $M$  判别法或优级数法,  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  为  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的优级数.

7. 阿贝尔判别法 设 (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在数集  $D$  上一致收敛; (2)  $\forall x \in D, |v_n(x)|$  单调; (3)  $|v_n(x)|$  在  $D$  上一致有界, 即存在正数  $M$ , 对一切  $x \in D$  和一切正整数  $n$ , 有  $|v_n(x)| < M$ , 则级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$  在  $D$  上一致收敛.



8. 狄利克雷判别法 设(1)  $\sum_{i=1}^{\infty} u_n(x)$  的部分和函数列  $\left\{ \sum_{k=1}^n u_k(x) \right\}$  在  $D$  上一致有界; (2)  $\forall x \in D, \{v_n(x)\}$  单调; (3)  $|v_n(x)|$  在  $D$  上一致收敛于零, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$  在  $D$  上一致收敛.

## 疑难解析

1. 为什么要研究函数列的一致收敛性? 怎样理解函数列在  $D$  上的一致收敛性?

答 研究函数列, 不仅要讨论其在某点的敛散性, 更重要的是要研究函数列的极限函数的解析性质. 如由  $f_n$  的连续性判断  $f(x)$  的连续性; 研究  $f(x)$  的导数与积分同  $f_n$  的导数与积分的关系. 这就要求讨论函数列  $\{f_n\}$  在数集  $D$  上的一致收敛性.

函数列  $\{f_n\}$  在  $D$  上一致收敛时,  $\forall \epsilon > 0, x \in D$ , 总  $\exists N(\epsilon)$  (即  $N$  只与  $\epsilon$  有关, 与  $x$  无关), 只要  $n > N$ , 即有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

从而知,  $\{f_n\}$  在  $D$  上一致收敛, 则必在  $D$  上每一点收敛. 反之不一定成立. 例如  $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n$  在  $[0, 1]$  上收敛但不一致收敛. 因为, 当

$n \rightarrow \infty$  时, 有

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (1-x)x^k \rightarrow S(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

所以级数收敛. 但是和函数  $S(x)$  不连续, 说明级数在  $[0, 1]$  上不一致连续.

函数列  $\{f_n\}$  不一致收敛于  $f$ , 从几何意义上可以理解为:  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N$ , 曲线  $y = f_n(x)$  不都落在以曲线  $y =$

$f(x) + \varepsilon$  和  $y = f(x) - \varepsilon$  为边的带形区域内.

2. 判别函数项级数  $\sum u_n(x)$  (或函数列  $\{f_n\}$ ) 在  $D$  上不一致收敛的方法有哪些?

答 函数项级数是将数项级数  $\sum u_n$  的通项  $u_n$  换成定义在  $D$  上的函数  $u_n(x)$  得到的, 所以在通常意义下是逐点考虑的. 但函数项级数一致收敛的概念不再是作逐点考虑, 而是在点集  $D$  上作整体考虑. 因此, 常用的判别函数项级数  $\sum u_n(x)$  (或函数列  $\{f_n\}$ ) 在  $D$  上不一致收敛的方法有以下几种.

(1) 不一致收敛定义 设  $\sum u_n(x)$  在  $D$  上的部分和  $S_n(x)$  收敛于  $S(x)$ , 若存在某  $\varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbf{N}, \exists n_0 > N$  及  $x_{n_0} \in D$ , 使得

$$|S_{n_0}(x_{n_0}) - S(x_{n_0})| \geq \varepsilon_0$$

成立, 则级数  $\sum u_n(x)$  在  $D$  上不一致收敛.

(2) 柯西准则的逆否命题  $\sum u_n(x)$  在  $D$  上不一致收敛的充要条件是: 存在某  $\varepsilon_0 > 0, \forall n \in \mathbf{N}, \exists n, m > N$  及  $x_0 \in D$ , 使得

$$|S_n(x_0) - S_m(x_0)| \geq \varepsilon_0.$$

(3) 和函数法 若  $\sum u_n(x)$  的每一项  $u_n(x)$  在区间  $I = [a, b]$  上连续, 而和函数  $S(x)$  在  $I$  上不连续, 则  $\sum u_n(x)$  在  $I$  上不一致连续.

(4) 一般项法 若  $\sum u_n(x)$  的一般项  $u_n(x)$  在  $D$  上不一致收敛, 则  $\sum u_n(x)$  在  $D$  上不一致连续.

(5) 点列法 若存在点列  $\{x_n\} \in I$ , 且  $n \rightarrow \infty$  时  $x_n \rightarrow x$ , 但  $\{S_n(x_n)\}$  不收敛于  $S(x)$ , 则  $\{S_n(x_n)\}$  在  $I$  上不一致收敛.

## 方法、技巧与典型例题分析

### 一、函数列的收敛性与一致收敛性

函数列的收敛性是逐点考虑的. 当  $x_0$  给定时, 函数列  $\{f_n(x_0)\}$  是一个数列, 可以用考察数列敛散性的方法来讨论. 当

$\{f_n(x)\}$  在数集  $D$  上收敛时, 就要讨论极限函数  $f(x)$ . 函数列  $\{f_n(x)\}$  在数集  $D$  上的一致收敛性问题, 就是要讨论  $\forall \epsilon > 0$ , 是否有共同的  $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ , 使得  $n > N(\epsilon)$  时,  $\forall x \in D$ , 有  $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ . 通常用充要条件来确定一致收敛性, 而用疑难解析 2 中叙述的方法判定函数列  $\{f_n(x)\}$  在  $D$  上不一致收敛.

**例 1** 研究下列级数的敛散性, 并求其和函数.

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} ax^n = a + ax + ax^2 + \cdots + ax^n + \cdots (a \neq 0);$$

$$(2) x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \cdots + (x^n - x^{n-1}) + \cdots$$

**解** (1)  $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n$  是等比级数, 已知当  $|x| < 1$  时级数收敛,  $|x| > 1$  时级数发散, 所以收敛域为  $(-1, 1)$ .

在收敛域上, 和函数为

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \frac{a}{1-x}, x \in (-1, 1).$$

(2) 因为

$$S_n(x) = x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \cdots + (x^n - x^{n-1}) = x^n,$$

所以, 当  $|x| < 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0$ ;

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 1;$$

$$\text{当 } x=-1 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = (-1)^n;$$

$$\text{当 } |x| > 1 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \pm \infty.$$

故级数收敛域为  $(-1, 1]$ . 在收敛域上, 其和函数为

$$S(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

**例 2** 求下列级数的收敛域:

$$(1) \sum n! x^n; \quad (2) \sum nx^n; \quad (3) \sum \frac{x^n}{n!}.$$

**解** 利用数项级数达朗贝尔判别法.

(1) 对一切  $x \neq 0$ , 都有

$$\left| \frac{f_{n+1}(x_0)}{f_n(x_0)} \right| = \left| \frac{(n+1)!x_0^{(n+1)}}{n!x_0^n} \right| = (n+1)|x_0| \rightarrow \infty,$$

故仅当  $x=0$  时,级数收敛.

$$(2) \left| \frac{f_{n+1}(x_0)}{f_n(x_0)} \right| = \left| \frac{(n+1)x_0^{(n+1)}}{nx_0^n} \right| = \frac{n+1}{n}|x_0| \rightarrow |x_0|,$$

所以,当  $0 \leq x_0 < 1$  时,级数收敛;当  $-1 < x_0 < 0$  时,级数绝对收敛;当  $|x| > 1$  时,级数发散. 故级数收敛域为  $(-1, 1)$ .

(3) 对一切  $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ , 有

$$\left| \frac{f_{n+1}(x_0)}{f_n(x_0)} \right| = \frac{|x_0^{n+1}|}{(n+1)!} \bigg/ \frac{|x_0^n|}{n!} = \frac{|x_0|}{n+1} \rightarrow 0,$$

所以,级数收敛域为  $(-\infty, +\infty)$ .

**例 3** 设对于数列  $\{a_n\}$ , 有有限或无穷极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ . 证

明:级数  $\sum a_n x^n$ ,  $\sum a_n n x^n$ ,  $\sum \frac{a_n}{n} x^n$  有相同的收敛半径.

**证** 对点  $x=x_0$ , 有三个比值, 即

$$\left| \frac{f_{n+1}(x_0)}{f_n(x_0)} \right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x_0| \rightarrow \rho |x_0|,$$

$$\left| \frac{f_{n+1}(x_0)}{f_n(x_0)} \right| = \frac{n+1}{n} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x_0| \rightarrow \rho |x_0|,$$

$$\left| \frac{f_{n+1}(x_0)}{f_n(x_0)} \right| = \frac{n}{n+1} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x_0| \rightarrow \rho |x_0|,$$

所以,当  $\rho = \infty$  时,三级数收敛半径  $R=0$ ; 当  $\rho=0$  时,三级数收敛半径  $R=+\infty$ ; 当  $0 < \rho < \infty$  时,三级数收敛半径  $R=1/\rho$ . 即三个级数有相同的收敛半径.

**例 4** 确定下列函数列在指定区间上的一致收敛性:

$$(1) f_n(x) = x^n e^{-n^2 x}, n=1, 2, \dots, D=[0, +\infty);$$

$$(2) f_n(x) = \frac{nx}{n^2 + (n+2)x}, n=1, 2, \dots, D=(0, +\infty);$$

$$(3) f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n^2}, \text{在 } \mathbf{R} \text{ 上};$$

$$(4) f_n(x) = \sin(x/n), \text{在 } \mathbf{R} \text{ 上};$$

(5)  $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ , 在下列区间上: (i)  $[0, 1-\delta]$ ; (ii)  $[1-\delta, 1+\delta]$ ; (iii)  $[1+\delta, +\infty)$ , 其中  $0 < \delta < 1$ .

解 (1) 对任意  $x \in [0, +\infty)$ , 有极限函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n e^{-n^2 x} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} x^n e^{-n^2 x} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-x} = 0,$$

所以  $\{f_n(x)\} = \{x^n e^{-n^2 x}\}$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛.

(2) 对任意  $x \in (0, +\infty)$ , 有极限函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{n^2 + (n+2)x} = 0.$$

取  $(0, +\infty)$  上的自然数列  $x_n = n$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n \cdot n}{n^2 + (n+2)n} \right| = \frac{1}{2} > 0.$$

所以  $\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{nx}{n^2 + (n+2)x} \right\}$  在  $(0, +\infty)$  上不一致收敛.

(3)  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 有极限函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1/n^2} = |x|,$$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \sqrt{x^2 + 1/n^2} - |x| \right| = \frac{1/n^2}{\sqrt{x^2 + 1/n^2} + |x|} \\ &\leq \frac{1/n^2}{1/n} = \frac{1}{n} < \epsilon \quad (\text{取 } N = [1/\epsilon]), \end{aligned}$$

所以,  $\forall \epsilon > 0$  ( $\epsilon < 1$ ),  $\exists N = [1/\epsilon] \in \mathbf{N}$ ,  $\forall n > N$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 有  $\left| \sqrt{x^2 + 1/n^2} - |x| \right| < \epsilon$ . 故  $\{\sqrt{x^2 + 1/n^2}\}$  在  $\mathbf{R}$  上一致收敛.

(4)  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 有极限函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(x/n) = 0,$$

且  $\exists \epsilon_0 = 1/2 > 0$ ,  $\forall N \in \mathbf{N}$ ,  $\exists n_0 > N$ ,  $x_0 = n_0 \pi/2 \in \mathbf{R}$ , 有

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \sin \frac{n_0(\pi/2)}{n_0} \right| = \sin(\pi/2) = 1 > 1/2.$$

所以  $\{\sin(x/n)\}$  在  $\mathbf{R}$  上不一致收敛.

(5)  $\forall x \in [0, +\infty)$ , 有极限函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1/2, & x = 1, \\ 1, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

(i)  $\forall x \in [0, 1-\delta)$ , 有

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)|\} = \sup\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\} \leq (1-\delta)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

所以  $\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$  在  $[0, 1-\delta)$  上一致收敛.

(ii)  $\forall x \in (1, 1+\delta)$ , 有

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x^n}{1+x^n} - 1\right| = \frac{1}{1+x^n},$$

故  $\exists \varepsilon_0 = 1/4 > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists m > N$  和  $x_0 = \sqrt[m]{2} \in (1, 1+\delta)$ , 使得

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = \frac{1}{1+x_0^m} = \frac{1}{3} > \frac{1}{4},$$

从而知  $\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$  在  $(1, 1+\delta)$  内即  $[1-\delta, 1+\delta]$  上不一致收敛.

(iii)  $\forall x \in [1+\delta, +\infty)$ , 有

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)|\} = \sup\left\{\frac{1}{1+x^n}\right\} \leq \frac{1}{1+(1+\delta)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

所以  $\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$  在  $[1+\delta, +\infty)$  上一致收敛.

**例 5**  $\alpha$  为何值时, 函数序列

$$f_n(x) = \frac{x(\ln n)^\alpha}{n^x}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

在  $[0, +\infty)$  上一致收敛?

**解** 因为  $f'_n(x) = \frac{(\ln n)^{\alpha+1}}{n^x} \left(\frac{1}{\ln n} - x\right)$ , 故当  $x < \frac{1}{\ln n}$  时,  $f_n(x)$

单调增加; 当  $x > \frac{1}{\ln n}$  时,  $f_n(x)$  单调减少, 故在  $x = \frac{1}{\ln n}$  处  $f_n(x)$  取最大值. 从而, 极限函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \sup |f_n(x) - f(x)| \\
&= \max |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\ln n}\right) = \frac{1}{n^{1/\ln n}} (\ln n)^{\alpha-1} \\
&= \frac{1}{e} (\ln n)^{\alpha-1} = \begin{cases} \not\rightarrow 0, & \alpha \geq 1, \\ \rightarrow 0, & \alpha < 1 \end{cases} \quad (n \rightarrow \infty),
\end{aligned}$$

故当且仅当  $\alpha < 1$  时,  $\{f_n(x)\}$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛.

本例是用放大法求解的. 一般地, 放大法求得的是一致收敛的充分条件. 但本例中,  $\alpha_n = \max |S_n(x) - S(x)|$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时  $\alpha_n \rightarrow 0$  是充要条件.

**例 6** 设  $f_1(x)$  在  $[a, b]$  上正常可积, 且

$$f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots,$$

证明: 函数列  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛于零.

**证** 因为  $f_1(x)$  在  $[a, b]$  上正常可积, 故在  $[a, b]$  上有界, 即  $\exists M > 0$ , 使得  $|f_1(x)| \leq M$  ( $\forall x \in [a, b]$ ). 有

$$|f_2(x)| \leq \int_a^x |f_1(t)| dt \leq M(x-a),$$

所以, 通常有  $|f_n(x)| \leq \frac{M(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}$ , 则

$$\begin{aligned}
|f_{n+1}(x)| &\leq \int_a^x |f_n(t)| dt = \frac{M}{(n-1)!} \int_a^x (t-a)^{n-1} dt \\
&= \frac{M(x-a)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

从而  $|f_n(x)| \leq \frac{M(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

即对  $x \in [a, b]$ ,  $\{f_n(x)\}$  一致收敛于零.

**例 7** 讨论下列函数列  $\{f_n(x)\}$  在  $[0, 1]$  上的一致收敛性:

$$(1) f_n(x) = \frac{ax}{1+n^2x^2} \quad (a > 0); \quad (2) f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

**解** (1)  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax}{1+n^2x^2} = 0$ , 且

$$f_n(x) = \frac{ax}{1+n^2x^2} = \frac{a}{2n} \cdot \frac{2nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{a}{2n},$$

故  $\forall \varepsilon > 0, \exists N = a/(2\varepsilon)$ , 当  $n > N$  时,  $\forall x \in [0, 1]$ , 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

所以,  $\{f_n(x)\}$  在  $[0, 1]$  上一致收敛于零.

(2)  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$ . 又由微分法可知, 当  $x = 1/n$  时,  $f_n(x)$  有最大值

$$\max_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 1/2.$$

所以,  $f_n(x)$  在  $[0, 1]$  不一致收敛.

**例 8** 若函数列  $\{f_n(x)\}$  在开区间  $(a, b)$  内的任一闭区间上都一致收敛, 那么  $\{f_n(x)\}$  在  $(a, b)$  内是否一致收敛?

**解** 不一定. 例如函数列  $\{x^n\}$  在  $(0, 1)$  内是内闭一致收敛的, 但在  $(0, 1)$  内不一致收敛.

因为  $\forall x \in (0, 1), f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ , 故  $\forall [a, b] \subset (0, 1)$ . 有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} |x^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} b^n = 0,$$

即  $\{x^n\}$  在  $[a, b] \subset (0, 1)$  内一致收敛. 但在  $(0, 1)$  内有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = \limsup_{n \rightarrow \infty} |x^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \neq 0,$$

即  $\{x^n\}$  在  $(0, 1)$  内不一致收敛.

**例 9** 证明: 在有限个开区间  $I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 上都一致收敛的函数列  $\{f_n(x)\}$ , 在  $\bigcup_{i=1}^m I_i$  上也一致收敛. 但当  $i$  为无限时,  $\{f_n(x)\}$  在  $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$  上不一定一致收敛.

**证** 当  $i$  为有限时, 由于  $\{f_n(x)\}$  在  $I_i$  上一致收敛, 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_i \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N_i$  时,  $\forall x \in I_i$ , 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

取  $N = \max\{N_1, N_2, \dots, N_m\}$ , 则当  $n > N$  时,  $\forall x \in \bigcup_{i=1}^m I_i$ , 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$



即  $\{f_n(x)\}$ , 在  $\bigcup_{i=1}^m I_i$  上一致收敛.

当  $i$  为无限时, 例如函数列  $\left\{\frac{n+1}{n}x\right\}$  在  $I_i = (i-1, i+1)$  ( $i=1, 2, \dots$ ) 上极限函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}x = x$ , 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I_i} \left| \frac{n+1}{n}x - x \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i+1}{n} = 0,$$

所以,  $\left\{\frac{n+1}{n}x\right\}$  在  $I_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) 上一致收敛. 但当取  $x_n = n$  时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \cdot n - n \right| = 1 > 0,$$

故函数列  $\left\{\frac{n+1}{n}x\right\}$  在  $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$  上不一致收敛.

**例 10** 证明狄尼(Dini)定理 设函数列  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上单调且收敛于连续函数  $f(x)$ , 若  $f_n(x)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 在  $[a, b]$  上连续, 则  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛.

**证** 因为  $\forall x \in [a, b]$ , 设  $f_n(x) > f_{n+1}(x)$ , 令  $\varphi_n(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x) \geq 0$ , 则  $\varphi_n(x)$  在  $[a, b]$  上连续且单调减少, 且  $\forall x \in [a, b]$ ,  $\varphi_n(x) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

设  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上不一致收敛于  $f(x)$ , 则  $\varphi_n(x)$  不一致收敛于零. 即  $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall m \in \mathbb{N}, \exists n_m > m$  及  $x_m \in [a, b]$ , 使得  $\varphi_{n_m}(x_m) > \varepsilon_0$ . 于是, 得数列  $\{n_m\}$  和  $\{x_m\}$  ( $x_m \in [a, b]$ ). 由聚点定理,  $\{x_m\}$  至少有一聚点  $x_0 \in [a, b]$ , 且  $\{x_n\}$  有收敛于  $x_0$  的子列  $\{x_{m_k}\}: x_{m_k} \rightarrow x_0$  及  $\varphi_{n_{m_k}}(x_{m_k}) > \varepsilon_0$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

因为  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}$ , 使得  $n_{m_k} > m_k > k > n$ , 故  $\forall x_{m_k} \in [a, b]$ , 有  $\varphi_n(x_{m_k}) \geq \varphi_{n_{m_k}}(x_{m_k}) \geq \varepsilon_0$ .

对任意  $n$ , 考虑  $\varphi_n(x)$  的连续性, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_n(x_{m_k}) = \varphi_n(x_0) \geq \varepsilon_0$$

与已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x_0) = 0$  矛盾. 故由反证法确认  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上一

致收敛. 狄尼定理对函数项级数  $\sum u_n(x)$  也成立.

**例 11** 利用狄尼定理证明: 在  $[0, 1]$  上, 函数列  $\{(1+x/n)^n\}$  一致收敛于  $e^x$ , 并由此得出函数列  $\{1/[e^{x/n} + (1+x/n)^n]\}$  一致收敛.

**证** 因为  $f_n(x) = (1+x/n)^n$  在  $[0, 1]$  上单调增加并趋向于  $e^x$ , 而  $e^x$  在  $[0, 1]$  上连续, 由狄尼定理,  $\{(1+x/n)^n\}$  一致收敛于  $e^x$ .

$$\begin{aligned}\text{又} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1/[e^{x/n} + (1+x/n)^n] \\ &= f(x) = 1/(1+e^x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{而} \quad &|f_n(x) - f(x)| \\ &= \left| \frac{1+e^x - e^{x/n} - (1+x/n)^n}{[e^{x/n} + (1+x/n)^n](1+e^x)} \right| \\ &\leq |e^x - (1+x/n)^n| + |e^{x/n} - 1| \\ &\leq |e - (1+x/n)^n| + |e^{1/n} - 1| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.\end{aligned}$$

故  $\{1/[e^{x/n} + (1+x/n)^n]\}$  在  $[0, 1]$  上一致收敛.

**例 12** 证明: 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $f(1)=0$ , 则函数列  $\{g_n(x)\} = \{f(x)x^n\}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 在  $[0, 1]$  上一致收敛.

**证** 用分区间讨论法证明. 因为  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 故  $\exists M > 1$ , 使得  $\forall x \in [0, 1], |f(x)| < M$ ; 由  $f(1)=0$  知,  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $1-\delta < x < 1$  时, 有  $|f(x)| < \epsilon$ . 而当  $x \in [0, 1-\delta]$  时, 有

$$|g_n(x)| = |f(x)x^n| \leq M(1-\delta)^n.$$

又当  $x \in [1-\delta, 1]$  时,  $|g_n(x)| < \epsilon$ . 不妨取正整数  $N > \ln(\epsilon/M)/\ln(1-\delta)$ , 则当  $n > N$  时, 有  $|g_n(x)| < \epsilon$ . 所以  $\{g_n(x)\}$  在  $[0, 1]$  上一致收敛于零.

**例 13** 证明: 若函数列  $\{f_n\}$  在  $D \subset \mathbf{R}$  上一致收敛于  $f$ , 则  $\{|f_n|\}$  在  $D$  上一致收敛于  $|f|$ .

**证** 若  $\{f_n\}$  一致收敛于  $f$ , 则  $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbf{N}$ , 当  $n > N(\epsilon)$  时,  $\forall x \in D$ , 恒有  $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ .

因为  $||f_n(x)| - |f(x)|| \leq |f_n(x) - f(x)|$ , 所以

$$\begin{aligned} ||f_n(x)| - |f(x)|| &< ||f_n(x) - f(x)|| \\ &= |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

于是,对定义在  $D \subset \mathbf{R}$  上的函数列  $\{|f_n|\}$ ,存在函数  $|f|: D \rightarrow \mathbf{R}$ , 满足:  $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ , 当  $n > N(\varepsilon)$  时,  $\forall x \in D$ , 恒有

$$||f_n(x)| - |f(x)|| < \varepsilon,$$

即  $\{|f_n|\}$  在  $D$  上一致收敛于  $|f|$ .

**例 14** 证明:若  $\{f_n\}$  和  $\{g_n\}$  在  $D$  上分别一致收敛于  $f$  和  $g$ , 则  $\{f_n \pm g_n\}$  在  $D$  上一致收敛于  $f \pm g$ .

**证** 由题设知,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ , 当  $n > N_1(\varepsilon)$  时,  $\forall x \in D$ , 有  $|f_n - f| < \varepsilon/2$ ;  $\forall$  同一  $\varepsilon > 0, \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ , 当  $n > N_2(\varepsilon)$  时,  $\forall x \in D$ , 有  $|g_n - g| < \varepsilon/2$ . 于是,关于  $\{f_n + g_n\}$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\} \in \mathbf{N}$ , 当  $n > N(\varepsilon)$  时,  $\forall x \in D$ , 恒有

$$\begin{aligned} &|(f_n + g_n) - (f + g)| \\ &= |(f_n - f) + (g_n - g)| < |f_n - f| + |g_n - g| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

所以,  $\{f_n + g_n\}$  在  $D$  上一致收敛于  $f + g$ .

类似可证,  $\{f_n - g_n\}$  在  $D$  上一致收敛于  $f - g$ .

## 二、函数项级数的收敛性与一致收敛性

函数项级数的收敛性与一致收敛性的讨论比函数列的要复杂一些,方法也更灵活.特别是函数项级数一致收敛性判别,可以用定义、充要条件、柯西准则、M 判别法、阿贝尔判别法、狄利克雷判别法及由此引出的其它方法.使用这些方法时只有先认真验证条件,才能引用结论,防止出现错误.而判定级数不一致收敛可以用疑难解析 2 中指出的方法.

**例 15** 确定下列级数的收敛域:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{(n^2 - 3n + 2)^x}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^2}{(1 + x^2)^n}.$$

**解** (1)  $u_n(x) = (-1)^n \frac{x}{(n^2 - 3n + 2)^x}$ , 讨论  $x$  的取值.

当  $x = 0$  时, 级数显然收敛.

当  $x < 0$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$  不存在, 级数是发散的.

当  $x > 0$  时,  $|u_n(x)| \sim \frac{x}{n^{2x}} (n \rightarrow \infty)$ . 而  $\sum_{n=1}^{\infty} x/n^{2x}$  当  $x > 1/2$  时收敛, 当  $x \leq 1/2$  时发散. 由比较审敛法的极限形式知, 原级数在  $x > 1/2$  时绝对收敛. 在  $0 < x < 1/2$  时不绝对收敛, 但

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(x)| - |u_n(x)| &= \frac{x}{(n^2 - n)^x} - \frac{x}{(n^2 - 3n + 2)^x} \\ &= x \left[ \frac{1}{(n^2 - n)^x} - \frac{1}{(n^2 - 3n + 2)^x} \right] < 0, \end{aligned}$$

且有  $|u_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . 故依莱布尼茨判别法知, 原级数收敛.

(2) 因为  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ ,  $\frac{1}{1+x^2} < 1$ , 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$  为  $(-\infty, +\infty)$  内公比  $|q| < 1$  的等比级数, 是收敛的. 从而原级数在  $(-\infty, +\infty)$  内绝对收敛.

将  $S(x)$  的项重组. 先对奇数项求和, 得

$$\begin{aligned} &-x^2 \left[ \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+x^2)^{2k+1}} + \cdots \right] \\ &= -x^2 \frac{1/(1+x^2)}{1 - 1/(1+x^2)^2} = \frac{-1-x^2}{2+x^2}; \end{aligned}$$

再对偶数项求和, 得

$$\begin{aligned} &x^2 \left[ \frac{1}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{(1+x^2)^4} + \cdots + \frac{1}{(1+x^2)^{2k}} + \cdots \right] \\ &= x^2 \frac{1/(1+x^2)^2}{1 - 1/(1+x^2)^2} = \frac{1}{2+x^2}. \end{aligned}$$

于是, 级数和函数  $S(x) = \frac{-1-x^2}{2+x^2} + \frac{1}{2+x^2} = -\frac{x^2}{2+x^2}$ .

**例 16** 证明: 对级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ , 存在  $-\infty \leq r \leq +\infty$ , 使得当  $x < r$  时级数发散, 当  $x > r$  时级数收敛.

证 先证:若对某  $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$  收敛, 则  $\forall x > \lambda$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$  也收敛.

因为, 当  $x > \lambda$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda} \cdot \frac{1}{n^{x-\lambda}}$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$  一致收敛,  $\left\{ \frac{1}{n^{x-\lambda}} \right\}$  单调减少并趋向于零, 故依阿贝尔判别法知, 原级数在  $(\lambda, +\infty)$  上一致收敛.

再证  $r$  的存在性. 若  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$  发散, 则可取  $r = +\infty$  (或  $-\infty$ ).

若有  $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$ , 使得  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_1}}$  发散, 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_2}}$  收敛, 则知  $x_1 < x_2$ . 令  $E$  为非空有界集, 即

$$E = \left\{ x \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} \text{ 收敛} \right\},$$

有  $r = \inf E$  存在. 因为  $\{x_n\} \subset E$ , 使对每一  $x_n > r$ , 且  $n \rightarrow \infty$  时  $x_n \rightarrow r$ .

若  $x > r$ , 则  $\exists x_N \in E$ , 使得  $x > x_N > r$ , 从而知  $x \in E$ , 即  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$  收敛. 若  $x < r$ , 则因为  $r = \inf E$ , 从而知  $x \notin E$ , 即  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$  发散.

例 17 确定下列级数在给定区间上的一致收敛性:

$$(1) \frac{x}{1+x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{x}{1+n^2x^2} - \frac{x}{1+(n-1)^2x^2} \right], [0, 1];$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n + \sin^2 x}, (-\infty, +\infty);$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}, (-\infty, +\infty);$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right), [-1, 1];$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}, (0, +\infty).$$

解 (1) 因为  $S_n(x) = \frac{x}{1+n^2x}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0$ , 所以, 在  $[0, 1]$  上级数处处收敛于零. 又由于

$$|S_n(x) - S(x)| = \frac{x}{1+n^2x^2} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n},$$

故  $\forall \varepsilon > 0$ , 只要取  $N = [1/(2\varepsilon)]$ , 则当  $n > N$  时,  $\forall x \in [0, 1]$ , 恒有  $|S_n(x) - 0| \leq 1/(2n) < \varepsilon$ . 故依定义, 级数在  $[0, 1]$  上一致收敛.

(2) 因为  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ , 原级数满足莱布尼茨条件, 故在  $(-\infty, +\infty)$  上收敛.

$$\begin{aligned} \text{又} \quad |R_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{\sin x + k} \right| \\ &< \frac{1}{n + \sin^2 x} < \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in (-\infty, +\infty)} |R_n(x)| = 0$ ,

故原级数在  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛.

但是,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n + \sin^2 x} \right| / \frac{1}{n} = 1$ , 因  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n + \sin^2 x} \right|$  发散, 原级数条件收敛.

(3) 因为  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$  和  $n \in \mathbb{N}$ , 不等式  $\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$  恒成立, 且  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛. 故依 M 判别法知, 原级数在  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛.

(4) 因为  $\forall x \in [-1, 1]$ ,

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( x - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = x,$$

且  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |S_n(x) - S(x)| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ ,  
故原级数在  $[-1, 1]$  上一致收敛.

(5) 因为  $\frac{1}{1+n^2x} < \frac{1}{n^2x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{n^2}$ . 当  $x$  值取定时, 由于  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}$  在  $(0, +\infty)$  内处处收敛. 但是, 仅当  $n > [1/\sqrt{x\epsilon}]$  时

$$\left| \frac{1}{1+n^2x} - 0 \right| < \left| \frac{1}{n^2x} \right| < \epsilon,$$

从而  $N$  与  $\epsilon$  和  $x$  都有关, 故原级数在  $(0, +\infty)$  上不一致收敛.

**例 18** 确定下列级数在给定区间上的一致收敛性:

$$(1) \frac{1}{1+x} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(x+n-1)(x+n)}, x \in [0, 1];$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} 2^{-nx},$$

$$(i) x \in (\delta, +\infty) (\delta > 0); \quad (ii) x \in (0, +\infty);$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \cos \frac{x}{n} \right), x \in [-\delta, \delta] (\delta > 0);$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} t^n \sin^n n\theta, 0 < t < 1 \text{ 及 } k \geq 0, (-\infty, +\infty).$$

**解** (1)  $\forall x \in [0, 1], \frac{1}{1+x}$  是确定的值. 对级数部分, 因为

$$|u_n| = \left| \frac{1}{(x+n-1)(x+n)} \right| < \frac{1}{n(n-1)} < \frac{1}{(n-1)^2},$$

而  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$  收敛, 故依 M 判别法知,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n-1)(x+n)}$  一致收敛. 于是, 原级数在  $[0, 1]$  上一致收敛.

(2) (i)  $\forall x \in [\delta, +\infty)$  和  $n \in \mathbf{N}$ , 有

$$|u_n(x)| = \sqrt{n} 2^{-nx} \leq \sqrt{n} 2^{-n\delta}.$$

记  $M_n = \sqrt{n} 2^{-n\delta}$ , 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{m+1}}{M_m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} 2^{-\delta} = 2^{-\delta} < 1.$$

由比值法知,级数  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  收敛,又由 M 判别法知,原级数在  $[\delta, +\infty)$  上一致收敛.

(ii) 在  $(0, +\infty)$  上,因为  $\{\sqrt{n} 2^{-nx}\}$  当  $\varepsilon_0 = 1/2$  时,若取  $x_n = 1/n \in (0, +\infty)$ ,则有

$$|u_n(x)| = \sqrt{n} 2^{-n \cdot 1/n} = \sqrt{n}/2 > 1/2 = \varepsilon_0,$$

从而知  $\{u_n(x)\}$  在  $(0, +\infty)$  内不一致收敛于零,故原级数在  $(0, +\infty)$  内不一致收敛.

(3) 因为,在  $[-\delta, \delta]$  上有

$$\left| 1 - \cos \frac{x}{n} \right| = \left| 2 \sin^2 \frac{x}{2n} \right| < 2 \left( \frac{x}{2n} \right)^2 \leq \frac{\delta^2}{2n^2},$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛,依 M 判别法,级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \cos \frac{x}{n} \right)$  在  $[-\delta, \delta]$  ( $\delta > 0$ ) 上一致收敛.

(4) 因为  $S_m(\theta) = \sum_{n=1}^m t^n \sin^n n\theta$ ,则当  $m > n$  时,有

$$\begin{aligned} & |S_m(\theta) - S_n(\theta)| \\ &= |t^{n+1} \sin^n(n+1)\theta + t^{n+2} \sin^n(n+2)\theta + \cdots + t^m \sin^n m\theta| \\ &\leq t^{n+1} |\sin^n(n+1)\theta| + t^{n+2} |\sin^n(n+2)\theta| + \cdots + t^m |\sin^n m\theta| \\ &\leq t^{n+1} + t^{n+2} + \cdots + t^m. \end{aligned}$$

由题设  $0 < t < 1$ ,故  $\sum_{n=1}^{\infty} t^n$  收敛,其部分和数列为柯西数列.故  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m > n > N$ ,恒有

$$\left| \sum_{k=0}^m t^k - \sum_{k=0}^n t^k \right| = t^{n+1} + t^{n+2} + \cdots + t^m < \varepsilon,$$

所以  $|S_m(\theta) - S_n(\theta)| < \varepsilon$ .

其中  $N$  与  $\theta$  无关,从而知  $\sum_{n=1}^{\infty} t^n \sin^n n\theta$  在  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛.



**例 19** 证明: 若函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$  在区间  $I$  上一致收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  也在  $I$  上一致收敛. 反之, 是否成立?

**证** 若  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$  在  $I$  上一致收敛, 则依柯西准则,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbf{N}, \forall n > N$  和  $p \in \mathbf{N}, \forall x \in I$ , 有  $\sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| < \varepsilon$ , 即

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| < \varepsilon.$$

从而,  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  在  $I$  上一致收敛.

反之, 不一定成立. 如  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$  在  $[0, 1]$  上一致收敛. 可用分区间法证明: 因为

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^k (1-x)x^k = (1-x) \sum_{k=1}^n (-x)^k \\ &= -\frac{x(1-x)[1 - (-x)^{n+1}]}{1+x}, \end{aligned}$$

在  $[0, 1)$  上,  $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = -\frac{x(1-x)}{1+x}.$

当  $x=1$  时, 上式也成立, 即  $S(x) = -\frac{x(1-x)}{1+x}, x \in [0, 1].$

$$|S(x) - S_n(x)| = \left| \frac{(1-x)(-x)^{n+1}}{1+x} \right| \leq (1-x)x^{n+1}.$$

$\forall x \in [1-\varepsilon, 1] (\varepsilon > 0), \forall n \in \mathbf{N}$ , 有

$$|S(x) - S_n(x)| \leq (1-x)x^{n+1} \leq 1-x \leq \varepsilon.$$

$\forall x \in [0, 1-\varepsilon]$ , 要使

$$|S(x) - S_n(x)| \leq (1-x)x^{n+1} \leq x^{n+1} \leq (1-\varepsilon)^{n+1} < \varepsilon$$

成立, 须有  $n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln(1-\varepsilon)} - 1$ . 故当取  $N = \left\lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln(1-\varepsilon)} - 1 \right\rceil$  时上

述不等式成立. 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$  在两区间上都一致收敛, 即在  $[0, 1]$  上一致收敛.

但  $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n (1-x)x^n| = \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n$ ,  
有  $S_n(x) = 1 - x^n \quad (x \neq 1),$

故  $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ 1, & 0 \leq x < 1, \end{cases}$

取  $\varepsilon_0 = 1/3 > 0$ , 则  $\exists N \in \mathbb{N}, \exists n_0 > N, \exists x_0 = 1 - 1/n_0 \in [0, 1)$ , 使得  
 $|S(x_0) - S_{n_0}(x_0)| = (1 - 1/n_0)^{n_0} > 1/3.$

这里  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 1/n)^n = 1/e > 1/3$ , 所以, 当  $n_0$  充分大时上式成立.

即  $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$  在  $[0, 1]$  上不一致收敛.

**例 20** 证明: 若函数列  $\{a_n\}$  单调且收敛于零, 则级数  
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$  在  $[a, 2\pi - a]$  ( $0 < a < \pi$ ) 上一致收敛, 并由此得出  
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nx$  在  $[a, 2\pi - a]$  上一致收敛.

**证** 设  $u_n(x) = \cos nx, v_n(x) = a_n$ , 当  $x \in [a, 2\pi - a]$  时, 有

$$\left| \sum_{k=1}^n \cos kx \right| = \left| \frac{\sin(n + 1/2)x}{2\sin(x/2)} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2\sin(x/2)} + \frac{1}{2},$$

即  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的部分和一致有界, 而  $v_n(x)$  单调且一致趋向于零, 依

狄利克雷判别法知,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$  在  $[a, 2\pi - a]$  上一致收敛.

当  $a_n = \frac{1}{n}$  时, 有  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nx$  在  $[a, 2\pi - a]$  上一致收敛. 但  $a \neq 0$ , 因为  $\frac{1}{n} \cos nx$  在  $[0, 2\pi]$  上连续, 但当  $x = 0$  时, 级数成为

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , 是发散的, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nx$  在  $(0, \beta)$  ( $0 < \beta < 2\pi$ ) 内不一致收敛, 即在  $[0, 2\pi]$  上不一致收敛.

**例 21** 证明: 函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛的充要条件是  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

**证** 设  $u_n(x) = a_n \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt$ .

**充分性** 由分部积分法, 积分  $n$  次得

$$u_n(x) = a_n [1 - (1 + x + x^2/2 + \cdots + x^n/n) e^{-x}].$$

令  $b_n(x) = 1 - (1 + x + x^2/2 + \cdots + x^n/n) e^{-x}$ ,

则  $b_n(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调减少并一致有界. 由阿贝尔判别法知,

当  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛时, 原级数在  $[0, +\infty)$  上一致收敛.

**必要性** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛. 依柯西准则,

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ , 当  $m > n > N$  时,  $\forall x > 0$ , 有  $\left| \sum_{k=n}^m u_k(x) \right| < \varepsilon$ .

令  $x \rightarrow +\infty$ , 考虑  $u_n(x) \rightarrow a_n$ , 得  $\left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon$ . 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

**例 22** 证明: 若函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 且

函数  $\varphi(x)$  在  $[a, b]$  上有界, 则函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \varphi(x)$  在  $[a, b]$  上也一致收敛.

**证** 由柯西准则, 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 则  $\forall \varepsilon >$

$0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N$  和  $p \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b]$ , 有  $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$ .

又对  $\varphi(x), \exists M > 0, \forall x \in [a, b]$ , 有  $|\varphi(x)| < M$ . 于是, 有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \varphi(x) \right| = |\varphi(x)| \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < M\epsilon,$$

从而知  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \varphi(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛.

**例 23** 证明: 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$  在区间  $I$  上一致收敛, 则

$\sum_{n=1}^{\infty} [au_n(x) + bv_n(x)]$  在区间  $I$  上也一致收敛 ( $a, b$  为常数).

**证** 依题设, 由柯西准则,  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N$  和  $p \in \mathbb{N}, \forall x \in I$ , 有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \epsilon, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x) \right| < \epsilon.$$

从而得

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} [au_k(x) + bv_k(x)] \right| \\ &= \left| a \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) + b \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x) \right| \\ &= |a| \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| + |b| \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x) \right| \\ &< |a|\epsilon + |b|\epsilon = (|a| + |b|)\epsilon, \end{aligned}$$

即知  $\sum_{n=1}^{\infty} [au_n(x) + bv_n(x)]$  在  $I$  上一致收敛.

**例 24** 证明: 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $(a, b)$  内一致收敛. 则适当加括号

后的新级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$  在  $(a, b)$  内绝对一致收敛.

**证** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  内在  $(a, b)$  的和函数为  $S(x)$ , 则对  $\epsilon = 1/2$ ,

$\exists N_1 \in \mathbb{N}$ , 当  $m > N_1$  时,  $\forall x \in (a, b)$ , 有  $\left| \sum_{k=N_1+1}^m u_k(x) \right| < 1/2$ .

$\forall \varepsilon = 1/2^2, \exists N_2 \in \mathbf{N}$ , 当  $m > N_2$  时,  $\forall x \in (a, b)$ , 有

$$\left| \sum_{k=N_2+1}^m u_k(x) \right| < 1/2^2, 1/2^3, \dots. \text{ 对 } \varepsilon = 1/2^n, \exists N_n \in \mathbf{N}, \text{ 当 } m > N_n$$

时,  $\forall x \in (a, b)$ , 有  $\left| \sum_{k=N_n+1}^m u_k(x) \right| < 1/2^n$ .

$$\text{令 } v_1(x) = \sum_{k=1}^{N_2} u_k(x), \dots, v_n(x) = \sum_{k=N_{n-1}+1}^{N_n} u_k(x) \quad (n = 2, 3, \dots),$$

则  $|v_n(x)| < 1/2^n$ . 当  $m > n$  时, 有

$$\left| \sum_{k=n+1}^m v_k(x) \right| < \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^n},$$

故  $\forall \varepsilon > 0$ , 当  $n$  充分大时, 有

$$\left| \sum_{k=n+1}^m v_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |v_k(x)| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

依柯西准则,  $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n(x)|$  在  $(a, b)$  内一致收敛, 即  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$  在  $(a, b)$  内绝对一致收敛.

**例 25** 证明: 若函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$  在区间  $I$  上一致收

敛, 函数列  $\{v_n(x)\}$  在  $I$  上一致有界, 则函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$  在区间  $I$  上一致收敛.

**证** 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$  在  $I$  上一致收敛, 依柯西准则,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbf{N}$ ,  $\forall n > N$  和  $p \in \mathbf{N}$ ,  $\exists x \in I$ , 有

$$|u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \dots + |u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

又  $\{v_n(x)\}$  在  $I$  上一致有界, 即  $\exists M > 0$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $\forall x \in I$ , 有  $|u_n(x)| \leq M$ , 所以

$$\begin{aligned} & |u_{n+1}(x)v_{n+1}(x) + u_{n+2}(x)v_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)v_{n+p}(x)| \\ & \leq |u_{n+1}(x)| |v_{n+1}(x)| + \dots + |u_{n+p}(x)| |v_{n+p}(x)| \end{aligned}$$

$$\leq (|u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \cdots + |u_{n+p}(x)|)M \leq M\varepsilon,$$

故函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$  在  $I$  上一致收敛.

**例 26** 证明:若函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在区间  $I$  上一致收敛, 则函数列  $\{u_n(x)\}$  在  $I$  上一致收敛于零. 反之是否成立? 试举例说明.

**证** 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $I$  上一致收敛, 依柯西准则,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N$  和  $p \in \mathbb{N}, \forall x \in I$ , 有

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

当取  $p=1$  时, 即  $|u_{n+1}(x)| < \varepsilon$ , 知  $\{u_n(x)\}$  在  $I$  上一致收敛于零.

反之不一定成立. 例如, 函数列  $\{x^n/n\}$  在  $(0, 1)$  内一致收敛于零. 因为,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N = [1/\varepsilon] \in \mathbb{N}, \forall n > N, \forall x \in (0, 1)$ , 有

$$|x^n/n - 0| = |x|^n/n < 1/n < \varepsilon,$$

所以  $\{x^n/n\}$  在  $(0, 1)$  一致收敛于零.

但  $\forall \varepsilon_0 = 1/5 > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists m > n$  和  $p_0 = m \in \mathbb{N}, \exists x_0 = 1/\sqrt[2m]{2} \in (0, 1)$ , 使得

$$\begin{aligned} & \left| \frac{x_0^{m+1}}{m+1} + \frac{x_0^{m+2}}{m+2} + \cdots + \frac{x_0^{2m}}{2m} \right| \\ & \geq m \cdot \frac{x_0^{2m}}{2m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} > \frac{1}{5} = \varepsilon_0. \end{aligned}$$

从而,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  在  $(0, 1)$  内不一致收敛.

从本例可以认识到: 函数列  $\{u_n(x)\}$  在区间  $I$  上一致收敛于零只是函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $I$  上一致收敛的必要条件, 而不是充分条件.

## 第二节 一致收敛的函数列与 函数项级数的性质

### 主要内容

1. 若函数列  $\{f_n\}$  在区间  $I$  上一致收敛, 且每一项都连续, 则其极限函数  $f(x)$  在  $I$  上也连续.

2. 若函数列  $\{f_n\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 且每一项都连续, 则

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

3. 若  $x_0 \in [a, b]$  为定义在  $[a, b]$  上的函数列  $\{f_n\}$  的收敛点,  $\{f_n\}$  的每一项在  $[a, b]$  上有连续的导数, 且  $\{f'_n\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 则

$$\frac{d}{dx} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

4. 若函数项级数  $\sum u_n(x)$  在区间  $[a, b]$  上一致收敛, 且每一项都连续, 则其和函数在  $[a, b]$  上也连续. 即

$$\sum \left( \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \sum u_n(x) \right).$$

5. 若函数项级数  $\sum u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 且每一项都连续, 则  $\sum \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b \sum u_n(x) dx$

6. 若函数项级数  $\sum u_n(x)$  在  $[a, b]$  上每一项都有连续导函数,  $x_0 \in [a, b]$  为  $\sum u_n(x)$  的收敛点, 且  $\sum u'_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 则

$$\sum \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b \sum u_n(x) dx.$$

## 疑难解析

1. 为什么说和函数的三个性质(连续性、可导性与可积性)关于一致收敛的条件是充分的但不是必要的?

答 设有函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2} \right)$ , 其部分和  $S_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2}$ , 在  $[0, 1]$  上和函数

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1+n^2x^2} = 0.$$

因为, 当取  $\{x_n\} = \{1/n\} \subset (0, 1)$  时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n(1/n) - S(1/n)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 1/n}{1+n^2 \cdot 1/n^2} = \frac{1}{2} > 0.$$

因此知此函数项级数在  $[0, 1]$  上不一致收敛.

但此函数项级数各项显然在  $[0, 1]$  上连续, 且

(1)  $\forall x_0 \in [0, 1]$ , 有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} S_n(x), \quad \text{即} \quad 0 = 0.$$

$$(2) \int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)] dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(x) dx, \quad \text{即}$$

$$0 = \int_0^1 0 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+n^2)}{2n} = 0.$$

(3) 易证, 此级数各项导数组成的级数在  $(0, 1)$  内不一致收敛, 但  $\forall x \in (0, 1)$ , 有

$$\begin{aligned} 0 = S'(x) &= \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x^2}{1+(n-1)^2x^2} \right) \right]' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x^2}{1+(n-1)^2x^2} \right]' \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{k - k^2x^2}{(1+k^2x^2)^2} - \frac{(k-1) - (k-1)^2x^2}{[1+(k-1)^2x^2]^2} \right] \end{aligned}$$



$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2} = 0.$$

2. 若函数列  $\{f_n(x)\}$  中每个函数  $f_n(x)$  在任一  $x \in (a, b)$  都不连续, 是否还会有  $\{f_n(x)\}$  在  $(a, b)$  内一致收敛于连续函数?

答 有. 例如函数列  $\{f_n(x)\}$ .

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

显然, 每个  $f_n(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内任一点都不连续, 其极限函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

显然是连续的, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

即函数列  $\{f_n(x)\}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内一致收敛于连续函数.

由此可见,  $\{f_n(x)\}$  一致收敛与每个函数的连续性并无必然的联系.

## 方法、技巧与典型例题分析

利用本节的定理不只是能检验函数列或函数项级数是否满足定理中的关系式, 更重要的是能由定理条件, 在不求出极限函数或和函数的情况下, 由函数列或函数项级数本身获得极限函数或和函数的解析性质. 同时, 在讨论问题时应注意到, 定理中一致收敛的条件是充分的(见疑难解析 1), 因此, 有时要从更基本的定义来考虑问题.

**例 1** 证明下列级数在  $(-\infty, +\infty)$  内不一致收敛, 但其和函数却连续.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n^2 x}{1 + n^3 x^2} - \frac{(n+1)^2 x}{1 + (n+1)^3 x^2} \right\};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \{ n x e^{-n x^2} - (n-1) x e^{-(n-1) x^2} \}.$$

证 (1) 因为部分和

$$\begin{aligned} S_m(x) &= \sum_{n=1}^m \left\{ \frac{nx^2}{1+n^3x^2} - \frac{(n+1)^2x}{1+(n+1)^3x^2} \right\} \\ &= \frac{x}{1+x^2} - \frac{(m+1)^2x}{1+(m+1)^3x^2} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2} = S(x), \end{aligned}$$

$S(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是连续的. 由于余项

$$r_m(x) = S(x) - S_m(x) = \frac{(m+1)^2x}{1+(m+1)^3x^2}$$

由极值方法可求得, 当  $x_m = \frac{\pm 1}{(m+1)^{3/2}}$  时, 有极值

$$r_m(x_m) = \pm \frac{\sqrt{m+1}}{2} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \pm \infty,$$

所以级数在  $x=0$  的邻域内不一致收敛.

$$(2) S_m(x) = \sum_{n=1}^m \{ nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2} \} = mxe^{-mx^2},$$

当  $x \neq 0$  时,  $x^2 > 0$ , 有  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = 0$ , 即

$$S(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = 0.$$

当  $x=0$  时,  $S(0)=0$ , 所以和函数  $S(x)=0$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续. 由于余项

$$r_m(x) = S(x) - S_m(x) = -mxe^{-mx^2}$$

由极值方法可求得, 当  $x_m = \pm \frac{1}{\sqrt{m}}$  时, 有极值

$$r_m(x) = \mp m \frac{1}{\sqrt{m}} e^{-1} = \mp \frac{\sqrt{m}}{e} \rightarrow \mp \infty,$$

所以级数在  $x=0$  的邻域内不一致收敛.

**例 2** 证明函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \ln(1+n^2x^2)$  在  $[0, 1]$  上一致收敛, 并讨论其和函数在  $[0, 1]$  上的连续性、可积性与可导性.

证 对每一  $n$ ,  $u_n(x)$  是  $[0, 1]$  上单调增加函数, 故

$$u_n(x) \leq u_n(1) = \frac{1}{n^3} \ln(1+n^2), n=1,2,\dots$$

又当  $t>1$  时, 有  $\ln(1+t^2)<t$ , 故

$$u_n(x) \leq \frac{1}{n^3} \ln(1+n^2) < \frac{1}{n^3} \cdot n = \frac{1}{n^2}, n=1,2,\dots,$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 依 M 判别法知,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \ln(1+n^2 x^2)$  在  $[0,1]$  上一致收敛.

由于每一  $u_n(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 故由连续性与可积性定理知, 级数的和函数在  $[0,1]$  上连续且可积. 又

$$u_n'(x) = \frac{2x}{n(1+n^2 x^2)} < \frac{2x}{n \cdot 2nx} = \frac{1}{n^2},$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 依 M 判别法,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$  在  $[0,1]$  上也一致收敛. 故依可导性定理知,  $S(x)$  在  $[0,1]$  可导.

**例 3** 证明: 级数  $\sum \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$  在  $(1, +\infty)$  内连续.

**证** 对此类问题, 可以先考虑开区间的一个内闭区间  $[c,d]$ , 再扩展到整个开区间.

令  $a_n(x) = \frac{1}{x^{n-1}}, b_n(x) = \frac{\ln(1+nx)}{nx}$ . 在  $[a, +\infty)$  ( $a>1$ )

上有  $\frac{1}{x^{n-1}} \leq \frac{1}{a^{n-1}}$ , 而  $\sum \frac{1}{a^{n-1}}$  收敛, 从而由 M 判别法知,  $\sum \frac{1}{x^{n-1}}$  在  $[a, +\infty)$  上一致收敛. 又由于

$$0 \leq \frac{\ln(1+nx)}{nx} \leq \frac{nx}{nx} = 1,$$

令  $y(t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$ , 则

$$y'(t) = \frac{t - (1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)} < \frac{t - (1-t)}{t^2(1+t)} < 0 \quad (t \geq 2).$$

所以  $\{b_n(x)\}$  单调减少且一致有界 ( $n \geq 2$ ). 由阿贝尔判别法知,

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$  在  $[a, +\infty)$  上一致收敛. 而  $\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$  在  $[a, +\infty)$  上连续, 依连续性定理知, 级数  $\sum \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$  的和函数  $S(x)$  在  $[a, +\infty)$  上连续. 由  $a$  的任意性可以得出:  $S(x)$  在  $(1, +\infty)$  内连续.

**例 4** 设  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \cos n\pi x^2$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

**解** 因为  $x \rightarrow 1$ , 故讨论  $x=1$  的邻域, 不妨设  $x \in (0, 2)$ .  $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in (0, 2)$ , 有

$$\left| \frac{x^n}{3^n} \cos n\pi x^2 \right| \leq \frac{|x|^n}{3^n} \leq \left( \frac{2}{3} \right)^n.$$

当  $n=0$  时, 上式也成立. 而  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2}{3} \right)^n$  收敛, 依 M 判别法知,

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \cos n\pi x^2$  在  $(0, 2)$  内一致收敛. 而级数每一项在  $(0, 2)$  内都连续, 故依连续性定理知,  $f(x)$  在  $(0, 2)$  内连续, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \cos n\pi x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n}{3^n} \cos n\pi x^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{-1}{3} \right)^n = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

**例 5** 证明:

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n^2 x}{1+n^3 x^2} - \frac{(n+1)^2 x}{1+(n+1)^3 x^2} \right\}$  可以逐项积分;
- (2)  $\sum_{n=0}^{\infty} \{ nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2} \}$  不可以逐项积分.

**证** (1) 由例 1 知,  $S(x) = \frac{x}{1+x^2}$ , 则

$$\begin{aligned} \int_a^b S(x) dx &= \int_a^b \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+b^2}{1+a^2}. \\ \int_a^b S_m(x) dx &= \int_a^b \left[ \frac{x}{1+x^2} - \frac{(m+1)^2 x}{1+(m+1)x^2} \right] dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{1+b^2}{1+a^2} - \frac{1}{2(m+1)} \ln \frac{1+(m+1)^3 b^2}{1+(m+1)^3 a^2}$$

$$\xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln \frac{1+b^2}{1+a^2},$$

即  $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b S_m(x) dx = \int_a^b [\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x)] dx = \int_a^b S(x) dx.$

由例 1 知, 级数不一致收敛, 但可积性成立.

(2) 由例 1 知,  $S(x) = 0$ , 故  $\int_a^b S(x) dx = 0$ , 且

$$\int_a^b S_m(x) dx = \int_a^b m x e^{-m x^2} dx = \frac{1}{2} (e^{-m a^2} - e^{-m b^2}).$$

当  $a = 0, b \neq 0$  时,  $\int_a^b S_m(x) dx \not\rightarrow 0$ , 即

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b S_m(x) dx \neq \int_a^b [\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x)] dx.$$

本例再次说明, 级数一致收敛是逐项可积的充分条件而不是必要条件.

例 6 证明: 黎曼函数 (当  $p > 1$  时为  $p$  级数)

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

在  $(1, \infty)$  内连续且无限次可导.

证 级数当  $x > 1$  时收敛, 再来证级数一致收敛. 为此, 只需证级数中各项导数组成的级数一致收敛.

因为  $\left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \right)' = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$ , 所以当  $n$  足够大时, 有

$$0 < \frac{\ln n}{n^x} \leq \frac{\ln n}{n^a} = \frac{1}{n^{(a+1)/2}} \cdot \frac{\ln n}{n^{(a-1)/2}} < \frac{1}{n^{(a+1)/2}}.$$

由于  $a > 1$ , 即  $\frac{a+1}{2} > 1$ , 于是级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(a+1)/2}}$  收敛, 依 M 判别法

知,  $\left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \right)'$  一致收敛. 即和函数  $\zeta(x)$  连续且逐项可导, 且由  $a$  的任意性知, 在  $(1, \infty)$  内有

$$\zeta(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}.$$

以上讨论可以无限地进行下去, 因而对任意正整数  $k$ , 连续的函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^x}$  收敛且一致收敛, 即各阶导数组成的级数一致收敛. 故  $\zeta(x)$  无限次可导, 且有

$$\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^x}.$$

例 7 设贝塞尔(Bessel)函数

$$B_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(m+n)!n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n} \quad (x \neq 0),$$

证明: (1)  $[x^m B_m(x)]' = x^m B_{m-1}(x)$ ;

(2)  $[x^{-m} B_m(x)]' = -x^m B_{m+1}(x)$ ;

(3)  $B'_m(x) = \frac{1}{2} [B_{m-1}(x) - B_{m+1}(x)]$ ;

(4)  $\frac{m}{x} B_m(x) = \frac{1}{2} [B_{m-1}(x) + B_{m+1}(x)]$ .

证 因为数项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(m+n)!n!}$  绝对收敛, 所以对任何  $N$ , 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(m+n)!n!} \left(\frac{N}{2}\right)^{m+2n}$  也绝对收敛. 依 M 判别法知, 贝塞尔函数  $B_m(x)$  一致收敛, 其各阶导数也一致收敛, 故在  $(-\infty, +\infty)$  内可以逐项积分或逐项可导.

$$\begin{aligned} (1) \quad [x^m B_m(x)]' &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n}{(m+n)!n!} \cdot \frac{x^{2m+2n}}{2^{m+2n}} \right]' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2(m+n)}{(m+n)!n! 2^{m+2n}} x^{2m+2n-1} \\ &= x^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(m+n-1)!n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n-1} = x^m B_{m-1}(x). \end{aligned}$$

$$(2) \quad [x^{-m} B_m(x)]' = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n}{(m+n)!n!} \cdot \frac{x^{2n}}{2^{m+2n}} \right]'$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{(m+n)!n!} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2^{m+2n}} \\
&= x^{-m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(m+n+1-1)(n-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{(m+1)+2(n-1)} \\
&= -x^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(m+n+1)!n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+1+2n} = -x^{-m} B_{m+1}(x).
\end{aligned}$$

(3) 将题(1)、题(2)结果组合,得

$$\begin{cases} mx^{m-1}B_m(x) + x^m B'_m(x) = x^m B_{m-1}(x), & \textcircled{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -mx^{-m-1}B_m(x) + x^{-m} B'_m(x) = -x^{-m} B_{m+1}(x), & \textcircled{2} \end{cases}$$

式①、式②分别乘以  $x^{-(m-1)}$  和  $x^{m+1}$ , 得

$$\begin{cases} mB_m(x) + xB'_m(x) = xB_{m-1}(x), & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -mB_m(x) + xB'_m(x) = -xB_{m+1}(x). & \textcircled{4} \end{cases}$$

将式③、式④相加,得  $B'_m(x) = \frac{1}{2}[B_{m-1}(x) - B_{m+1}(x)]$ .

(4) 将式③、式④相减,得

$$\frac{m}{x}B_m(x) = \frac{1}{2}[B_{m-1}(x) + B_{m+1}(x)].$$

**例 8** 证明:逐项可积性的条件可以为  $\sum u_n(x)$  一致收敛,  $u_n(x) (n=1,2,\dots)$  可积.

**证** 对  $[a,b]$  作分割  $T$ , 设  $I_i$  为  $T$  的第  $i$  个小区间,  $\omega_i = \sup_{x',x'' \in I_i} |S(x') - S(x'')|$  是  $S(x)$  在  $[a,b]$  上的振幅. 由于

$\sum u_n(x)$  在  $[a,b]$  上一致收敛于  $S(x)$ , 所以  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ , 使得

$$|S_N(x') - S(x')| < \epsilon/[3(b-a)],$$

$$|S_N(x'') - S(x'')| < \epsilon/[3(b-a)].$$

又由  $S_N(x) = \sum_{k=1}^N u_k(x)$  在  $[a,b]$  上可积, 故  $\exists \delta > 0$ , 当  $\|T\| < \delta$  时, 有

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(S_n) \Delta x_i < \frac{\epsilon}{3}.$$

其中  $\omega_i(S_n)$  是  $S_n(x)$  在  $I_i$  上的振幅. 于是,  $\forall x', x'' \in I_i$ , 有

$$\begin{aligned} |S(x') - S(x'')| &\leq |S(x') - S_N(x')| + |S_N(x') - S_N(x'')| \\ &\quad + |S_N(x'') - S(x'')| \\ &< \frac{\epsilon}{3(b-a)} + \omega_i(S_n) + \frac{\epsilon}{3(b-a)} \\ &= \frac{2\epsilon}{3(b-a)} + \omega_i(S_n). \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i &\leq \frac{2\epsilon}{3(b-a)} \sum_{i=1}^n \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \omega_i(S_N) \Delta x_i \\ &< \frac{2}{3}\epsilon + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

即  $S(x)$  在  $[a, b]$  上可积.

**例 9** 设  $\{x_n\} \subset (0, 1)$ , 且  $\{x_n\}$  中元素两两互不相等, 讨论

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x - x_n)}{2^n}$  在  $(0, 1)$  内的连续性.

**解** 设  $f_n(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x - x_n)}{2^n}$ , 则  $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ . 由于  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

收敛, 依 M 判别法知,  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  在  $(0, 1)$  内一致收敛.

当  $x \neq x_i (i = 1, 2, \dots)$  时,  $f(x)$  在  $(0, 1) - \{x_n\}$  上连续, 且  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  一致收敛, 故  $f(x)$  在  $(0, 1) - \{x_n\}$  上连续. 当  $x = x_i$  时, 有

$$f(x) = f_k(x) + \sum_{n=1, n \neq k}^{\infty} f_n(x).$$

由于  $f_k(x)$  在点  $x_k$  不连续, 而  $\sum_{n=1, n \neq k}^{\infty} f_n(x)$  在点  $x_k$  连续 (当  $n \neq k$  时

$f_n(x)$  连续,  $\sum_{n=1, n \neq k}^{\infty} f_n(x)$  一致收敛), 故点  $f(x)$  在点  $x_k$  不连续. 由

$x_k$  的任意性知,  $f(x)$  在  $\{x_n\}$  的每一点不连续.

所以,  $f(x)$  在  $(0, 1) - \{x_n\}$  上连续, 在点集  $\{x_n\}$  上不连续.



**例 10** 设  $f(x) = \frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n} + \cdots$ .

(1) 证明  $f(x)$  在  $[\pi/6, \pi/2]$  上连续; (2) 计算  $\int_{\pi/6}^{\pi/2} f(x)dx$ .

**解** (1) 因为  $\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$  在  $[\pi/6, \pi/2]$  上连续, 且

$$0 < \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}\tan\left(\frac{1}{2^n} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \leq \frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2^n}.$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  收敛, 依 M 判别法知,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$  在  $[\pi/6, \pi/2]$  上一致收敛. 故  $f(x)$  在  $[\pi/6, \pi/2]$  上连续.

(2) 由  $f(x)$  在  $[\pi/6, \pi/2]$  上一致收敛, 且  $\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$  在  $[\pi/6, \pi/2]$  上连续, 故

$$\begin{aligned} \int_{\pi/6}^{\pi/2} f(x)dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}dx = - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \ln \cos \frac{x}{2^n} \right] \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left[ \cos \frac{\pi}{2^n \cdot 6} / \cos \frac{\pi}{2^n \cdot 2} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } S_n &= \ln \left[ \left( \cos \frac{\pi}{2 \cdot 6} \cos \frac{\pi}{2^2 \cdot 6} \cdots \cos \frac{\pi}{2^n \cdot 6} \right) \right. \\ &\quad \left. / \left( \cos \frac{\pi}{2 \cdot 2} \cos \frac{\pi}{2^2 \cdot 2} \cdots \cos \frac{\pi}{2^n \cdot 2} \right) \right] \\ &= \ln \left[ \left( 2^n \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{2^n \cdot 2} \right) / \left( 2^n \sin \frac{\pi}{2^n \cdot 6} \sin \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= \ln \left\{ \frac{1}{2} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2^n \cdot 2} \right) / \frac{\pi}{2^n \cdot 2} \right] \left[ \frac{\pi}{2^n \cdot 6} / \sin \left( \frac{\pi}{2^n \cdot 6} \right) \right] \cdot \frac{6}{2} \right\} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

所以  $\int_{\pi/6}^{\pi/2} f(x) = \ln \frac{3}{2}$ .

**例 11** 证明: 若函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上有任意阶导函数, 且函数列  $\{f^{(n)}(x)\}$  在  $\mathbf{R}$  上一致收敛于  $\varphi(x)$ , 则  $\varphi(x) = Ce^x$  ( $C$  为任意常

数).

证 因为  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 有  $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x)$ .

又  $\{f^{(n)}(x)\}$  满足定理条件,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 有

$$\varphi'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n+1)}(x) = \varphi(x),$$

即  $\forall x \in \mathbf{R}$ ,  $\varphi'(x) = \varphi(x)$ . 设  $F(x) = \varphi(x)e^{-x}$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 有

$$F'(x) = \varphi'(x)e^{-x} - \varphi(x)e^{-x} = [\varphi'(x) - \varphi(x)]e^{-x} = 0,$$

从而,  $\forall x \in \mathbf{R}$ ,  $F(x) = C$  ( $C$  为常数). 故

$$\varphi(x)e^{-x} = C \quad \text{或} \quad \varphi(x) = Ce^{-x}.$$

例 12 验证:

$$(1) \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} [\cos(m! \pi x)]^{2n} = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}; \end{cases}$$

$$(2) \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sin^2(m! \pi x) \cos^{2n}(m! \pi x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}. \end{cases}$$

证 (1) 当  $x \in \mathbf{Q}$  时, 设  $x = p/q$ , 其中  $q \in \mathbf{N}$ ,  $p \in \mathbf{Z}$ , 当  $m \geq q$  时,  $m! p/q = k$  是整数, 有

$$\cos^{2n}(m! x \pi) = (\cos k \pi)^{2n} = 1,$$

于是

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} [\cos(m! x \pi)]^{2n} = 1.$$

当  $x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$  时,  $m! x$  总是无理数, 有

$$|\cos(m! \pi x)| < 1,$$

所以  $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} [\cos(m! x \pi)]^{2n} = 0$ .

(2) 当  $x \in \mathbf{Q}$  时, 设  $x = p/q$ , 其中  $q < \mathbf{N}$ ,  $p \in \mathbf{Z}$ . 当  $m \geq q$  时,  $m! p/q = k$  是整数,  $\forall n \in \mathbf{N}$ , 有

$$\sin^2(m! \pi x) \cos^{2n}(m! \pi x) = \sin^2 k \pi \cos^{2n} k \pi = 0,$$

于是  $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sin^2(m! \pi x) \cos^{2n}(m! \pi x) = 0$ .

当  $x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$  时,  $m! \pi x$  总是无理数, 有

$$|\cos(m! \pi x)| < 1,$$

从而  $\sum_{n=0}^{\infty} \cos^{2n}(m! \pi x)$  收敛, 且

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos^{2n}(m!\pi x) = \frac{1}{1 - \cos^2(m!\pi x)} = \frac{1}{\sin^2(m!\pi x)}.$$

则

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sin^2(m!\pi x) \cos^{2n}(m!\pi x) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sin^2(m!\pi x) \sum_{n=0}^{\infty} \cos^{2n}(m!\pi x) = 1. \end{aligned}$$

### 第三节 幂级数

#### 主要内容

1. 由幂函数列  $\{a_n(x-x_0)^n\}$  构成的函数项级数

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots \\ &\quad + a_n(x-x_0)^n + \cdots \end{aligned}$$

或

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

称为幂级数.

幂级数是函数项级数中的一类, 以下所指幂级数均为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

2. 阿贝尔定理 若幂级数在  $x=x_0 \neq 0$  收敛, 则对满足不等式  $|x| < |x_0|$  的任何  $x$ , 幂级数收敛且绝对收敛; 若幂级数在  $x=x_0$  发散, 则对满足不等式  $|x| > |x_0|$  的任何  $x$ , 幂级数发散.

幂级数的收敛域是以原点为中心的区间, 设其长度为  $2R$ , 则称  $R$  为幂级数的收敛半径,  $(-R, R)$  称为幂级数的收敛区间.

3. 幂级数收敛半径的求法

$$(1) \text{ 比式法: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho;$$

$$(2) \text{ 根式法: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho;$$

$$(3) \text{ 柯西-哈达玛 (Cauchy-Hadamard) 法: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

当  $0 < \rho < +\infty$  时, 幂级数收敛半径  $R = 1/\rho$ ;

当  $\rho = 0$  时, 幂级数收敛半径  $R = +\infty$ ;

当  $\rho = +\infty$  时, 幂级数收敛半径  $R = 0$ .

4. 若幂级数的收敛半径为  $R (R > 0)$ , 则在其收敛区间  $(-R, R)$  内任一闭区间  $[a, b]$  上幂级数都一致收敛. 这种收敛称为内闭一致收敛.

5. 阿贝尔第二定理 若幂级数的收敛半径为  $R (R > 0)$ , 且在  $x = R$  (或  $x = -R$ ) 时收敛, 则幂级数在  $[0, R]$  (或  $[-R, 0]$ ) 上一致收敛.

6. 幂级数的和函数是  $(-R, R)$  内的连续函数, 若幂级数在收敛区间的左(右)端点上收敛, 则其和函数也在该端点右(左)连续.

7. 幂级数逐项求导或逐项求积后所得幂级数与原幂级数有相同的收敛区间.

8. 设  $f$  为幂级数在收敛区间  $(-R, R)$  内的和函数,  $x \in (-R, R)$ , 则

$$(1) f \text{ 在点 } x \text{ 可导, 且 } f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1};$$

$$(2) f \text{ 在 } [0, x] \text{ 上可积, 且 } \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

幂级数在收敛区间  $(-R, R)$  内的和函数  $f$  在  $(-R, R)$  内具有任意阶导数, 且可逐项求导任意次. 幂级数的系数与  $f$  在  $x = 0$  的各阶导数有如下关系:

$$a_0 = f(0), \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

即若幂级数在  $(-R, R)$  上有和函数  $f$ , 则幂级数由  $f$  在  $x=0$  的导数惟一确定.

9. 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  与  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  在  $x=0$  的某邻域内相等, 当且仅当  $a_n = b_n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) 时.

10. 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  和  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  的收敛半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 则有

$$(1) \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n, |x| < R_1;$$

$$(2) \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n, |x| < R;$$

$$(3) \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, |x| < R, \text{ 其中}$$

$$R = \min\{R_1, R_2\}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}.$$

## 疑 难 解 析

### 1. 求幂级数的收敛域有哪些常用方法?

答 收敛域与收敛区间不完全一致. 收敛域除包括收敛区间外, 还可能包括收敛区间的的一个或两个端点. 因此, 求幂级数的收敛域常用以下方法:

(1) 先用公式求出  $\sum a_n x^n$  的收敛半径, 求得收敛区间, 再讨论级数在收敛区间端点上的敛散性, 最后求出幂级数的收敛域.

(2) 作变量代换  $y = \varphi(x)$ , 将级数化为幂级数  $\sum a_n y^n$ , 讨论  $\sum a_n y^n$  的收敛域, 从中求到原级数的收敛域.

(3) 将级数表示为几个级数的代数和, 分别求各级数的收敛域, 则它们的交集即为原级数的收敛域.

(4) 缺项级数可以用补项或一般函数项级数的方法处理.

2. 为什么阿贝尔定理是研究幂级数敛散性的一个基本定理?

如果幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-2)^n$  在  $x=0$  收敛, 那么, 它在  $x=3$  可能发散吗?

答 阿贝尔定理把确定一个幂级数的敛散性问题归结为确定幂级数在一个点的敛散性问题. 定理指出: 若幂级数在点  $x=x_0$  ( $x_0 \neq 0$ ) 收敛, 则对一切适合  $|x| < |x_0|$  的  $x$ , 幂级数绝对收敛; 若幂级数在  $x=x_0$  发散, 则对一切适合  $|x| > |x_0|$  的  $x$ , 幂级数发散. 因此阿贝尔定理又称为幂级数的敛散性定理.

若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-2)^n$  在  $x=0$  收敛, 则依阿贝尔定理, 幂级数至少在  $(0, 4)$  内绝对收敛. 因此, 不可能在  $x=3$  发散.

3. 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x=-4$  条件收敛, 其收敛半径应多大?

答 由阿贝尔定理知, 若  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x_0 \neq 0$  收敛, 则对  $|x| < |x_0|$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  绝对收敛. 显然,  $-4 \neq 0$ , 所以,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $|x| < |-4| = 4$  绝对收敛, 故收敛半径  $R \geq 4$ .

## 方法、技巧与典型例题分析

本节例题包括三个方面: 一是求幂级数的收敛半径与收敛域, 这可以利用公式或疑难解析 1 中指出的方法求出; 二是求幂级数的和函数, 这主要用幂级数的性质来求; 三是幂级数的运算, 主要研究生成的幂级数的敛散性, 这方面的难度较大, 我们只能举几个例子说明.

### 一、幂级数的收敛半径与收敛域

例 1 求下列级数的收敛半径与收敛域:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{n} x^{n-1}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^p} \quad (p > 0);$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{n}{e} \right) x^n; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \left( \frac{x-2}{2} \right)^n;$$

$$(5) 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n; \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n + \sqrt{n}} x^n;$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)3^n}; \quad (8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x-2)^n.$$

解 本例用公式直接求出收敛半径,再讨论区间端点,确定收敛域.

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} = 1$ , 故幂级数收敛半径  $R = 1$ .

当  $x = 1$  时,级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{n}$ . 若令  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ , 则  $a_n = f(n)$ , 因为  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上连续,非负且单调减少,有

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f(x) dx &= \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln^2(1+x) \Big|_1^{+\infty} = +\infty. \end{aligned}$$

故  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$  发散. 由积分判别法知,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{n}$  发散.

当  $x = -1$  时,级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(1+n)}{n}$ , 依莱布尼茨判别法知,级数收敛.

因此,幂级数收敛域为  $[-1, 1)$ .

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^p = 1$ , 故幂级数收敛半径为 1.

当  $x = 1$  时, 级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$ . 因为  $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{(n+1)^p}$ , 依莱布尼茨判别法知, 级数收敛.

当  $x = -1$  时, 级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} (-1)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ , 当  $p > 1$  时, 级数收敛, 当  $0 < p \leq 1$  时, 级数发散.

因此, 当  $p > 1$  时, 收敛域为  $[-1, 1]$ ; 当  $0 < p \leq 1$  时, 收敛域为  $(-1, 1]$ .

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{(1 + 1/n)} = 1, \text{ 故幂级数收敛半径为 } 1.$$

当  $x = 1$  时, 级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ , 依斯特林公式知

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{2n\pi} e^{-n} \cdot n^n} \left(\frac{n}{e}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} > \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{n}.$$

因为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$  发散.

当  $x = -1$  时, 级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ . 因为  $\frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \rightarrow 0$ , 且  $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{e}{(1 + 1/n)} \rightarrow 1$ , 依莱布尼茨判别法知, 级数收敛.

因此, 幂级数收敛域为  $[-1, 1)$ .

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(2n+1)2^{n+1}} / \frac{1}{(2n-1)2^n} \right| = \frac{1}{2}$ , 故幂级数收敛半径为 2.  $|x-2| < 2$ , 即  $0 < x < 4$ .

当  $x = 0$  时, 级数一定收敛;

当  $x = 4$  时, 级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ , 级数发散.

因此, 幂级数收敛域为  $[0, 4)$ .

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = 1, \text{ 故幂级数收}$$



敛半径为 1.

$$S(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n, \quad |x| < 1,$$

$$S'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot 2x + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot nx^{n-1} + \cdots,$$

将上式两边同乘以  $(1-x)$ , 得微分方程

$$(1-x)S'(x) = \frac{1}{2}S(x), \quad \text{且} \quad S(0) = 1,$$

分离变量, 得 
$$\frac{dS(x)}{S(x)} = \frac{dx}{2(1-x)},$$

两边积分, 得 
$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad |x| < 1.$$

因此, 幂级数收敛域为  $(-1, 1)$ .

(6) 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1+\sqrt{n+1}}{n+\sqrt{n}} \right| = 1,$$
 故幂级数收敛半径为 1.

当  $x = -1$  时, 级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ , 显然发散; 当  $x = 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+\sqrt{n}}$  为收敛的交错级数.

因此, 幂级数收敛域为  $(-1, 1]$ .

(7) 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3) \cdot 3^n}{(n+2) \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3},$$
 故幂级数的收敛半径为 3.

当  $x = 3$  时, 级数为  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ , 显然发散; 当  $x = -3$  时, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$  是收敛的交错级数. 因此, 幂级数收敛域为  $[-3, 3)$ .

(8) 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{3^n + (-2)^n} = 3,$$
 故幂级数的收敛半径为  $1/3$ . 由  $|x-1| < 1/3$ , 得  $2/3 < x < 4/3$ .

当  $x = 2/3$  时, 级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + (2/3)^n}{n}$ , 其中  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  为收敛的交错级数. 依比值法知,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2/3)^n}{n}$  收敛, 故级数在  $x = 2/3$  收敛.

当  $x = 4/3$  时, 级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-2/3)^n}{n}$ , 其中  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 而  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2/3)^n}{n}$  收敛, 故级数在  $x = 4/3$  发散.

**例 2** 求下列级数的收敛半径与收敛域:

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} n 2^{2n} x^n (1-x)^n$ ; (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sin \frac{1}{3n} \right) \left( \frac{3+x}{3-2x} \right)^n$ ;  
 (3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \sqrt[n]{n}} \left( \frac{x}{2x+1} \right)^n$ ; (4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-n^2} e^{-nx}$ ;  
 (5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n + 2^n + \cdots + 50^n}{n^2} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^n$ .

**解** 本例先需要进行变量代换, 再讨论收敛半径与收敛域.

(1) 令  $y = x(1-x)$ , 化级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} n 2^{2n} y^n$ . 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) 2^{2(n+1)}}{n 2^{2n}} = 4,$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} n 2^{2n} y^n$  收敛半径为  $1/4$ .

由  $-\frac{1}{4} < x(1-x) < \frac{1}{4}$  可解得  $0 < \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$ , 从而得  $\frac{1 - \sqrt{2}}{2} < x < \frac{1}{2}$  或  $\frac{1}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ .

当  $y = x(1-x) = \pm \frac{1}{4}$  时, 级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} n 2^{2n} \left( \pm \frac{1}{4} \right)^n$ , 显然发散. 因此, 原级数收敛域为  $\left( \frac{1 - \sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right) \cup \left( \frac{1}{2}, \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right)$ .

(2) 令  $y = \frac{3+x}{3-2x}$ , 化级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sin \frac{1}{3n} \right) y^n$ . 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin[1/(3n+3)]}{\sin(1/3n)} = 1,$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sin \frac{1}{3n} \right) y^n$  收敛半径为 1.

当  $-1 < y < 1$  时, 由  $-1 < \frac{3+x}{3-2x} < 1$  解得  $x < 0$  或  $x > 6$ .

当  $x = 0$  时, 原级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{3n}$ , 由比较法的极限形式知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{1}{3n} \right) / \frac{1}{3n} = 1, \text{ 说明级数与 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} \text{ 同样发散.}$$

当  $x = 6$  时, 原级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{3n}$ , 是收敛的交错级数.

因此, 原幂级数收敛域是  $(-\infty, 0) \cup [6, +\infty)$ .

(3) 令  $y = \frac{x}{2x+1}$ , 化级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \sqrt[n]{n}} y^n$ . 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/(n \sqrt[n]{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \ln n} = 1,$$

故级数收敛半径为 1.

当  $y = 1$  时, 级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \sqrt[n]{n}}$ . 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  收敛,  $\frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$  单调有界, 故级数收敛.

当  $y = -1$  时, 级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$ . 因为当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\frac{1}{n \sqrt[n]{n}} \sim \frac{1}{n}$ , 故级数发散.

由  $-1 < y \leq 1$  得,  $-1 < \frac{x}{2x+1} \leq 1$ , 解得  $x > -\frac{1}{3}$  和  $x \leq -1$ . 因此, 原幂级数收敛域为  $(-\infty, -1] \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$ .

(4) 令  $e^{-x} = y$ , 化级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n)^{-n^2} y^n$ . 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^{-n} = 1/e,$$

故级数收敛半径为  $e$ .

当  $y = e$  时, 级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^n$ , 其通项  $b_n = \left[\frac{e}{(1 + 1/n)^n}\right]^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , 级数发散.

当  $y = -e$  时, 级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} - e^n$ , 其通项  $b_n \not\rightarrow 0$ , 级数也发散.

由  $-e < y < e$  得,  $-e < e^{-x} < e \Rightarrow 0 < e^{-x} < e \Rightarrow -1 < x < +\infty$ . 因此, 原幂级数收敛域为  $(-1, +\infty)$ .

$$(5) \text{ 由 } 1 \leq \sqrt{\left(\frac{1}{50}\right)^n + \left(\frac{2}{50}\right)^n + \cdots + \left(\frac{49}{50}\right)^n + 1} \leq \sqrt[n]{50} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

及  $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ , 有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1^n + 2^n + \cdots + 50^n}{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{50}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{50}\right)^n + \left(\frac{2}{50}\right)^n + \cdots + \left(\frac{49}{50}\right)^n + 1} = 50, \end{aligned}$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n + 2^n + \cdots + 50^n}{n^2} \left(\frac{1}{50}\right)^n$

收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n + 2^n + \cdots + 50^n}{n^2} t^n$  在  $\left[-\frac{1}{50}, \frac{1}{50}\right]$  上收敛.

由  $-\frac{1}{50} \leq \frac{1-x}{1+x} \leq \frac{1}{50}$  解得  $\frac{49}{51} \leq x \leq \frac{51}{49}$ , 因此, 幂级数收敛域为  $\left[-\frac{49}{51}, \frac{51}{49}\right]$ .

例3 确定下列幂级数的收敛半径与收敛域:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} + (-1)^n + \sin n \right) x^n; (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{4^n} \right] x^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a^n}{n^2} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n, a > 0, b > 0.$$

解 本例级数均可分解为两个级数之和.

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} + (-1)^n + \sin n \right) x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + \sin n] x^n. \end{aligned}$$

对  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$ , 故级数收敛半径为 1. 又

$\sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{1}{n^2}$  收敛, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$  的收敛域为  $[-1, 1]$ .

对  $\sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + \sin n] x^n$ , 因为  $|[(-1)^n + \sin n] x^n| \leq$

$2|x|^n$ . 而  $\sum_{n=1}^{\infty} 2|x|^n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} |x|^n$  的收敛域显然为  $(-1, 1)$ .

因此, 原级数收敛域是  $(-1, 1)$ .

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{4^n} \right] x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} x^n.$$

对  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$ , 故级数收敛半径为 1. 又

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (-1)^n$  发散, 故级数收敛域为  $[-1, 1)$ .

对  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} x^n$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{4}$ . 又  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} (\pm 4)^n$  发散, 故级数收敛域为  $(-4, 4)$ .

因此, 原级数收敛域为  $[-1, 1)$ .

(3) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n/n^2 + b^n/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a, b),$$

故级数收敛半径为  $\max\{1/a, 1/b\}$ .

当  $x = \pm 1/a$  ( $a \geq b$ ) 或  $x = \pm 1/b$  ( $b \geq a$ ) 时, 级数都收敛.

**例 4** 确定下列级数的收敛半径与收敛域:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}; & (2) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}; \\ (3) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} n^{n^2} x^{n^3}; & (4) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n^2}. \end{aligned}$$

**解** 本例都是缺项级数, 但解法却不完全相同.

(1) 用达朗贝尔比值法. 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+1}{2^{n+1}} x^{2n} \right) \bigg/ \left( \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2} \right) = \frac{1}{2} |x|^2,$$

所以, 当  $|x| < \sqrt{2}$  时幂级数绝对收敛, 故  $R=1$ .

当  $x = \pm \sqrt{2}$  时, 级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( n - \frac{1}{2} \right)$ , 是发散的.

因此, 原幂级数收敛域为  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .

(2) 用达朗贝尔比值法. 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n(n+1)} |x|^2 \rightarrow 0,$$

所以  $R=+\infty$ , 原幂级数收敛域为  $(-\infty, +\infty)$ .

(3) 对级数添加一些值为零的项, 不影响级数的敛散性. 令

$$a_k = \begin{cases} n^{n^2}, & k = n^3, \\ 0, & k \neq n^3 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

则级数化为  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{n^2} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_k x^k$ , 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

且当  $x = \pm 1$  时, 原级数的通项  $(\pm 1)^{n^3} n^{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , 因此, 原幂级数

收敛域为 $(-1, 1)$ .

(4) 由柯西根值法的极限形式, 有

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n^{n^2}|/2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{2} \\ &= \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ 1/2, & |x| = 1, \\ +\infty, & |x| > 1. \end{cases}\end{aligned}$$

因此, 原幂级数收敛域为 $[-1, 1]$ .

**例 5** 确定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n|x|^n}$  的收敛域.

**解** 当  $x = 0$  时, 原级数没有意义.

当  $x > 0$  时,  $\frac{x}{|x|} = 1$ , 原级数化为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , 级数发散.

当  $x < 0$  时,  $\frac{x}{|x|} = -1$ , 原级数化为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ , 级数收敛.

因此, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n|x|^n}$  的收敛域为 $(-\infty, 0)$ .

**注意** 这个级数不是幂级数, 所以不存在收敛半径.

## 二、幂级数的性质

幂级数的性质是指幂级数的和函数在收敛区间上的连续性、可微性与可积性. 利用幂级数的性质可以研究与幂级数和函数有关的函数性质、求幂级数的和函数以及讨论和函数的一致收敛性等. 在研究问题时, 只有善于观察具体问题的不同点, 灵活运用幂级数的性质, 方能取得好的结果.

**例 6** 设  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在 $(-R, R)$ 上收敛, 证明:

$$(1) S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^n(0)}{n!} x^n; (2) S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

**证** (1) 由于幂级数在收敛区域内可微分任意次, 有

$$S(0) = a_0, S'(0) = a_1, \dots, S^{(n)}(0) = n!a_n,$$

$$\text{故 } a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}, \text{ 即得 } S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

$$(2) \text{ 将 } S^{(k)}(x) \text{ 作为级数时, 有 } S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n+k)}(0)}{n!} x^n.$$

$$\begin{aligned} \text{又 } S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} (x_0 + x - x_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} \{ C_n^0 x_0^n + C_n^1 x_0^{n-1} (x - x_0) \\ &\quad + \dots + C_n^n (x - x_0)^n \}. \end{aligned}$$

由于级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n$  在  $(-R, R)$  内收敛, 所以

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |S^{(n)}(0)| \{ C_n^0 |x_0|^n + C_n^1 |x_0|^{n-1} |x - x_0| \\ &\quad + \dots + C_n^n |x - x_0|^n \} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |S^{(n)}(0)| (|x_0| + |x - x_0|)^n. \end{aligned}$$

当  $|x_0| + |x - x_0| < R$  时收敛, 即  $S(x)$  绝对收敛, 故可改变项的次序, 得

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} \{ C_n^0 x_0^n + C_n^1 x_0^{n-1} (x - x_0) \\ &\quad + \dots + C_n^n (x - x_0)^n \} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (x - x_0)^n \left\{ C_n^n \frac{S^{(n)}(0)}{n!} + C_{n+1}^n \frac{S^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} x_0 \right. \\ &\quad \left. + C_{n+2}^n \frac{S^{(n+2)}(0)}{(n+2)!} x_0^2 + \dots \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (x - x_0)^n \left\{ \frac{S^{(n)}(0)}{n!} + \frac{C_{n+1}^1 S^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} x_0 \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_{n+2}^2 S^{(n+2)}(0)}{(n+2)!} x_0^2 + \dots \right\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} \left\{ S^{(n)}(0) + \frac{S^{(n+1)}(0)}{1!} x_0 \right. \\
&\quad \left. + \frac{S^{(n+2)}(0)}{2!} x_0^2 + \cdots \right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad (|x_0| + |x-x_0| < R).
\end{aligned}$$

例 7 设  $|x| < 1$ , 证明:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}; \\
(2) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^3}; \\
(3) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)n(n+1)}{6} x^{n-2} = \frac{1}{(1-x)^4}.
\end{aligned}$$

证 利用等比级数  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$  和逐项求导公式求解.

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \left[ \int \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n dx \right]' \\
&= \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \right)' = \left( \frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}. \\
(2) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1} = \left\{ \int \left[ \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1} dx \right] dx \right\}'' \\
&= \left\{ \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{2} x^n dx \right\}'' = \left\{ \frac{x^2}{2(1-x)} \right\}'' = \frac{1}{(1-x)^3}. \\
(3) \quad & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)n(n+1)}{6} x^{n-2} \\
&= \left\{ \int \left[ \int \left( \int \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)n(n+1)}{6} x^{n-2} dx \right) dx \right] dx \right\}''' \\
&= \left\{ \int \left[ \int \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+1)}{6} x^{n-1} dx \right] dx \right\}''' \\
&= \left\{ \int \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{6} x^n dx \right\}''' = \left\{ \frac{x^3}{6(1-x)} \right\}'''
\end{aligned}$$

$$= \left[ \frac{3x^2 - 2x^3}{6(1-x)} \right]'' = \left[ \frac{6x - 6x^2 + 2x^3}{6(1-x)^3} \right]' = \frac{1}{(1-x)^4}.$$

例 8 证明: 贝塞尔函数  $B_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left( \frac{x}{2} \right)^{2n} (x \neq 0)$

满足微分方程

$$xB_0''(x) + B_0'(x) + xB_0(x) = 0.$$

证 由上节例 7 知, 贝塞尔函数在  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛, 故可逐项求导.

$$B_0'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{(n!)^2 2^{2n}} x^{2n-1},$$

$$B_0''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n(2n-1)}{(n!)^2 2^{2n}} x^{2n-2},$$

$$xB_0''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n(2n-1)}{(n!)^2 2^{2n}} x^{2n-1},$$

$$\begin{aligned} xB_0(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(n!)^2 2^{2n}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{[(n-1)!]^2 2^{2n-2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n)^2}{(n!)^2 2^{2n}} x^{2n+1}. \end{aligned}$$

故  $xB_0''(x) + B_0'(x) + xB_0(x)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n(n-1)}{(n!)^2 2^{2n}} x^{2n-1} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{(n!)^2 2^{2n}} x^{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{-(2n)^2}{(n!)^2 2^{2n}} x^{2n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(n!)^2 2^{2n}} [2n(2n-1) + 2n - (2n)^2] = 0. \end{aligned}$$

例 9 证明: 当  $|x| < 1$  时, 有

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \arctan x.$$

证 两级数在  $|x| < 1$  中一致收敛, 故可逐项求积.

$$\begin{aligned} (1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \\ &= \int_0^x dt + \int_0^x t^2 dt + \int_0^x t^4 dt + \cdots + \int_0^x t^{2n-2} dt + \cdots \\ &= \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt \quad (\text{利用等比级数和的公式}) \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_0^x \frac{1}{1+t} dt + \int_0^x \frac{1}{1-t} dt \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \\ &= \int_0^x dt - \int_0^x t^2 dt + \int_0^x t^4 dt + \cdots + (-1)^{n+1} \int_0^x t^{2n-2} dt + \cdots \\ &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan t, \quad |x| \leq 1. \end{aligned}$$

若在题(1)中, 令  $x$  取特殊值, 有

$$\text{令 } x = \frac{1}{3}, \text{ 得 } \ln 2 = 2 \left( \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \cdots \right);$$

$$\text{令 } x = \frac{1}{2}, \text{ 得 } \ln 3 = 2 \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \cdots \right);$$

$$\text{令 } x = \frac{2}{3}, \text{ 得 } \ln 5 = 2 \left( \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2^3}{3 \cdot 3^3} + \frac{2^5}{5 \cdot 3^5} + \cdots \right);$$

$$\text{令 } x = \frac{n-1}{n+1}, \text{ 得 } \ln n = 2 \left[ \left( \frac{n-1}{n+1} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^5 + \cdots \right].$$

若在题(2)中, 令  $x = \sqrt{3}/3$ , 有

$$\pi = 2\sqrt{3} \left( 1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \cdots \right).$$

令  $x = \pm 1$ , 则得莱布尼茨级数

$$\pi = 4 \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \right).$$

例 10 设  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n 3^{n-1} x^{n-1}$ .

(1) 证明  $f(x)$  在  $(-1/3, 1/3)$  内连续;

(2) 计算  $\int_0^{1/8} f(x) dx$ .

$$\begin{aligned} \text{解 } f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n 3^{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n (3x)^{n-1} \\ &= \left[ \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} n (3x)^{n-1} dx \right]' = \left[ \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (3x)^n \right]' \\ &= \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{(1-3x)} \right]' = \frac{1}{(1-3x)^2}, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} n 3^{n-1} x^{n-1}$  在  $(-1/3, 1/3)$  内一致收敛, 故和函数  $f(x)$  在  $(-1/3, 1/3)$  内连续.

(2) 和函数在收敛区间内逐项可导, 故

$$\begin{aligned} \int_0^{1/8} f(x) dx &= \int_0^{1/8} \frac{1}{(1-3x)^2} dx = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1-3x)} \Big|_0^{1/8} \\ &= 8/15 - 1/3 = 1/5. \end{aligned}$$

例 11 设  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$  ( $-\infty < x < +\infty$ ), 不求和函数,

将积分  $\int_0^x t f(t) dt$  用  $f(x)$  表示出来.

解 利用幂级数在收敛区间内可逐项积分且收敛半径不变  
的性质, 对  $t f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{n!}$  积分.

$$\begin{aligned} \int_0^x t f(t) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^x \frac{t^{2n+1}}{n!} dt \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2n+2} x^{2n+2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)!} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} - 1 \right) = \frac{1}{2} [f(x) - 1]. \end{aligned}$$

例 12 设  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $|x| < R$  时收敛, 且

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$  也收敛, 证明:

$$\int_0^R f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1},$$

且  $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$

证 幂级数在收敛区间内可以逐项积分, 即

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

而  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$  收敛, 则由阿贝尔第二定理, 令  $x \rightarrow R-0$ , 有

$$\int_0^R f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}.$$

当  $|x| < 1$  时, 有  $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ . 而  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$  收敛, 故

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}.$$

例 13 设  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \ln(1+n)}$ , 证明:

(1)  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上连续;

(2)  $f(x)$  在  $x = -1$  可导, 在  $x = 1$  不可导,  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x) = +\infty$ .

证 (1) 当  $|x| \leq 1$  时, 有不等式

$$\left| \frac{x^n}{n^2 \ln(1+n)} \right| \leq \frac{1}{n^2 \ln(1+n)} \leq \frac{1}{n^2 \ln 2}$$

成立. 所以  $f(x)$  的幂级数在  $[-1, 1]$  上一致收敛, 从而  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上连续.

(2) 由逐项可导性质知,  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \ln(1+n)} \quad (-1, 1).$

当  $x > 0$  时,  $f'(x)$  是正的单调增加函数, 故  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x) = A$  存在. 设  $A < +\infty$ , 则  $f'(x)$  在  $[0, 1]$  上有界, 又  $\frac{1}{n \ln(1+n)} > 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(1+n)}$  必收敛. 但事实上, 由积分判别法知,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  发散, 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(1+n)}$  发散. 于是  $A = +\infty$ , 即

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x) = +\infty.$$

当  $x = -1$  时, 依莱布尼茨判别法知

$$f'(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln(1+n)}$$

收敛. 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \ln(1+n)}$  在  $[-1, 0]$  上一致收敛. 由可微性知

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \ln(1+n)} \quad (-1 \leq x \leq 0),$$

即  $f(x)$  在  $x = -1$  可导.

由  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x) = +\infty$ , 利用洛必达法则, 有

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x) = +\infty,$$

即  $f(x)$  在  $x=1$  不可导.

求幂级数的和函数的方法往往不是惟一的, 读者在解题过程中可以用不同方法得出同一结果. 为了节省篇幅, 在以后的大部分例题中我们仍然采取一题一法的方式.

**例 14** 求下列幂级数的和函数:

$$(1) 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \dots;$$

$$(2) \frac{1}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{1}{3 \cdot 4} x^4 + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n} x^{2n} + \dots;$$

$$(3) x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots;$$

$$(4) 3x^2 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{7}{3}x^6 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n} x^{2n} + \dots.$$

解 (1) 设  $S(x) = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \cdots$ , 则

$$xS(x) = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1,$$

所以  $S(x) = \frac{e^x - 1}{x}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .

(2) 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = x^2$ , 所以收敛半径  $R = 1$ .

当  $x = \pm 1$  时, 级数成为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)^2}$ , 而

$$\frac{1}{2n(2n-1)} < \frac{1}{(2n-1)^2} < \frac{1}{4(n-1)^2},$$

因  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4(n-1)^2}$  收敛, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)^2}$  收敛. 因此, 级数收敛域为  $[-1, 1]$ .

设  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$ , 则  $S(0) = 0$ ;

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1}, \quad S'(0) = 0;$$

$$S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1.$$

故 
$$S'(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x},$$

$$S(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \ln \frac{1+t}{1-t} dt = \frac{1}{2} \left[ \int_0^x \ln(1+t) dt - \int_0^x \ln(1-t) dt \right]$$

$$= \frac{1}{2} x [\ln(1+x) - \ln(1-x)]$$

$$- \frac{1}{2} \left[ \int_0^x \frac{t}{1+t} dt + \int_0^x \frac{t}{1-t} dt \right]$$

$$= \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{2t}{1-t^2} dt$$

$$= \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \ln(1-x^2), \quad |x| < 1.$$

(3) 设  $S(x) = x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \cdots$ , 则

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{S(t)}{t} dt &= \int_0^x (1 - 4t + 9t^2 - 16t^3 + \cdots) dt \\ &= x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + \cdots = v(x),\end{aligned}$$

而 
$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{v(t)}{t} dt &= \int_0^x (1 - 2t + 3t^2 - 4t^3 + \cdots) dt \\ &= x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots = x \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \\ &= \frac{x}{1+x}, \quad |x| < 1,\end{aligned}$$

故 
$$S(x) = xv'(x) = x \left[ x \left( \frac{x}{1+x} \right)' \right]' = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}.$$

当  $x = \pm 1$  时, 级数发散.

(4) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n+1} \bigg/ \frac{2n+1}{n} = 1$ , 而  $x = \pm 1$

时, 级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n}$ , 是发散的, 因此级数收敛域为  $(-1, 1)$ . 设

$$\begin{aligned}S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n} x^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^{2n} \\ &= 2 \frac{x^2}{1+x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^{2n},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^{2n} = \int_0^x \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^{2n} \right]' dx \\ &= \int_0^x \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2x^{2n-1} \right] dx \\ &= \int_0^x \frac{2x}{1+x^2} dx = \ln(1+x^2), \quad |x| < 1,\end{aligned}$$



故 
$$S(x) = \frac{2x}{1+x^2} + \ln(1+x^2)$$

$$= 2 - \frac{2}{1+x^2} + \ln(1+x^2), |x| < 1.$$

例 15 求下列幂级数在收敛域中的和函数:

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$ ; (2)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2n-1}}{1+x^{2n}}, |x| < 1$ ;  
 (3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ ; (4)  $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ .

解 (1) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$ , 所以收敛半径为 1.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \\ &= \frac{x}{1-x} - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x}{1-x} - \frac{1}{x} \int_0^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} \right)' dt \\ &= \frac{x}{1-x} - \frac{1}{x} \int_0^x \frac{t}{1-t} dt = \frac{x}{1-x} + \frac{1}{x} [x + \ln(1-x)] \\ &= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \ln(1-x). \end{aligned}$$

(2)  $S_{n+1}(x)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \cdots + \frac{2^n x^{2n-1}}{1+x^{2n}} \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \cdots + \frac{2^n x^{2n-1}}{1+x^{2n}} \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1-x^2} + \frac{2x}{1+x^2} + \cdots + \frac{2^n x^{2n-1}}{1+x^{2n}} \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{2^2 x^{4-1}}{1-x^4} + \frac{2^2 x^{4-1}}{1+x^4} + \cdots + \frac{2^n x^{2n-1}}{1+x^{2n}} = \cdots \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{2^{n+1} x^{2n}}{1+x^{2n+1}}, \end{aligned}$$

故 
$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1}(x) = \frac{1}{1-x}.$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int_0^x S(t) dt &= \int_0^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} t^{2n-2} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{2n-1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right)^{2n-1} = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x^2}{2} \right)^n \\
 &= \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1-x^2/2} = \frac{x}{2-x^2}, \quad |x| < \sqrt{2},
 \end{aligned}$$

故  $S(x) = \left( \frac{x}{2-x^2} \right)' = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}, \quad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$

$$\begin{aligned}
 (4) \int_0^x S(t) dt &= \int_0^x \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)t^n \right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+2} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \\
 &= x^2 \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^{n'} \right) = x^2 \left( \frac{1}{1-x} \right)' \\
 &= \frac{x^2}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1,
 \end{aligned}$$

故  $S(x) = \left[ \frac{x^2}{(1-x)^2} \right]' = \frac{2x}{(1-x^2)^2}, \quad x \in (-1, 1).$

**例 16** 求下列幂级数在收敛域中的和函数:

$$\begin{aligned}
 (1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-1)^n}{n(n+1)}; & \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \left( \frac{3+x}{3-2x} \right)^{2n}; \\
 (3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 x^n; & \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n-1)3^{n-1}}.
 \end{aligned}$$

**解** (1) 令  $x^2-1=y$ , 级数化为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n(n+1)}$ , 则

$$S(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n(n+1)}, \quad yS(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n(n+1)},$$

有  $[yS(y)]' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n},$

$$[yS(y)]'' = \sum_{n=1}^{\infty} y^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y}, \quad |y| < 1,$$

故  $[yS(y)]' = \int_0^y \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-y).$

$$yS(y) = \int_0^y -\ln(1-y) dy = (1-y)\ln(1-y) + y,$$

即  $S(y) = 1 + \frac{1-y}{y} \ln(1-y), |y| < 1.$

由  $|y| < 1$  知,  $|x^2 - 1| < 1 \Rightarrow |x| < 1$ , 从而

$$S(x) = 1 + \frac{2-x^2}{x^2-1} \ln(2-x^2), |x| < 1.$$

(2) 令  $y = \frac{3+x}{3-2x}$ , 级数化为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} y^{2n}$ , 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}(y)}{u_n(y)} = y^2$  知,

当  $|y| < 1$  时级数收敛, 当  $y = \pm 1$  时级数发散. 故  $\left| \frac{3+x}{3-2x} \right| < 1 \Rightarrow x < 0$  或  $x > 6$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} y^{2n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^y \left( \frac{1}{2n} t^{2n} \right)' dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^y t^{2n-1} dt \\ &= \int_0^y t \left( \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \right) dt = \int_0^y \frac{t dy}{1-t^2} = -\frac{1}{2} \ln |1-y^2|, \end{aligned}$$

故 
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \left( \frac{3+x}{3-2x} \right)^{2n} &= -\frac{1}{2} \ln \left| 1 - \left( \frac{3+x}{3-2x} \right)^2 \right| \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{-3x(6-x)}{(3-2x)^2} \right|, \\ &\quad x \in (-\infty, 0) \cup (6, +\infty). \end{aligned}$$

(3)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2 x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2 x^{n-1},$

$$\int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2 t^{n-1} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1},$$

$$\int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n t^{n-1} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, |x| < 1,$$

故  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} = \left( \frac{1}{1+x} \right)' = \frac{-1}{(1+x)^2}, |x| < 1,$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2 x^{n-1} = \left[ \frac{-x}{(1+x)^2} \right]' = \frac{x-1}{(1+x)^3}, \quad |x| < 1.$$

从而  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2 x^n = \frac{x(x-1)}{(1+x)^3}, \quad x \in (-1, 1).$

$$\begin{aligned} (4) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n-1)3^{2n-1}} \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} \left( \frac{x}{3} \right)^{2n-1} \\ &= x \int_0^x \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} \left( \frac{t}{3} \right)^{2n-1} \right]' dt \\ &= x \int_0^x \left[ \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{t}{3} \right)^{2(n-1)} \right] dt \\ &= x \int_0^x \frac{1}{3} \cdot \frac{dt}{1 + (t/3)^2} = x \arctan \frac{x}{3}, \quad x \in [-3, 3]. \end{aligned}$$

例 17 设  $0 < x < 1$ , 求  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1-x^{2n+1}}$  的和函数.

解 
$$\begin{aligned} \frac{x^{2n}}{1-x^{2n+1}} &= \frac{x^{2n}+1}{1-x^{2n+1}} - \frac{1}{1-x^{2n+1}} \\ &= \frac{1}{1-x^{2n}} - \frac{1}{1-x^{2n+1}}. \end{aligned}$$

所以 
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{1-x^{2k+1}} &= \sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{1-x^{2k}} - \frac{1}{1-x^{2k+1}} \right) \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2n+1}}. \end{aligned}$$

故当  $0 < x < 1$  时, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{1-x^{2k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}. \end{aligned}$$

例 18 设幂级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$ , 求:

(1) 收敛区间与和函数; (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} 2^n$  的值.

解 (1) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)n!}{(n+1)!(2n+1)} |x|^2 = 0$ ,  
所以收敛区间为  $(-\infty, +\infty)$ .

$$\begin{aligned} \int_0^x S(t) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n+1} \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = x(e^{x^2} - 1), \end{aligned}$$

故  $S(x) = [x(e^{x^2} - 1)]' = (2x^2 + 1)e^{x^2} - 1$ ,  
 $x \in (-\infty, +\infty)$ .

(2) 当  $x = \sqrt{2}$  时, 级数化为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} 2^n$ , 故

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} 2^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} 2^n = (5e^2 - 1) + 1 = 5e^2.$$

例 19 用多种方法求  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n}$  的值.

解法 1 设  $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} x^n$ ,  $|x| < 1$ , 则

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{x^n}{n-1} - \frac{x^n}{n+1} \right) = \frac{1}{2} [S_1(x) - S_2(x)],$$

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} = x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x \int_0^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} \right) dt \\ &= x \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -x \ln |1-x|, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= \frac{1}{x} \left[ -\ln |1-x| - x - \frac{x^2}{2} \right], \quad x \neq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{从而 } S(x) &= \frac{1}{2}[-x \ln |1-x|] \\
&\quad - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}[-\ln |1-x| - x - \frac{x^2}{2}] \\
&= \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{1-x^2}{2x} \ln |1-x^2|, x \in (-1, 0) \cup (0, 1),
\end{aligned}$$

故令  $x=1/2$ , 即得

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n} = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \ln 2.$$

**解法 2** 设原式  $= \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1}$ , 则

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) x^{n+1}, |x| < 1,$$

$$\begin{aligned}
\text{于是 } S_1(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n-1} = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = x^2 \int_0^x \left( \sum_{n=2}^{\infty} t^{n-2} \right) dt \\
&= x^2 \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -x^2 \ln |1-x|, |x| < 1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \left[ \sum_{n=2}^{\infty} t^n \right] dt = \int_0^x \frac{t^2}{1-t} dt \\
&= -\ln |1-x| - x - x^2/2, |x| < 1.
\end{aligned}$$

$$\text{故 } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n} = S\left(\frac{1}{2}\right) = S_1\left(\frac{1}{2}\right) - S_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \ln 2.$$

**解法 3** 设  $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-1}, |x| < 1, S(0) = 0$ , 则

$$xS(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n-1)},$$

$$[xS(x)]' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1}, \quad \frac{1}{x}[xS(x)]' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} \quad (x \neq 0),$$

$$\text{而 } \left\{ \frac{1}{x}[xS(x)] \right\}' = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1 \text{ 且 } x \neq 0),$$

$$\text{故 } \frac{1}{x}[xS(x)]' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{0+\epsilon}^x \frac{dt}{1-t} = -\ln |1-x|,$$

$$[xS(x)]' = -x \ln |1-x|.$$

$$\begin{aligned} \text{又 } xS(x) &= -\int_0^x t \ln(1-t) dt \\ &= -\frac{x^2}{2} \ln(1-x) + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln(1-x), \\ S(x) &= -\frac{x}{2} \ln(1-x) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2x} \ln(1-x) \\ &\quad (|x| < 1 \text{ 且 } x \neq 0), \end{aligned}$$

$$\text{从而 } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n} = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \ln 2.$$

$$\text{解法 4} \quad \text{令 } S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n-1)2^n}, \quad |x| < 2,$$

$$\text{则 } S' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)2^n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)2^n} = xS_1(x),$$

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \int_0^x \left( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-2}}{2^n} \right) dt = \int_0^x \frac{dt}{2(2-t)} \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(2-x), \quad |x| < 2. \end{aligned}$$

因为  $S(0)=0$ , 故

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x \left[ \frac{t}{2} \ln 2 - \frac{t}{2} \ln(2-t) \right] dt \\ &= \frac{x^2}{4} \ln 2 - \frac{x^2}{4} \ln(2-x) + \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + \ln(2-x) - \ln 2, \end{aligned}$$

$$\text{从而 } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n} = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \ln 2.$$

$$\text{解法 5} \quad \text{因为 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad |x| < 1, \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{5}{8} + \frac{3}{4} \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \ln 2.
\end{aligned}$$

**解法 6** 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ ,  $|x| < 1$ , 所以

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\
&= \frac{1}{4} \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \\
&= \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \ln 2.
\end{aligned}$$

解法 5 与解法 6 直接从  $\ln(1-x)$  的展开式入手, 将所给级数变形后解出结果, 避免了幂级数求和的过程, 因而是以上解法中较简单的.

**例 20** 利用幂级数求下列数项级数之和:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}; & (2) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4(n+1)(n+2)2^n}; \\
(3) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{n-1}}; & (4) \quad & \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n2^n}.
\end{aligned}$$

**解** 一般先设  $S(x)$ , 确定收敛区间; 再求出  $S(x)$ , 确定  $x_0$ , 求得  $S(x_0)$ , 即数项级数之和.

$$(1) \text{ 设 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}, \text{ 因为}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}} x^{2n} \bigg/ \left( \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2} \right) = \frac{1}{2} x^2,$$

所以当  $|x| < \sqrt{2}$  时级数收敛, 当  $x = \pm \sqrt{2}$  时级数发散.

$$\begin{aligned}
\int_0^x S(t) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2n-1}{2^n} t^{2n-2} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2^n} \\
&= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^2}{2} \right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2/2}{1 - x^2/2} = \frac{x}{2 - x^2},
\end{aligned}$$



于是 
$$S(x) = \left( \frac{x}{2-x^2} \right)' = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},$$

从而 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = S(1) = 3.$$

(2) 设  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$ , 则

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

所以 
$$S'(x) = \int_0^x \frac{t}{1-t} dt = -x - \ln(1-x),$$

$$\begin{aligned} S(x) &= - \int_0^x [t + \ln(1-t)] dt, \\ &= - [x^2/2 + x \ln(1-x) - x - \ln(1-x)] \\ &= x + \ln(1-x) - x^2/2 - x \ln(1-x), \end{aligned}$$

从而 
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4(n+1)(n+2)2^n} \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left( \frac{1}{2} \right)^{n+2} = S\left( \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(3) 设  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1}$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} / \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right| = 1,$$

幂级数在  $(-1, 1)$  内收敛.

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2(n-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2},$$

所以 
$$S(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x},$$

$$\begin{aligned} S\left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{2n-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{n-1}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+1/\sqrt{2}}{1-1/\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{从而 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{n-1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} \ln(\sqrt{2}+1).$$

$$(4) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)n2^n} = \sum_{n=3}^{\infty} \left( \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n}, \text{ 设}$$

$$S(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \left( \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) \frac{1}{2} x^n,$$

$$\text{而 } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-2} x^{n+1} = x^3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-2} x^{n-2} = x^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

$$= x^3 \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) dt = x^3 \int_0^x \frac{1}{1-t} dt$$

$$= -x^3 \ln(1-x), \quad |x| < 1,$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n+1} = x \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n - x - \frac{1}{2} x^2 \right)$$

$$= x \left[ -\ln(1-x) - x - \frac{1}{2} x^2 \right].$$

令  $x=1/2$ , 有

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)n2^n} &= \sum_{n=3}^{\infty} \left( \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^n \\ &= \frac{1}{8} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} - \frac{3}{8} \ln 2. \end{aligned}$$

**例 21** 利用幂级数求下列数项级数之和.

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n^2 - n + 1) \frac{1}{2^n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^{n+1}};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{2^{n-1}}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)}{n!} 2^n;$$

$$(5) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}; \quad (6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

**解** (1) 设  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n^2 - n + 1) x^n$ , 则

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n(n-1) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,$$

$$S_1(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n(n-1)x^{n-2}, \quad S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,$$

而  $\int_0^x \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n(n-1)t^{n-2} \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1},$

$$\int_0^x \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n t^{n-1} \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x},$$

故  $S_1(x) = x^2 \left( \frac{1}{1+x} \right)'' = \frac{2x^2}{(1+x)^3}, \quad S_2(x) = \frac{1}{1+x}.$

于是  $S(x) = \frac{2x^2}{(1+x)^3} + \frac{1}{1+x}.$

令  $x=1/2$ , 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n^2 - n + 1) \frac{1}{2^n} = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{22}{27}.$$

(2) 设  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n+1} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$ , 而

$$\int_0^x \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)t^{n-1} \right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n,$$

$$\int_0^x \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)t^n \right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x},$$

所以  $S(x) = x^2 \left[ \frac{x^2}{1-x} \right]'' = \frac{2x^2}{(1-x)^3},$

于是  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} = S\left(\frac{1}{2}\right) = 4.$

(3) 设  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ , 则

$$\int_0^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} n^2 t^{n-1} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1},$$

$$\int_0^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \left( \frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1,$

$$S(x) = \left[ x \frac{1}{(1-x)^2} \right]' = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \quad |x| < 1.$$

从而 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{2^{n-1}} = S\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{27}.$$

(4) 设 
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n+1} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(x-1)!}$$
  

$$= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x^2 e^x.$$

则 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)}{n!} 2^n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)}{n!} 2^{n+1}.$$

设 
$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)}{n!} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n+1}$$
  

$$= S(x) - x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x^2 e^x - x(e^x - 1),$$

则 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)}{n!} 2^n = \frac{1}{2} S_1(2)$$
  

$$= \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot e^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (e^2 - 1) = e^2 + 1.$$

(5) 设 
$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{2n+1} x^{2n+1},$$
 则

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 2^n \cdot x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x^2)^n$$
  

$$= \frac{1}{1+2x^2}, \quad |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以 
$$S(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \sqrt{2} x, \quad |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

于是 
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{2n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$$
  

$$= \sqrt{2} S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

(6) 设  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ , 则

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!^2}{(2n)!} x^{2n},$$

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{x^2}{2}\right) S'(x) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n+2} \\ &= 2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n+2} \\ &= 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{2[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} x^{2n+2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n+2} \right\} \\ &= 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \left[ \frac{2(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} - \frac{1}{2} \right] x^{2n+2} \\ &= 2 + \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1} = 2 + \frac{x}{2} S(x), \end{aligned}$$

得微分方程  $S'(x) - \frac{4}{4-x^2} S(x) = \frac{4}{4-x^2},$

解得  $S(x) = \frac{4}{\sqrt{4-x^2}} \left( \arcsin \frac{x}{2} + c \right).$

当  $S(0)=0$  时, 求得  $c=0$ , 从而

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = S(1) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

**例 22** 设  $a_1 = a_2 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, n = 2, 3, \dots$ . 证明:

在  $|x| < 1/2$  时, 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$  收敛, 并求出和函数.

**证** 由题设知  $a_n > 0$ , 且当  $n \geq 2$  时,  $a_{n+1} > a_n$ . 故当  $|x| < 1/2$  时, 有

$$\frac{|a_{n+1}x^n|}{|a_n x^{n-1}|} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} |x| < \frac{2a_n}{a_n} |x| = 2|x| < 2 \cdot 1/2 = 1.$$

从而幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$  收敛.

$$\begin{aligned}
 S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = 1 + x + \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^{n-1} \\
 &= 1 + x + \sum_{n=3}^{\infty} (a_{n-1} + a_{n-2}) x^{n-1} \\
 &= 1 + x + x \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1} x^{n-2} + x^2 \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2} x^{n-3} \\
 &= 1 + x \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n-1} \right) + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} \\
 &= 1 + xS(x) + x^2 S(x),
 \end{aligned}$$

解得 
$$S(x) = \frac{1}{1-x-x^2}.$$

### 三、其它类型例题

例 23 设  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$  ( $0 \leq x \leq 1$ ), 证明: 当  $0 < x < 1$  时,

有

$$f(x) + f(1-x) + \ln x [\ln(1-x)] = \pi^2/6.$$

证 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/n^2} = 1$ , 所以幂级数收敛半径为 1. 而  $f(1)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$ . 利用逐项微分性质, 有

$$\begin{aligned}
 &[f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x)]' \\
 &= f'(x) - f'(1-x) + \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln x}{x-1} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{n-1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x-1)^{n-1}}{n} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

即  $f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) \equiv c, x \in (0,1)$ .

令  $x \rightarrow 0^+$ , 得  $c = f(1) = \pi^2/6$ , 故

$$f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = \pi^2/6.$$

例 24 证明:  $\forall x, y \in \mathbf{R}$ , 有

$$(1) S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y); (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x} = 1.$$

证  $\forall x, y \in \mathbf{R}$ , 已知

$$S(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \quad C(y) = \frac{1}{0!} - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots,$$

$$\begin{aligned} \text{故 } S(x)C(y) &= x - \left( \frac{x^3}{3!0!} + \frac{xy^2}{2!1!} \right) \\ &\quad + \left( \frac{x^5}{5!0!} + \frac{x^3y^2}{3!2!} + \frac{xy^4}{1!4!} \right) - \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x)S(y) &= y - \left( \frac{y^3}{0!3!} + \frac{yx^2}{1!2!} \right) \\ &\quad + \left( \frac{y^5}{0!5!} + \frac{y^3x^2}{2!3!} + \frac{yx^4}{4!1!} \right) - \dots, \end{aligned}$$

$$S(x)C(y) + C(x)S(y)$$

$$\begin{aligned} &= (x+y) - \left( \frac{x^3}{3!0!} + \frac{xy^2}{2!1!} + \frac{yx^2}{1!2!} + \frac{y^3}{0!3!} \right) \\ &\quad + \left( \frac{x^5}{5!0!} + \frac{x^4y}{4!1!} + \frac{x^3y^2}{3!2!} + \frac{x^2y^3}{2!3!} + \frac{xy^4}{1!4!} + \frac{y^5}{0!5!} \right) \\ &= (x+y) - \frac{1}{3!}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) \\ &\quad + \frac{1}{5!}(x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5) + \dots \end{aligned}$$

$$= (x+y) - \frac{1}{3!}(x+y)^3 + \frac{1}{5!}(x+y)^5 - \dots$$

$$= S(x+y).$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = 1.
\end{aligned}$$

**例 25** 设  $a_n \geq 0$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  发散, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = 0$ ,

证明:  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ .

**证** 因为  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  发散, 所以幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径  $R \leq 1$ ,

依柯西 - 哈达玛判别法, 有  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \geq 1$ .

设  $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ , 因为

$$1 - \frac{A_{n-1}}{A_n} = \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \frac{A_{n-1}}{A_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

所以  $\sqrt[n]{A_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ .

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = 0$  知, 当  $n$  充分大时, 有

$$a_n < a_1 + a_2 + \cdots + a_n = A_n,$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_n} = 1$  即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ .

**例 26** 设数列  $\{a_n\}$  满足  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ , 证明:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|S_n|} = 1.$$

**证** 本例是应用幂级数收敛半径来证明极限的例子.

由柯西收敛性定理, 当  $|x| < 1$  时, 有

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n,$$

$\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$  收敛. 若  $\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$  收敛半径为  $R$ , 则  $R \geq 1$ .



当  $|x| < R$  时,有

$$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

由题设知,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径  $|x| \leq 1$ , 即  $R \leq 1$ . 因此, 必有  $R = 1$ .

**例 27** 证明: 若  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ,  $|x| < r$ , 且  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}$  收敛, 则  $\int_0^r f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}$ .

**证** 因为  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}$  收敛, 所以在  $[0, r]$  上一致收敛. 于是

$$\lim_{x \rightarrow r-0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \lim_{x \rightarrow r-0} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1},$$

$\forall x \in (0, r)$ , 有

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

$$\text{从而 } \int_0^r f(t) dt = \lim_{x \rightarrow r-0} \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}.$$

下面我们来讨论由两个已知收敛半径的幂级数所得到的新幂级数的收敛区间问题.

设有两个幂级数

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots, \quad |x| < r,$$

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots, \quad |t| < r_2,$$

将后式代入前式, 合并同次幂系数所得幂级数称为生成幂级数, 即

$$y(x(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

其中  $c_0 = a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + \cdots$ ,

$$c_1 = a_1 b_1 + 2a_2 b_0 b_1 + 3a_3 b_0^2 b_1 + \cdots,$$

$$c_2 = a_1 b_2 + a_2 (b_1^2 + 2b_0 b_2) + 3a_3 (b_0 b_1^2 + b_0^2 b_1) + \cdots,$$

.....

**例 28** 设由两个幂级数

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots, \quad |x| < r_1,$$

$$x(t) = b_1 + b_2t + b_3t^3 + \cdots, \quad |t| < r_2$$

的生成幂级数为

$$y(x(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^k \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

其中  $c_0 = a_0, c_1 = a_1 b_1, c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1^2, \cdots$ . 证明: 生成幂级数至少在  $(-r, r)$  内收敛, 其中

$$r = \frac{r_1(r_2 - \delta)}{M + r_1}.$$

其中,  $0 < \delta < r_2, M$  对一切取定的  $\delta$  满足:  $\forall m \in \mathbb{N}$ , 有

$$|b_m(r_2 - \delta)^m| \leq M.$$

**证** 考查级数

$$Y = |a_0| + |a_1|x + |a_2|x^2 + \cdots,$$

$$X = |b_1|t + |b_2|t^2 + |b_3|t^3 + \cdots,$$

依阿贝尔定理, 级数  $X$  与  $Y$  分别在  $(-r_1, r_1)$  和  $(-r_2, r_2)$  内收敛,

而  $|b_m| < \frac{M}{(r_2 - \delta)^m}$ , 故当  $|t| < r_2 - \delta$  时, 有

$$\begin{aligned} |X| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| |t|^n \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{|t|}{r_2 - \delta} \right)^n \\ &= M \left[ \frac{1}{1 - |t|/(r_2 - \delta)} - 1 \right] = \frac{M|t|}{r_2 - \delta - |t|}. \end{aligned}$$

于是, 当  $\frac{M|t|}{r_2 - \delta - |t|} < r$  时,  $|t| < \frac{r_1(r_2 - \delta)}{M + r_1} = r < r_2$ , 从而级数  $X$  收敛. 又  $|X| < r_1$ , 所以代入后  $Y$  也收敛. 说明对符合式子的  $t, x(t)$  收敛, 得  $y(x)$  也收敛. 由于是绝对收敛, 故生成幂级数 (交换项次序后的级数) 收敛于同一和, 因此至少在区间  $(-r, r)$  内收敛.

**例 29** 设有幂级数  $y(x) = 1 + b_1x + b_2x^2 + \cdots, |x| < r$ , 证明: 当  $|x| < r_1 = \frac{r - \delta}{M + 1}$  时, 幂级数  $\frac{1}{y(x)}$  收敛. 其中  $0 < \delta < r, M$  为使一

切  $m$  有  $|b_m(r-\delta)^m| \leq M$  的数.

证  $1/y(x)$  是商级数的特例. 设

$$h(x) = b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots,$$

显然,  $h(x)$  与  $y(x)$  有相同的收敛域. 当  $|h| < 1$  时, 有

$$\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{1+h(x)} = 1 - h + h^2 - h^3 + \dots,$$

其收敛半径为 1. 当将  $h(x)$  代入  $1/y(x)$  时,  $1/y(x)$  是生成幂级数.

依上例,  $r_1 = \frac{1 \cdot (r-\delta)}{M+1} = \frac{r-\delta}{M+1}$ , 故在  $(-r_1, r)$  内, 幂级数  $1/y(x)$  收敛.

## 第四节 函数展开成幂级数

### 主要内容

1. 若函数  $f$  在点  $x_0$  的某邻域内存在直至  $n+1$  阶的连续导数, 则形如

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \\ & + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \end{aligned}$$

的等式称为  $f$  在  $x_0$  的泰勒公式, 而级数

$$\begin{aligned} & f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \\ & + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \end{aligned}$$

称为  $f$  在  $x_0$  的泰勒级数.

2. 当  $x_0=0$  时, 形如

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

的级数称为  $f$  的麦克劳林(Maclaurin)级数.

3. 当  $x_0=0$  时的积分型余项为

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt;$$

拉格朗日型余项为

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) x^{n+1}, \xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间};$$

柯西型余项为

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\theta x) (1-\theta)^n x^{n+1}, 0 \leq \theta \leq 1.$$

4. 设  $f$  在点  $x_0$  具有任意阶导数, 则函数  $f$  在区间  $(x_0-r, x_0+r)$  内等于其泰勒级数的和函数的充分条件是: 对一切满足不等式  $|x-x_0|<r$  的  $x$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

5. 常用的基本展开式有

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, -\infty < x < +\infty.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \\ -\infty < x < +\infty.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \\ -\infty < x < +\infty.$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots, \quad -1 < x < 1.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, \quad -1 < x \leq 1.$$

## 疑难解析

### 1. 将函数展开成幂级数的方法有哪些?

答 (1) 直接展开法 依据定义求出函数  $f$  的各阶导数, 并研究其余项的敛散性, 然后写出函数的泰勒(或麦克劳林)展开式.

但是, 由于余项敛散性的确定比较困难, 此法一般很少使用.

(2) 间接展开法 由某些已知的函数的幂级数展开式, 利用四则运算、变量代换、逐项求积、逐项求导等方法求得所求函数的展开式.

一般常用  $\frac{1}{1 \pm x}$  和五个基本展开式. 其优点是比较简捷, 收敛半径易于确定, 不必讨论余项的敛散性. 但在利用  $\frac{1}{1 \pm x}$  来展开形如  $\frac{1}{a \pm f(x)}$  的函数展开式时, 要认真讨论收敛区间.

(3) 待定系数法 将待求函数写成幂级数形式, 利用两个幂级数相等时其同次幂系数相同的性质, 通过比较确定待求幂级数的系数, 从而求得函数展开式.

待定系数法常用于有关乘法和除法的公式的导出, 过程比较繁琐.

## 方法、技巧与典型例题分析

怎样将一个函数展开成幂级数, 我们已在疑难解析中作了回答, 只要灵活运用合理的方法, 不难求得函数的幂级数展开式.

### 例 1 几何级数

$$G(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

在  $|x| < 1$  时绝对收敛且一致收敛于和函数. 证明: 当  $|x| <$

$\frac{2}{1+\sqrt{5}}$  时, 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ G\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right) - G\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right) \right] \\ &= a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots, \end{aligned}$$

其中  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  是斐波那契 (Fibonacci) 数列.

证 因为, 当  $|x| < \frac{2}{1+\sqrt{5}}$  时, 有

$$\left| \frac{1+\sqrt{5}}{2}x \right| < 1, \quad \left| \frac{1-\sqrt{5}}{2}x \right| < 1,$$

所以,  $G\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)$  与  $G\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)$  一致收敛且绝对收敛, 从而

$$\begin{aligned} & G\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right) - G\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right) \\ &= \left[ 1 / \left( 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x \right) - 1 / \left( 1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x \right) \right] \\ &= \left[ 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 x^2 + \cdots + \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n x^n + \cdots \right] \\ &\quad - \left[ 1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 x^2 + \cdots + \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n x^n + \cdots \right] \\ &= \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) x + \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right] x^2 + \cdots \\ &\quad + \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] x^n + \cdots, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ G\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right) - G\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right) \right] \\ &= a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots. \end{aligned}$$

因为  $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ , 所以  $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$  是斐波那契数列 (证明见上册).

此结果还表明, 当  $|x| < \frac{2}{1+\sqrt{5}}$  时, 有

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left[ G\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right) - G\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right) \right] = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

**例 2** 证明: 积分正弦函数

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt &= x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - \frac{x^7}{7!7} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}. \end{aligned}$$

证 因为, 在  $(-\infty, +\infty)$  内有

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots,$$

而当  $x \neq 0$  时  $\left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right)$ , 有

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots,$$

故上述幂级数在任一有限区间上一致收敛, 得

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}. \end{aligned}$$

**例 3** 求下列函数的麦克劳林级数:

$$(1) \frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}; \quad (2) \sin^3 x;$$

$$(3) xe^{-x^2}; \quad (4) \frac{x}{1+x-2x^2}.$$

**解** 本例中的函数均可直接或略加变化后利用基本展开式展开为幂级数.

$$\begin{aligned} (1) & \frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)} \\ &= \frac{1-x}{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1-x}{1-x^8} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{8n} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{1+8n} \\
&= 1 - x + x^8 - x^9 + \cdots + x^{8n} - x^{1+8n} + \cdots, |x| < 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \sin^3 x &= \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x \\
&= \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1-3^{2n})}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (-\infty, +\infty).
\end{aligned}$$

$$(3) xe^{-x^2} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!} \quad (-\infty, +\infty).$$

$$\begin{aligned}
(4) \frac{x}{1+x-2x^2} &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+2x} \right) \\
&= \frac{1}{3} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x)^n \right] \\
&= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} [1 - (-1)^n 2^n] x^n, |x| < \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

例4 求下列函数的幂级数展开式:

$$(1) \arcsin x; \quad (2) \arctan \frac{2x}{1-x^2};$$

$$(3) \frac{d}{dx} \left( \frac{\cos x - 1}{x} \right); \quad (4) x \arctan x - \ln \sqrt{1-x^2}.$$

解 本例可用逐项求积与逐项求导的方法求解.

$$\begin{aligned}
(1) \arcsin x &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^x (1-t^2)^{-1/2} dt \\
&= \int_0^x \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1/2(-3/2)\cdots(-1/2-n+1)}{n!} (-1)^n t^n \right] dt \\
&= \int_0^x \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2^n} [1 \cdot 3 \cdots (2n-1)] t^{2n} \right\} dt \\
&= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n! (2n+1)} x^{2n+1}, |x| < 1.
\end{aligned}$$

$$(2) \arctan \frac{2x}{1-x^2} = \int_0^x \left( \arctan \frac{2t}{1-t^2} \right)' dt$$



$$= \int_0^x \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int_0^x \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right] dt$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, |x| < 1.$$

$$(3) \frac{\cos x - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} \quad (-\infty, +\infty).$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\cos x - 1}{x} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{(2n)!} x^{2n-2}.$$

$$(4) x \arctan x - \ln \sqrt{1-x^2} = \int_0^x [t \arctan t - \ln \sqrt{1-t^2}]' dt$$

$$= \int_0^x \arctan t dt = \int_0^x \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{2n-1} \right] dt$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^6}{5 \cdot 6} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n-1)2n} + \cdots.$$

例 5 求下列函数的幂级数展开式:

$$(1) \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}; \quad (2) \frac{x \sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}.$$

解 本例可用待定系数法求解.

$$(1) \text{ 设 } y = \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \text{ 因为}$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2} \left[ 1 - x \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} \right],$$

$$\text{所以 } (1+x^2)y' = 1 - xy$$

$$\Rightarrow (1+x^2) \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = 1 - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

$$\text{即 } a_1 + 2a_2 x + \sum_{n=2}^{\infty} [a_{n+2}(n+1) + a_{n-1}(n-1)] x^n$$

$$= 1 - a_0 x - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n.$$

比较系数,得

$$a_0 = 1, 2a_2 = -a_0, 3a_3 + a_1 = -a_1, 4a_4 + 2a_2 = -a_2, \cdots.$$

由  $y(0)=0 \Rightarrow a_0=0$  得

$$a_{2n}=0, a_1=1, a_3=-\frac{2}{3}, a_5=\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}, \dots,$$

$$a_{2n+1}=(-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \dots,$$

从而  $y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1}, -1 < x \leq 1.$

(2) 设  $y = \frac{x \sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 则

$$\begin{aligned} x \sin \alpha &= (1 - 2x \cos \alpha + x^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \\ &\quad - (2a_0 \cos \alpha)x - (2a_1 \cos \alpha)x^2 - (2a_2 \cos \alpha)x^3 + \dots \\ &\quad + a_0 x^2 + a_1 x^3 + \dots. \end{aligned}$$

比较等式两边同次幂系数, 得

$$a_0=0, a_1=\sin \alpha, a_2=\sin 2\alpha, \dots, a_n=\sin n\alpha, \dots,$$

这里利用了三角恒等式

$$\sin(n+1)\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha - \sin(n-1)\alpha, n=2, 3, \dots.$$

所以  $\frac{x \sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}$

$$= x \sin \alpha + x^2 \sin 2\alpha + \dots + x^n \sin n\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin n\alpha.$$

**例 6** 求下列函数的幂级数展开式:

(1)  $\ln^2(1-x)$ ; (2)  $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ ; (3)  $e^x \sin x$ ;

(4)  $e^{x \cos \alpha} \cos(x \sin \alpha)$ ; (5)  $\ln(1+x+x^2+x^3)$ .

**解** 本例可利用幂级数的运算求解.

(1) 因为  $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, -1 < x < 1$ , 所以

$$\ln^2(1-x) = \left( -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots \right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1} \right] x^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(n+1-k)} \right] x^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{k + (n+1-k)}{k(n+1-k)} \right] x^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left[ \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{n+1-k} + \frac{1}{k} \right) \right] x^{n+1} \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) x^{n+1} \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 \leq x < 1.
\end{aligned}$$

(2) 因为  $\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n(2n+1)} x^{2n+1}, |x| < 1,$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \cdots, \quad |x| < 1,$$

所以  $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\begin{aligned}
&= x + \left( \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2} \right) x^3 \\
&\quad + \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right) x^5 + \cdots \\
&= x + \frac{2}{1 \cdot 3} x^3 + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} x^5 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} x^7 + \cdots \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} x^{2n-1}, \quad |x| < 1.
\end{aligned}$$

(3) 因为  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{1}{n!} \sin \frac{n\pi}{2},$  故

$$e^x \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sin \frac{n\pi}{2} x^n$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin(n\pi/2)}{0!n!} + \frac{\sin[(n-1)\pi/2]}{1!(n-1)!} \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \frac{\sin(\pi/2)}{(n-1)!1!} \right\} x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin[(n-k)\pi/2]}{k!(n-k)!} \right\} x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} \sin \frac{(n-k)\pi}{2} \right] \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \sin \frac{(n-k)\pi}{2} \right] \frac{x^n}{n!}.
\end{aligned}$$

而由三角公式与棣莫弗公式,有

$$\begin{aligned}
\left[ 1 + \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \right]^n &= \left( 2 \cos^2 \frac{\pi}{4} + 2i \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \right)^n \\
&= 2^{n/2} \left( \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right),
\end{aligned}$$

又由二项式公式与棣莫弗公式,有

$$\begin{aligned}
&\left[ 1 + \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \right]^n \\
&= C_n^0 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)^n + \cdots + C_n^{n-2} \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)^2 \\
&\quad + C_n^{n-1} \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)^2 + C_n^n.
\end{aligned}$$

比较两式的虚部,可得

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \sin \frac{(n-k)\pi}{2} = 2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

从而 
$$e^x \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4} \cdot \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty, +\infty).$$

(4) 由于  $e^{x \cos \alpha} \cos(x \sin \alpha)$  是复数

$$e^{xe^{i\alpha}} = e^{x(\cos \alpha + i \sin \alpha)} = e^{x \cos \alpha + i x \sin \alpha}$$

的实部,故有

$$e^{xe^{i\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (e^{xe^{i\alpha}})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} e^{ina} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (\cos na + i \sin na).$$

比较上式两边的实部,即知

$$e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n!} x^n \quad (-\infty, +\infty).$$

同时可得

$$e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n!} x^n \quad (-\infty, +\infty).$$

$$(5) \ln(1+x+x^2+x^3) = \ln(1+x) + \ln(1+x^2),$$

因为  $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1,$

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

故  $\ln(1+x+x^2+x^3)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^m}{m} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{[m/2]-1} [1 + (-1)^m] \frac{x^m}{m} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} + (-1)^{[m/2]-1} [1 + (-1)^m]}{m} x^m. \end{aligned}$$

例7 求  $\sec x, \tan x$  和  $\frac{x}{e^x - 1}$  的麦克劳林级数.

解 (1)  $\sec x$  是偶函数,幂级数只含偶次项,即

$$\sec x = E_0 + \frac{E_1}{2!}x^2 + \frac{E_2}{4!}x^4 + \cdots + \frac{E_n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots.$$

由于  $\sec x \cos x = 1$  和  $\cos x$  的展开式

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$

故  $\left(E_0 + \frac{E_1}{2!}x^2 + \frac{E_2}{4!}x^4 + \cdots\right) \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) = 1.$

由  $E_0 = 1, \frac{E_1}{2!} - \frac{E_0}{2!} = 0, \frac{E_0}{2!} - \frac{E_1}{2! \cdot 2!} + \frac{E_2}{4!} = 0, \cdots,$

解得

$$E_0 = 1, E_1 = 1, E_2 = 5, E_3 = 61, E_4 = 1385, E_5 = 50521, \cdots.$$

系数  $E_j$  称为欧拉系数.

(2)  $\tan x$  是奇函数, 幂级数只含奇次项, 即

$$\tan x = T_1 x + \frac{T_2}{3!} x^3 + \frac{T_3}{5!} x^5 + \cdots + \frac{T_n}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \cdots.$$

由于  $\tan x = \sin x \sec x$ , 故

$$\begin{aligned} & \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \right) \left( E_0 + \frac{E_1}{2!} x^2 + \frac{E_2}{4!} x^4 + \cdots \right) \\ &= T_1 x + \frac{T_2}{3!} x^3 + \frac{T_3}{5!} x^5 + \cdots. \end{aligned}$$

$$\text{由 } T_1 = E_0, T_2 = 3! \left( \frac{E_1}{2!} - \frac{E_0}{3!} \right), T_3 = 5! \left( \frac{E_2}{4!} - \frac{E_1}{2!3!} + \frac{E_0}{5!} \right), \cdots,$$

$$\text{解得 } T_1 = 1, T_2 = 2, T_3 = 16, T_4 = 272, \cdots.$$

系数  $T_i$  称为正切系数.

(3) 因为  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ , 则

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}.$$

$$\text{设 } \frac{x}{e^x - 1} = \beta_0 + \frac{\beta_1}{1!} x + \frac{\beta_2}{2!} x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} x^n,$$

$$\text{则 } \left( 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots \right) \left( \beta_0 + \frac{\beta_1}{1!} x + \frac{\beta_2}{2!} x^2 + \cdots \right) = 1.$$

比较同次幂系数, 得

$$\beta_0 = 1, \beta_1 = -\frac{1}{2}, \beta_2 = \frac{1}{6}, \beta_3 = 0, \beta_4 = -\frac{1}{30}, \cdots.$$

当  $n \geq 1$  时,  $\beta_{2n+1} = 0$ .

$B_n = (-1)^{n+1} \beta_{2n}$  称为伯努利 (Bernoulli) 数, 有

$$B_1 = \frac{1}{6}, B_2 = \frac{1}{30}, B_3 = \frac{1}{42}, B_4 = \frac{1}{30}, B_5 = \frac{5}{66}, \cdots.$$

**例 8** 将下列函数在指定点展开为泰勒级数:

$$(1) \frac{1}{x^2 + 4x + 3}, x_0 = 1; \quad (2) \ln \frac{1}{x^2 + 2x + 2}, x_0 = -1;$$

$$(3) \ln \frac{x}{1+x}, x_0=1; \quad (4) \frac{1}{x}, x_0=2.$$

解 展开  $f(x)$  的幂级数时, 首先要将  $f(x)$  变形, 使之出现  $(x-x_0)$  的因式. 一般利用已知展开式展开, 特别要注意对收敛区间的讨论.

$$\begin{aligned} (1) \frac{1}{x^2+4x+3} &= \frac{1}{(x+3)(x+1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+(x-1)/2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+(x-1)/4} \right] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{x-1}{2} \right)^n - \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{x-1}{4} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{n+3}} \right) (x-1)^n, \end{aligned}$$

由  $\left| \frac{x-1}{2} \right| < 1$  和  $\left| \frac{x-1}{4} \right| < 1$  得, 收敛区间为  $(-1, 3)$ .

$$(2) \ln \frac{1}{x^2+2x+3} = -\ln[1+(x+1)^2] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x+1)^{2n},$$

由  $-1 < (x+1)^2 \leq 1$  得, 收敛区间为  $(-2, 0]$ .

$$\begin{aligned} (3) \ln \frac{x}{1+x} &= \ln x - \ln(1+x) \\ &= \ln[1+(x-1)] - \ln[2+(x-1)], \end{aligned}$$

$$\text{因为 } \ln[1+(x-1)] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}, \quad 0 < x < 2,$$

$$\ln[2+(x-1)] = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n2^n}, \quad -1 < x \leq 3.$$

$$\text{故 } \ln \frac{x}{1+x} = -\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) (x-1)^n.$$

由  $0 < x \leq 2$  和  $-1 < x \leq 3$  得, 收敛区间为  $(0, 2]$ .

$$\begin{aligned} (4) \frac{1}{x} &= \frac{1}{2+(x-2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+(x-2)/2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{x-2}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

由  $|x-2| < 2$  得, 收敛区间为  $(0, 4)$ .

**例 9** 将下列函数在指定点展开为泰勒级数:

$$(1) \cos x, x_0 = \pi/4; \quad (2) \cos(2x + \pi/4), x_0 = 0;$$

$$(3) \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x, x_0 = 0.$$

**解** 解法同上例.

$$\begin{aligned} (1) \cos x &= \cos[\pi/4 + (x - \pi/4)] \\ &= \cos(\pi/4)\cos(x - \pi/4) - \sin(\pi/4)\sin(x - \pi/4) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x - \pi/4)^{2n}}{(2n)!} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x - \pi/4)^{2n-1}}{(2n-1)!!} \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n(n+1)/2} \frac{1}{n!} \left( x - \frac{\pi}{4} \right)^n \quad (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \cos(2x + \pi/4) &= \cos(\pi/4)\cos 2x - \sin(\pi/4)\sin 2x \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!!} \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n(n+1)/2} \frac{2^n x^n}{n!} \quad (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x &= \frac{1}{4} \ln(1+x) - \frac{1}{4} \ln(1-x) + \frac{1}{2} \arctan x - x \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} - x \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{1}{2} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt - x \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n+1} - x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} x^{4n+1} \quad (-1, 1). \end{aligned}$$



**例 10** 将函数  $f(x) = \ln x$  按分式  $\frac{x-1}{x+1}$  的正整数幂展开成幂级数.

**解** 当  $x \neq -1$  时,  $\ln x = \ln \left[ \left( 1 + \frac{x-1}{x+1} \right) / \left( 1 - \frac{x-1}{x+1} \right) \right]$ . 因为

$$\ln \frac{1+u}{1-u} = 2 \left( u + \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + \cdots \right), \quad |u| < 1,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \ln x &= 2 \left[ \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \cdots \right] \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{2n+1}. \end{aligned}$$

由  $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| < 1$  得, 收敛区间为  $(0, +\infty)$ .

**例 11** 将函数  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$  按分式  $\frac{x}{1+x}$  的正整数幂展开成幂级数.

$$\begin{aligned} \text{解 } f(x) &= \frac{x}{1+x} \sqrt{1+x} = \frac{x}{1+x} \cdot 1 / \sqrt{1-x/(1+x)} \\ &= \frac{x}{1+x} \left( 1 - \frac{x}{1+x} \right)^{-1/2} \quad (\text{用 } (1+x)^a \text{ 的展开式}) \\ &= \frac{x}{1+x} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left( \frac{x}{1+x} \right)^n \right] \\ &= \frac{x}{1+x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left( \frac{x}{1+x} \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

由  $\left| \frac{x}{1+x} \right| < 1$  知,  $x > -1/2$ , 而  $x = -1/2$  时, 级数条件收敛, 故级数的收敛区间为  $[-1/2, +\infty)$ .

幂级数常用来求极限, 计算积分, 证明不等式或等式, 作近似计算等, 以下通过例题来讨论幂级数的应用问题.

**例 12** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \cdots + \frac{n}{a^n} \right)$ ,  $a > 1$ .

$$\text{解 设 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \quad |x| < 1.$$

$$S(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x \left( \frac{x}{1-x} \right)'$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

因为  $a > 1$ , 所以  $1/a < 1$ , 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n} = S\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{a}{(1-a)^2}, \quad a > 1.$$

即 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{a} + \frac{2}{a} + \cdots + \frac{n}{a^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{(1-a)^2}.$$

**例 13** 利用函数的幂级数展开求下列极限:

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n[\ln(n+1) - \ln n];$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x};$

(3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right].$

**解** (1) 先求  $\lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(x+1) - \ln x].$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(x+1) - \ln x] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^3} - \cdots \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^2} - \cdots \right) = 1, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[\ln(n+1) - \ln n] = 1.$$

(2)  $\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n! (2n+1)} x^{2n+1}$  (见例 4(1)),

$$\sin^3 x = \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1-3^{2n})}{(2n+1)!} x^{2n+1} \text{ (见例 3(2)).}$$

代入  $\frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}$ , 即得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n! (2n+1)} x^{2n+1}}{\frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1-3^{2n})}{(2n+1)!} x^{2n+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\left(\frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \dots\right)}{\frac{3}{4} \left[\frac{-1 \cdot (-8)}{3!} x^3 + \dots\right]} = -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{x} \right)^n \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - x + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} + \dots \right] = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

**例 14** 讨论  $c$  为何值时, 以下不等式成立.

$$e^x + e^{-x} \leq 2e^{cx^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

**解** 因为由  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  可得

$$e^x + e^{-x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} = 2e^{x^2/2},$$

所以, 当  $c \geq 1/2$  时, 有  $e^x + e^{-x} \leq 2e^{cx^2}$ .

反之, 因为

$$\begin{aligned}0 &\leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{cx^2} - (e^x + e^{-x})}{2x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 + cx^2 + \dots) - 2(1 + x^2/2 + \dots)}{2x^2} = c - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

故, 当且仅当  $c \geq 1/2$  时,  $e^x + e^{-x} \leq 2e^{cx^2}$  成立.

**例 15** 证明: 对每一正整数  $k$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$  是  $e$  的整数倍.

**证** 设  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!} x^n$ , 则所求为  $f(1)$ .

因为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!} x^n$  在  $(-\infty, +\infty)$  内收敛, 可逐项积分, 故

$$f(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!} x^{n-1} = x f_1(x),$$

$$\int_0^x f_1(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{n!} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{n!} x^{n-1} = x f_2(x),$$

.....

$$\int_0^x f_{k-1}(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} = x f_k(x),$$

而 
$$\int_0^x f_k(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1,$$

于是 
$$f(x) = \underbrace{x(\cdots(x(x(e^x - 1)')')')'\cdots)'}_{k \text{ 次}},$$

即  $f(x) = P_k(x)e^x$ ,  $P_k(x)$  是  $x$  的整系数多项式. 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!} = f(1) = P_k(1) \cdot e.$$

这里,  $P_k(1)$  是整数.

**例 16** 已知当  $\alpha > 1$  时, 
$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(\alpha - x) \sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}},$$

证明: 
$$\int_{-1}^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \frac{(2n - 1)!!}{2n!!} \pi, \quad n = 1, 2, \dots.$$

**证** 将已知等式两边按  $1/\alpha$  的幂次展开, 有

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{(\alpha - x) \sqrt{1 - x^2}} &= \frac{1}{\alpha} \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1 - x/\alpha) \sqrt{1 - x^2}} \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^n \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^n} \int_{-1}^1 \frac{x^n}{\sqrt{1 - x^2}} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{2n+1}} \int_{-1}^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1 - x^2}} dx \quad (\text{奇函数积分为零}). \end{aligned}$$

这里,  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^n \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$  关于  $x$  在  $(-1, 1)$  内闭一致收敛, 故

$\forall [a, b] \subset (-1, 1)$ , 级数在  $[a, b]$  上可逐项积分. 其中  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^n}$  收

敛,  $\left| \int_a^b \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx \right| \leq \pi$  (有界), 依阿贝尔判别法, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^n} \int_a^b \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$  关于  $a, b \in [-1, 1]$  一致收敛. 取极限, 即知等式合理.

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} &= \frac{\pi}{\alpha} \left( 1 - \frac{1}{\alpha^2} \right)^{-1/2} = \frac{\pi}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{1}{\alpha^{2n}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}. \end{aligned}$$

比较两式同次幂系数, 即得

$$\int_{-1}^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \pi \quad (n = 1, 2, \dots).$$

**例 17** 计算积分  $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$ .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx &= \int_0^1 \frac{1-x^2+x^2}{1-x^2} \ln x dx \\ &= \int_0^1 \ln x dx + \int_0^1 \frac{x^2}{1-x^2} \ln x dx \\ &= -1 + \int_0^1 \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \ln x \right) dx. \end{aligned}$$

因为  $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \ln x$  虽然在  $[0, 1]$  上不一致收敛, 但在  $[0, 1]$  上可逐项积

分. 事实上, 在  $(0, 1)$  内,  $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \ln x$  为等比级数, 有

$$S(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1-x^2} \ln x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

故  $S(1-0) \neq S(0)$ , 级数不一致收敛. 而

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^{2k} \ln x = \frac{x^2}{1-x^2} \ln x \cdot x^{2n},$$

$\frac{x^2 \ln x}{1-x^2}$  在  $(0, 1)$  内有界, 即  $|R_n(x)| \leq Mx^{2n}$ , 从而

$$\left| \int_0^1 R_n(x) dx \right| \leq \int_0^1 |R_n(x)| dx \leq M \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{M}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 R_n(x) dx = 0$ .

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx &= -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x^{2n} \ln x dx \\ &= -1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \\ &= -\left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} \right] + \frac{1}{2^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{24} = -\frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

**例 18** 计算积分  $\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} dx$ .

**解**  $\ln \frac{1}{1-x} = -\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots, |x| < 1,$

级数在  $|x| \leq r$  ( $r < 1$ ) 上一致收敛, 故可以逐项积分. 当  $x < 1$  时, 有

$$\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} dx = \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \dots,$$

而当  $x=1$  时, 有

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \dots \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots = 1. \end{aligned}$$

依阿贝尔定理, 有

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \int_0^x \ln \frac{1}{1-x} dx = \lim_{x \rightarrow 1-0} \left[ \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \cdots \right] = 1,$$

即 
$$\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} dx = 1.$$

**例 19** 证明: 
$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx dx = \frac{\pi}{n!}.$$

**证** 
$$e^{e^{ix}} = e^{\cos x + i \sin x} = e^{\cos x} [\cos(\sin x) + i \sin(\sin x)],$$

故 
$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx dx$$

$$= \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} e^{e^{ix}} \cos nx dx = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \cos nx \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k!} \right) dx.$$

而级数  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k!}$  在  $[0, 2\pi]$  上一致收敛, 于是

$$\operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \cos nx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k!} dx = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^{2\pi} e^{ikx} \cos nx dx$$

$$= \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^{2\pi} \cos nx (\cos kx + i \sin kx) dx.$$

由三角函数系的正交性, 因为

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos kx dx = \begin{cases} \pi & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \sin kx dx = 0,$$

所以 
$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx dx = \frac{\pi}{n!}.$$

## 第九章 傅里叶级数

### 第一节 傅里叶级数展开式

#### 主要内容

1. 若函数  $f(x), g(x)$  在区间  $[a, b]$  上可积, 且

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0,$$

则称函数  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $[a, b]$  上正交.

具有正交性的函数系称为正交函数系.

三角函数系

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$   
在  $[-\pi, \pi]$  上正交, 称为三角函数正交系.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0.$$

而 
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi.$$

2. 由三角函数系所产生的形如

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$



的级数称为三角级数.

若级数  $\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$  收敛, 则三角级数在整个数轴上绝对收敛且一致收敛.

3. 设函数  $f(x)$  以  $2\pi$  为周期, 在  $[-\pi, \pi]$  上可积, 且在  $[-\pi, \pi]$  上对应一个三角级数, 即

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

则 
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

其中  $a_n, b_n$  称为  $f(x)$  的傅里叶系数, 级数称为  $f(x)$  的傅里叶级数.

4. 狄利克雷定理 若以  $2\pi$  为周期的函数  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  上分段光滑, 则在每一个点  $x \in [-\pi, \pi]$ ,  $f$  的傅里叶级数收敛于  $f$  在点  $x$  的左、右极限的算术平均值, 即

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

该定理也可写成: 若函数  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  上分段单调, 且除有限个间断点外连续, 则其傅里叶级数在区间  $[-\pi, \pi]$  上收敛, 其和函数为

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 是 } f \text{ 的连续点,} \\ \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, & x \text{ 是 } f \text{ 的间断点,} \\ \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}, & x = \pm \pi. \end{cases}$$

## 疑难解析

### 1. 怎样对函数进行傅里叶级数展开?

答 首先考虑函数的定义区间和是否满足收敛定理的条件.

(1) 如果  $f(x)$  是定义在  $(-\infty, +\infty)$  内以  $2\pi$  为周期的函数, 且满足收敛定理条件, 则可直接依定理写出傅里叶级数并确定和函数.

(2) 若函数  $f(x)$  定义在区间  $[-\pi, \pi]$  或  $[0, 2\pi]$  上, 则应理解为  $f(x)$  是定义在整个数轴上以  $2\pi$  为周期的函数. 即对  $[-\pi, \pi]$  以外部分按函数在  $(-\pi, \pi]$  上的对应关系作周期延拓 (不必写出). 例如,  $f(x)$  为定义在  $(-\pi, \pi]$  上的函数, 则经周期延拓后的函数是

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & -\pi < x \leq \pi, \\ f(x - 2k\pi), & (2k - 1)\pi < x \leq (2k + 1)\pi. \end{cases}$$

这个过程在解题时不必写出, 然后按收敛定理写出傅里叶级数并确定和函数.

(3) 若  $f(x)$  是定义在  $(-\pi, \pi]$  上的奇函数 (或偶函数), 则  $a_n = 0$  (或  $b_n = 0$ ), 在连续点上

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad \left( \text{或 } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \right).$$

若  $f(x)$  只定义在  $(0, \pi]$  上, 则可先作奇延拓 (或偶延拓) 即延拓为  $(-\pi, \pi]$  上的奇函数 (或延拓为  $(-\pi, \pi]$  上的偶函数), 然后再展开成傅里叶正弦级数 (或余弦级数).

## 2. 傅里叶级数的实质是否在于积分区间?

答 傅里叶级数的实质不在于积分区间, 而在于所选的函数系是三角函数正交系. 当改变积分区间时, 只要选择不同的三角函数正交系就行. 在区间  $[a, b]$  上要得到  $f(x)$  的傅里叶级数, 就要取规范正交函数系, 如

$$\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{2\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots,$$

$$l = \frac{1}{2}(b - a).$$

此时, 相应地有

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

其中  $a_0 = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) dx$ ,  $a_n = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$ ,

$$b_n = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

## 方法、技巧与典型例题分析

函数的傅里叶级数一般按疑难解析 1 中所述方法即可求出. 但在计算傅里叶系数时, 要特别注意积分的技巧和对下标  $n$  的讨论, 有时还要讨论傅里叶级和函数的连续性与级数在区间上的收敛或一致收敛性, 讨论中可用到函数项级数的性质与判别法.

例 1 设  $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

(1) 求  $f(x)$  的傅里叶级数;

(2) 级数是否收敛? 是否收敛于  $f(x)$ ?

(3) 级数在  $(-\pi, \pi)$  内是否一致收敛?

解 (1) 由傅里叶系数公式, 得

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi \Big|_0^{\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{-1}{n\pi} \cos n\pi \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2m, \\ \frac{2}{(2m+1)\pi}, & n = 2m+1, \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

所以  $f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} \sin(2n+1)x.$

(2)  $f(x)$  满足收敛定理条件, 所以  $f(x)$  的傅里叶级数在数轴上处处收敛. 在  $[-\pi, \pi]$  上

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} \sin(2n+1)\pi \\ &= \begin{cases} f(x), & x \in [-\pi, 0] \cup (0, \pi], \\ 1/2, & x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

(3) 因为  $f(x)$  的傅里叶级数的和函数在  $(-\pi, \pi)$  内不连续, 所以级数在  $(-\pi, \pi)$  内不一致收敛.

**例 2** 设  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的可积函数, 在  $[-\pi, \pi]$  上的傅里叶级数为  $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ , 证明: 平移后的函数  $f(x+h)$  的傅里叶级数为

$$f(x) \sim \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n \cos nx + \tilde{b}_n \sin nx).$$

其中  $\tilde{a}_n = a_n \cos nh + b_n \sin nh, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$   
 $\tilde{b}_n = b_n \cos nh - a_n \sin nh, \quad n = 1, 2, \dots.$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \tilde{a}_n &= \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+h) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t) [\cos nt + \cos nh + \sin nt \sin nh] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \cos nh \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt + \sin nh \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt \right] \\ &= a_n \cos nh + b_n \sin nh, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

类似可得  $\tilde{b}_n = b_n \cos nh - a_n \sin nh, \quad n = 1, 2, \dots.$

**例 3** 设  $f(x), g(x)$  均为可积函数. 证明: 若  $f(-x) = g(x)$ , 且  $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ , 则

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx - b_n \sin nx).$$

**证** 因为, 对  $g(x)$ , 有

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 g(x) \cos nx dx + \int_0^{\pi} g(x) \cos nx dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} g(-t) \cos ntdt + \int_{-\pi}^0 g(t) \cos ntdt \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx = a_n, \\
&\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 g(x) \sin nx dx + \int_0^{\pi} g(x) \sin nx dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{\pi}^0 g(-t) \sin ntdt + \int_0^{-\pi} g(-t) \sin ntdt \right] \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = -b_n,
\end{aligned}$$

所以 
$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx - b_n \sin nx).$$

类似可证: 若  $f(-x) = -g(x)$ , 且

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

则 
$$g(x) \sim \frac{-a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

**例 4** 设函数  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上光滑, 证明:

(1) 若  $f(-x) = f(x)$  或  $f(\pi - x) = -f(x)$ , 则函数的傅里

叶级数是  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos(2n-1)x$ ;

(2) 若  $f(-x) = -f(x)$  或  $f(\pi - x) = f(x)$ , 则函数的傅里

叶级数是  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \sin(2n-1)x$ .

**证** (1) 若  $f(-x) = f(x)$  或  $f(\pi - x) = -f(x)$ , 则  $f(x)$  为偶函数,  $b_n = 0, n = 1, 2, \dots$ . 而

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} f(x) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x) dx \right],$$

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos 2nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} f(x) \cos 2nx dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x) \cos 2nx dx \right]. \end{aligned}$$

设  $x = \pi - t$ , 则  $dx = -dt$ , 于是

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^{\pi} f(x) dx &= - \int_{\pi/2}^0 f(\pi - t) dt = \int_0^{\pi/2} f(\pi - x) dx, \\ \int_{\pi/2}^{\pi} f(x) \cos 2nx dx &= - \int_{\pi/2}^0 f(\pi - t) \cos 2nt dt \\ &= \int_0^{\pi/2} f(\pi - x) \cos 2nx dx. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} f(x) dx + \int_0^{\pi/2} f(\pi - x) dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} [f(x) + f(\pi - x)] dx = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} f(x) \cos 2nx dx + \int_0^{\pi/2} f(\pi - x) \cos 2nx dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} [f(x) + f(\pi - x)] \cos 2nx dx = 0, \end{aligned}$$

从而 
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos(2n-1)x.$$

(2) 请读者自己用类似方法证明.

**例 5** 设函数  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上可积, 证明:

(1) 若  $\forall x \in [-\pi, \pi], f(x+\pi) = f(x)$ , 则  $a_{2k-1} = b_{2k-1} = 0$ ;

(2) 若  $\forall x \in [-\pi, \pi], f(x+\pi) = -f(x)$ , 则  $a_{2k} = b_{2k} = 0$ .

其中  $a_i, b_i$  都是函数  $f(x)$  的傅里叶系数.

**证** (1) 依傅里叶系数公式

$$a_{2k-1} = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 f(x) \cos(2k-1)x dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos(2k-1)x dx \right],$$

$$b_{2k-1} = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 f(x) \sin(2k-1)x dx + \int_0^{\pi} f(x) \sin(2k-1)x dx \right],$$

设  $x = \pi - t$ , 则  $dx = -dt$ , 于是

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f(x) \cos(2k-1)x dx &= - \int_{-\pi}^0 f(t+\pi) \cos(2k-1)t dt \\
&= - \int_{-\pi}^0 f(x+\pi) \cos(2k-1)x dx, \\
\int_0^\pi f(x) \sin(2k-1)x dx &= - \int_{-\pi}^0 f(t+\pi) \sin(2k-1)t dt \\
&= - \int_{-\pi}^0 f(x+\pi) \sin(2k-1)x dx.
\end{aligned}$$

将后两式结果代入前两式中, 即得

$$a_{2k-1} = 0, \quad b_{2k-1} = 0.$$

(2) 用类似方法可证.

例 6 设  $f(x) = \begin{cases} x+2\pi & -\pi < x < 0, \\ \pi & x=0, \\ x, & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$

将  $f(x)$  展开成以  $2\pi$  为周期的傅里叶级数.

解法 1 依常规方法计算傅里叶系数.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (x+2\pi) dx + \int_0^\pi x dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \left( \frac{x^2}{2} + 2\pi x \right) \Big|_{-\pi}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^\pi \right] = 2\pi. \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (x+2\pi) \cos nx dx + \int_0^\pi x \cos nx dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin nx}{n} (x+2\pi) \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^0 \sin nx dx \right. \\
&\quad \left. + \frac{x}{n} \sin nx \Big|_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin nx dx \right] \\
&= -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0, \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (x+2\pi) \sin nx dx + \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \left( -\frac{x+2\pi}{n} \cos nx \right) \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^0 \cos nx dx \right. \\
&\quad \left. + \left( -\frac{x}{n} \cos nx \right) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{2\pi}{n} + \frac{\pi}{n}(-1)^n - \frac{\pi}{n}(-1)^n \right] = -\frac{2}{n},
\end{aligned}$$

故 
$$f(x) = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx, \quad -\pi < x \leq \pi.$$

**解法 2** 利用周期函数特性( $f(t)$  以  $l$  为周期, 则  $\int_a^{a+l} f(x)dx$  与  $a$  无关), 令  $F(x) = x$ , 计算傅里叶系数.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{2\pi} x^2 \Big|_0^{2\pi} = 2\pi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cos nx dx \\
&= \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x}{n} \sin nx \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \sin nx dx \right] \\
&= \frac{1}{n^2 \pi} \cos nx \Big|_0^{2\pi} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \left( -\frac{x}{n} \cos nx \right) \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos nx dx \right] = -\frac{2}{n},
\end{aligned}$$

故 
$$f(x) = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx, \quad -\pi < x \leq \pi.$$

**解法 3** 利用函数的奇偶性, 记

$$\varphi(x) = f(x) - \pi = \begin{cases} x + \pi, & -\pi < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x - \pi, & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$



则  $\varphi(x)$  为奇函数, 先求  $\varphi(x)$  的傅里叶级数.

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x - \pi) \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left( -\frac{x - \pi}{n} \cos nx \right) \Big|_0^\pi + \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \cos nx dx = -\frac{2}{n}, \end{aligned}$$

故 
$$\varphi(x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx,$$

从而 
$$f(x) = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx, \quad -\pi < x \leq \pi.$$

三种解法求得的傅里叶级数是一致的, 但计算的繁简程度却不同. 解法 1 要计算六个定积分, 解法 2 要计算三个定积分, 解法 3 只计算一个定积分: 自然是解法 3 最好. 但解法 3 往往不易想到. 这时, 我们可以先作出  $f(x)$  的图形, 然后借助函数的图形特性, 特别是考察函数的奇偶性, 选择适当的解法. 这样可以极大的简化傅里叶系数的计算.

**例 7** 将下列函数展开为傅里叶级数:

- (1)  $f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi;$
- (2)  $f(x) = 2\sin(x/3), \quad -\pi \leq x < \pi;$
- (3)  $f(x) = e^x + 1, \quad -\pi \leq x < \pi;$
- (4)  $f(x) = |x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$

**解** 本例的函数是比较简单的. 先考察函数是否符合收敛定理, 是否奇偶函数; 再计算傅里叶系数, 求出和函数.

(1)  $f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi$ , 符合收敛定理条件, 且  $f(x)$  为偶函数. 故  $b_n = 0$ .

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos nx dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi x^2 d(\sin nx) \xrightarrow{\text{分部}} (-1)^n \frac{4}{n^2}.$$

因为  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上连续, 所以

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

(2)  $f(x) = 2\sin(x/3)$ ,  $-\pi \leq x < \pi$ , 符合收敛定理条件, 且  $f(x)$  是奇函数. 故  $a_0 = 0, a_n = 0$ .

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2\sin \frac{x}{3} \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(1/3 - n)x - \cos(1/3 + n)x] dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\sin(n - 1/3)x}{n - 1/3} - \frac{\sin(n + 1/3)x}{n + 1/3} \right] \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{\sin(n - 1/3)\pi}{n - 1/3} - \frac{\sin(n + 1/3)\pi}{n + 1/3} \right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \left( \frac{-\cos n\pi}{3n - 1} - \frac{\cos n\pi}{3n + 1} \right) \\ &= (-1)^{n-1} \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \left( \frac{1}{3n - 1} + \frac{1}{3n + 1} \right) \\ &= (-1)^{n-1} \frac{18\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{n}{9n^2 - 1}. \end{aligned}$$

因为  $f(-\pi) \neq f(\pi)$ , 所以

$$f(x) = \frac{18\sqrt{3}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{9n^2 - 1} \sin nx, \quad |x| < \pi.$$

(3)  $f(x) = e^x + 1$ ,  $-\pi \leq x < \pi$ , 符合收敛定理条件. 故

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^x + 1) dx = \frac{1}{\pi} [e^{\pi} - e^{-\pi} + 2\pi], \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^x + 1) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^x \cos nx + \cos nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{e^x}{1 + n^2} (\cos nx + n \sin nx) + \frac{1}{n} \sin nx \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{e^{\pi} \cos n\pi}{1 + n^2} - \frac{e^{-\pi} \cos(-n\pi)}{1 + n^2} \right] = \frac{(-1)^n}{\pi(1 + n^2)} (e^{\pi} - e^{-\pi}), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^x + 1) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^x \sin nx + \sin nx) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x}{1+n^2} (\sin nx - n \cos nx) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{-ne^{\pi}}{1+n^2} \cos n\pi + \frac{ne^{\pi}}{1+n^2} \cos(-n\pi) \right] \\
&= \frac{(-1)^{n+1}n}{\pi(1+n^2)} (e^{\pi} - e^{-\pi}).
\end{aligned}$$

因为  $f(-\pi) \neq f(\pi)$ , 且  $\operatorname{sh} \pi = (e^{\pi} - e^{-\pi})/2$ , 故

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi} [e^{\pi} - e^{-\pi} + 2\pi] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+n^2)} (e^{\pi} - e^{-\pi}) \cos nx \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{\pi(1+n^2)} (e^{\pi} - e^{-\pi}) \sin nx \\
&= 1 + \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi} + \frac{2\operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos nx - n \sin nx), \quad |x| < \pi.
\end{aligned}$$

(4)  $f(x) = |x|$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ , 符合收敛定理条件, 且  $f(x)$  是偶函数. 故  $b_n = 0$ .

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi,$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x d \sin nx \\
&\stackrel{\text{分部}}{=} \frac{2}{n\pi} \left[ x \sin nx - \frac{1}{n} \cos nx \right] \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} \left[ \frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n} \right] \\
&= \frac{(-4)}{(2k+1)^2 \pi}, \quad k = 0, 1, 2, \dots.
\end{aligned}$$

因为  $f(x) = |x|$  在  $[-\pi, \pi]$  上连续, 所以

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x, \quad |x| \leq \pi.$$

**例 8** 展开函数  $f(x) = \arcsin(\sin x)$  为傅里叶级数.

**解**  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的周期函数, 化为

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x, & -\pi \leq x < -\pi/2, \\ x, & -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, \\ \pi - x, & \pi/2 < x \leq \pi. \end{cases}$$

显然,  $f(x)$  是奇函数. 故  $a_0=0, a_n=0$ .

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} x \sin nx dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \sin nx dx \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} x \sin nx dx + (-1)^{n+1} \int_0^{\pi/2} x \sin nx dx \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} [1 + (-1)^{n+1}] \int_0^{\pi/2} x \sin nx dx \\
 &= \frac{2[1 + (-1)^{n+1}]}{\pi} \left[ -\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right] \Big|_0^{\pi/2} \\
 &= \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}, & n = 2k-1, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}
 \end{aligned}$$

因为  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 所以

$$\arcsin(\sin x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin(2n-1)x, \quad -\infty < x < +\infty.$$

**例 9** 将下列函数展开为傅里叶级数:

(1)  $f(x) = 3x^2 + 1, \quad -\pi \leq x < \pi;$

(2)  $f(x) = e^x, \quad -\pi \leq x < \pi;$

(3)  $f(x) = \pi^2 - x^2, \quad -\pi < x \leq \pi;$

(4)  $f(x) = \begin{cases} bx, & -\pi \leq x < 0, \\ ax, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

**解** (1)  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3x^2 + 1) dx = 2(\pi^2 + 1),$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3x^2 + 1) \cos nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{n} (3x^2 + 1) \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{6x}{n} \sin nx dx \right] \\
 &= \frac{6}{n^2 \pi} \left[ x \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \right]
 \end{aligned}$$

$$= \frac{12}{n^2}(-1)^n - \frac{6}{n^3\pi} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = (-1)^n \frac{12}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3x^2 + 1) \sin nx dx \stackrel{\text{奇函数}}{=} 0.$$

故  $f(x) = \pi^2 + 1 + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad (-\infty, +\infty).$

$$(2) \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} dx = \frac{1}{2\pi} (e^{2\pi} - e^{-2\pi}),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} \cos nx dx = \frac{1}{2\pi} \left[ e^{2x} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} n \sin nx dx \right]$$

$$= \frac{-1}{2\pi} (e^{2\pi} - e^{-2\pi}) + \frac{n}{4\pi} \left[ e^{2x} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} n \cos nx dx \right]$$

$$= \frac{(-1)^n (e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{(n^2 + 4)\pi} - \frac{n^2}{4} a_n = \frac{2(-1)^n (e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{(n^2 + 4)\pi},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} \sin nx dx = \frac{1}{2\pi} \left[ e^{2x} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} n \cos nx dx \right]$$

$$= -\frac{n}{2} a_n = -\frac{n(-1)^n (e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{(n^2 + 4)\pi}.$$

故  $f(x) = \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{\pi} \left[ \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 4} (2\cos nx - n\sin nx) \right],$

其中  $x \neq (2n+1)\pi, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

(3)  $f(x)$  为偶函数, 故  $b_n=0$ .

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) \cos nx dx$$

$$= \left[ \frac{2}{\pi} (\pi^2 - x^2) \frac{\sin nx}{n} \right] \Big|_0^{\pi} + \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx$$

$$= \left[ \frac{4}{n\pi} \cdot \frac{x(-\cos nx)}{n} \right] \Big|_0^{\pi} + \frac{4}{n^2\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2},$$

故  $\pi^2 - x^2 = \frac{2}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$

若令  $x=\pi$ , 则由

$$0 = \frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos n\pi = \frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n^2},$$

得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$(4) \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 b x dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} a x dx = \frac{\pi}{2}(a-b),$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 b x \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} a x \sin nx dx \\ &= \frac{b}{\pi} \left[ \frac{x}{n} \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx \right] \Big|_{-\pi}^0 + \frac{a}{\pi} \left[ \frac{x}{n} \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx \right] \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{n^2 \pi} (b-a)(1 - \cos n\pi) = \frac{b-a}{n^2 \pi} [1 - (-1)^n], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 b x \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} a x \sin nx dx \\ &= \frac{b}{\pi} \left[ -\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right] \Big|_{-\pi}^0 \\ &= \frac{b}{\pi} \left( -\frac{\pi}{n} \cos n\pi \right) + \frac{a}{\pi} \left( -\frac{\pi}{n} \cos n\pi \right) = \frac{a+b}{n} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

故 
$$f(x) = \frac{\pi}{4}(a-b) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{[1 - (-1)^n](b-a)}{n^2 \pi} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}(a+b)}{n} \sin nx \right\},$$

其中  $x \neq (2n+1)\pi$ ,  $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

**例 10**  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的连续函数, 其傅里叶系数为  $a_0$ ,  $a_n, b_n$ .

(1) 求函数  $G(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dt$  的傅里叶系数  $A_0$ ,  $A_n, B_n$ ;

(2) 利用题(1)的结果证明巴塞瓦(Parseval)等式

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

$$\begin{aligned}\text{解 因为 } G(x+2\pi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(2\pi+x+t)dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dt = G(x),\end{aligned}$$

所以  $G(x)$  是以  $2\pi$  为周期的连续函数, 符合收敛定理条件.

$$\begin{aligned}A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dt \right] dx \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dx \right] dt \quad (\text{令 } x+t=u) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(u)du \right] dt = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(u)du \right] dt \\ &= \frac{a_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = a_0^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dt \right] \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cos nx dx \right] f(t) dt \quad (\text{令 } x+t=u) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(u) \cos n(u-t) du \right] f(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \int_{-\pi+t}^{\pi+t} \cos nt f(u) \cos n u du \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\pi+t}^{\pi+t} \sin nt f(u) \sin n u du \right] f(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nt f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nt f(t) dt \\ &= a_n^2 + b_n^2.\end{aligned}$$

$$\text{同样可得 } B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(x) \sin nx dx = a_n b_n - a_n b_n = 0.$$

(2) 由题(1)得  $G(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx$ , 在  $G(x)$  中令  $x=0$ , 得

$$G(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

即 
$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

例 11 将下列函数展开为傅里叶级数:

$$(1) f(x) = |\sin x|; \quad (2) f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi+x}{2}, & -\pi \leq x \leq 0, \\ \frac{\pi-x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

解 (1)  $|\sin x|$  是偶函数, 故  $b_n = 0$ .

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \left[ \frac{2}{\pi} - \cos x \right] \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] dx \quad (n \neq 1) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{-\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \right] \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1 - \cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{n-1} \right] \\ &= \begin{cases} -\frac{4}{(n^2-1)\pi}, & n = 2, 4, \dots, \\ 0, & n = 3, 5, \dots, \end{cases} \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\sin^2 x}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = 0.$$

$$\text{所以 } f(x) = \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cos 2x - \frac{1}{15} \cos 4x - \frac{1}{35} \cos 6x - \dots \right),$$

$$-\infty < x < +\infty.$$

(2)  $f(x)$  是奇函数, 故  $a_0 = 0, a_n = 0$ .

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi-x}{2} \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\pi-x}{2n} \cos nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

所以, 在  $[-\pi, 0] \cup (0, \pi)$  上, 有



$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx.$$

$f(x)$  在  $x=0$  间断, 其傅里叶级数收敛于

$$\frac{f(0+0) + f(0-0)}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = 0.$$

下面我们讨论不是定义在  $[-\pi, \pi]$  上的函数展开为傅里叶级数的例子.

当  $f(x)$  是  $[0, \pi]$  上分段光滑的奇函数(或偶函数)时, 它的傅里叶级数是正弦级数(或余弦级数), 但在展开前要先对函数作奇延拓(或偶延拓). 所得级数在全数轴上收敛, 在  $(0, \pi)$  内函数的连续点上收敛于函数本身.

**例 12** 展开下列函数为指定的傅里叶级数:

(1)  $f(x) = (\pi - x)/2$ ,  $x \in [0, \pi]$ , 正弦级数;

(2)  $f(x) = x^2$ ,  $x \in (0, \pi)$ , 正弦级数;

(3)  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \pi/2), \\ \pi - x, & x \in [\pi/2, \pi], \end{cases}$  余弦级数;

(4)  $f(x) = \begin{cases} 3x/2, & x \in [0, \pi/3], \\ \pi/2, & x \in (\pi/3, 2\pi/3), \\ 3(\pi - x)/2, & x \in (2\pi/3, \pi], \end{cases}$  正弦级数.

**解** (1) 作奇延拓, 再作周期延拓, 故

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0.$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\pi - x) \sin nx \, dx, \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x - \pi}{2n} \cos nx - \frac{1}{2n^2} \sin nx \right] \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

故 
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx, \quad 0 < x \leq \pi.$$

级数在  $x=0$  收敛于

$$\frac{-\pi/2 + \pi/2}{2} = 0.$$

(2) 作奇延拓, 再作周期延拓, 即考虑  $f(x) = x|x|$  ( $-\pi < x$

$<\pi$ )的傅里叶展开,故

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0.$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \sin nx dx \\ &= -\frac{2x^2}{n\pi} \cos nx \Big|_0^\pi + \frac{4}{n\pi} \int_0^\pi x \cos nx dx \\ &= (-1)^{n-1} \frac{2\pi}{n} + \frac{4}{n^2\pi} \left[ x \sin nx \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin nx dx \right] \\ &= (-1)^{n-1} \frac{2\pi}{n} + \frac{4}{n^3\pi} [(-1)^n - 1]. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} &2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)} \\ &= \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < \pi, \\ 0, & x = \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

(3) 作偶延拓, 再作周期延拓, 故  $b_n = 0$ .

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi (\pi - x) dx = \frac{2}{\pi} \left( \pi - x \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{\pi/2}^\pi = \frac{\pi}{4},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi (\pi - x) \cos nx dx \\ &= \frac{2}{n} \sin nx \Big|_{\pi/2}^\pi - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cos nx \Big|_{\pi/2}^\pi - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x}{n} \sin nx \Big|_{\pi/2}^\pi \\ &= \frac{-2}{n} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{-2}{n^2\pi} (-1)^n + \frac{2}{n^2\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \\ &= -\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{-2}{n^2\pi} \left[ (-1)^n - \cos \frac{n\pi}{2} \right], \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{8} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n^2\pi} \left[ (-1)^n - \cos \frac{n\pi}{2} \right] \cos nx, \\ &\quad x \in [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]. \end{aligned}$$

在  $x = \pi/2$ , 级数收敛于  $\frac{1}{2} \left( 0 + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4}$ .

(4) 作奇延拓, 再作周期延拓, 故  $a_0=0, a_n=0$ .

$$\begin{aligned}
 b_0 &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/3} \frac{3}{2} x \sin nx dx + \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{\pi}{2} \sin nx dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{3}{2} (\pi - x) \sin nx dx \right] \\
 &= \frac{3}{\pi} \left[ \frac{1}{n^2} \sin nx - \frac{x}{n} \cos nx \right] \Big|_0^{\pi/3} + \frac{3}{2} \left[ -\frac{1}{n} \cos nx \right] \Big|_{\pi/3}^{2\pi/3} \\
 &\quad + 3 \left[ -\frac{1}{n} \cos x \right] \Big|_{2\pi/3}^{\pi} - \frac{3}{\pi} \left[ \frac{1}{n^2} \sin nx - \frac{x}{n} \cos nx \right] \Big|_{2\pi/3}^{\pi} \\
 &= \frac{3}{n^2 \pi} \left( \sin \frac{n\pi}{3} + \sin \frac{2n\pi}{3} \right) = \frac{6}{n^2 \pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{6} \\
 &= \frac{6}{\pi (2k-1)^2} \cos \frac{(2k-1)\pi}{6}.
 \end{aligned}$$

故

$$f(x) = \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi}{6} \sin(2n-1)x,$$

$0 \leq x \leq \pi.$

例 13 证明: 在  $[0, \pi]$  上, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{12} (3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2).$$

证 将函数  $f(x) = 3x^2 - 6\pi x$  作偶延拓, 展开为余弦级数, 故  $b_n = 0$ .

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (3x^2 - 6\pi x) dx = -4\pi^2, \\
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (3x^2 - 6\pi x) \cos nx dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[ 3 \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx - 6\pi \int_0^{\pi} x \cos nx dx \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[ 3 \left( \frac{\pi}{n^2} 2 \cos n\pi \right) - 6\pi \left( \frac{1}{n^2} \cos n\pi - \frac{1}{n^2} \right) \right] = \frac{12}{n^2}.
 \end{aligned}$$

故

$$3x^2 - 6\pi x = -2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n^2} \cos nx,$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{12}(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2).$$

例 14 证明: 在  $[0, \pi]$  上, 有

$$(1) \quad x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2};$$

$$(2) \quad x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}.$$

证 考虑其正弦级数与余弦级数.

(1) 对  $f(x) = x(\pi - x)$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ , 作偶延拓, 故  $b_n = 0$ .

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) dx = \left[ x^2 - \frac{2x^3}{3\pi} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \cos nx dx = 2 \int_0^{\pi} x \cos nx dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx \\ &= 2 \left[ \frac{1}{n^2} \cos nx + \frac{x}{n} \sin nx \right]_0^{\pi} \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x}{n^2} (nx \sin nx + 2 \cos nx) - \frac{2}{n} \sin nx \right]_0^{\pi} \\ &= 2 \left[ \frac{1}{n^2} (-1)^n - \frac{1}{n^2} \right] - \frac{4}{n^2} (-1)^n \\ &= \frac{2}{n^2} (-1)^{n+1} - \frac{2}{n^2} = \frac{-4}{(2n)^2}. \end{aligned}$$

所以,  $f(x) = x(\pi - x)$  在  $[0, \pi]$  上的余弦级数为

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{(2n)^2} \cos 2nx = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 2nx.$$

(2) 对  $f(x) = x(\pi - x)$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ , 作奇延拓. 故

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0.$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \pi \int_0^{\pi} x \sin nx dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin^2 nx dx \\ &= 2 \left[ \frac{1}{n^2} \sin nx - \frac{x}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{\pi} \left[ \frac{x}{n^2} (2\sin x - nx \cos nx) + \frac{2}{n^2} \cos nx \right] \Big|_0^\pi \\
&= -\frac{2\pi}{n} (-1)^n + \frac{2\pi}{n} (-1)^n + \frac{4}{\pi n^3} [(-1)^n - 1] \\
&= \frac{8}{\pi (2n-1)^3}.
\end{aligned}$$

所以,  $f(x) = x(\pi - x)$  在  $[0, \pi]$  上的正弦级数为

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin(2n-1)x.$$

**例 15** 利用上例结果证明:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

**证** 令  $x = \pi/2$ , 分别代入  $x(\pi - x)$  的正弦级数与余弦级数, 可得

$$(1) \frac{\pi}{2} \left( \pi - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n(\pi/2)}{n^2},$$

即 
$$\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

故 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

$$\begin{aligned}
(2) \frac{\pi}{2} \left( \pi - \frac{\pi}{2} \right) &= \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1) \cdot (\pi/2)}{(2n-1)^3} \\
&= \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi - \pi/2)}{(2n-1)^3}.
\end{aligned}$$

因为  $\sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin n\pi \cos \frac{\pi}{2} - \cos n\pi \sin \frac{\pi}{2} = (-1)^{n-1},$

所以 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

**例 16** 证明: 在  $(0, \pi)$  内, 有

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \cdots,$$

并求等式右边级数之和.

证 将  $f(x) = \pi/4$  展开为正弦级数. 故

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0.$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi}{4} \sin nx dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{\cos nx}{n} \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{2n} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{1}{2k-1}, & n = 2k-1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$f(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \cdots.$$

在上式中令  $x = \pi/2$ , 即得

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \cdots.$$

利用傅里叶级数还可以求数项级数的和, 就是把所求数项级数的和化为傅里叶级数在某一点的值. 解题的关键在于能适当地选择一点 (有时还要选择一个适当的函数), 使得傅里叶级数的和函数在该点的值恰好等于所求数项级数之和.

**例 17** 在  $(-\pi, \pi)$  内将  $f(x) = |x|$  展开为傅里叶级数, 并求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$  的和.

解  $f(x) = |x|$  是偶函数, 故  $b_n = 0$ .

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{n^2}.$$

因为在  $(-\pi, \pi)$  内  $f(x)$  分段光滑且连续, 故

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \left( \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \cdots \right). \end{aligned}$$

$$\text{令 } S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots,$$

$$S_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \cdots,$$

$$S_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} + \cdots,$$

$$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} + \cdots.$$

在  $f(x)$  中令  $x=0$ , 有

$$S_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$\text{而 } \begin{cases} S_1 = S_2 + S_3 = \pi^2/8, \\ 3S_2 - S_1 = 0 \text{ (由 } S_2 = S/4 = (S_1 + S_2)/4 \text{)}, \end{cases}$$

$$\text{得 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = S_2 = \frac{S_1}{3} = \frac{\pi^2}{24},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} = S_3 = \frac{\pi^2}{12}.$$

**例 18** 将  $f(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}}$  在  $[-\pi, \pi]$  上展开为傅里叶级数, 并求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + (2n)^2}$  的和.

**解**  $f(x)$  是偶函数, 故  $b_n = 0$ .

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}} dx = 1,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}} \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{e^\pi - e^{-\pi}} \left[ \int_0^\pi e^x \cos nx dx + \int_0^\pi e^{-x} \cos nx dx \right]$$

$$= \frac{1}{e^\pi - e^{-\pi}} \left[ \frac{e^\pi \cos n\pi}{1 + n^2} - \frac{1}{1 + n^2} + \frac{e^{-\pi} (-\cos n\pi)}{1 + n^2} - \frac{(-1)}{1 + n^2} \right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{(1 + n^2)}.$$

而 
$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi+0)}{2}=f(\pi)=f(-\pi).$$

故 
$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos nx, \quad -\pi\leq x\leq \pi.$$

当取  $x=\pi/2$  时,有

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+2^2}+\frac{1}{1+4^2}-\cdots+\frac{1}{1+(2n)^2}+\cdots,$$

所以 
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+(2n)^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}-\frac{1}{2}.$$

**例 19** 将  $[0, 2\pi]$  上周期为  $2\pi$  的函数  $f(x)=\frac{x}{4}(2\pi-x)$  展开为傅里叶级数,并求出  $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$  和  $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ .

解 
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{4}(2\pi-x)dx=\frac{\pi^2}{3},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{4}(2\pi-x)\cos nxdx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}x\cos nxdx - \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nxdx = -\frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{4}(2\pi-x)\sin nxdx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}x\sin nxdx - \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nxdx = 0. \end{aligned}$$

因为  $f(0+0)=f(2\pi-0)$ ,所以

$$\frac{x}{4}(2\pi-x)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx, \quad 0\leq x\leq 2\pi.$$

令  $x=0$ ,得 
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

因为  $\frac{x}{4}(2\pi-x)-\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^2}\cos nx$ ,逐项积分,有

$$\int_0^x\left[\frac{t}{4}(2\pi-t)-\frac{\pi^2}{6}\right]dt=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^x\cos ntdt,$$



解得  $\frac{1}{6}\pi^2x - \frac{1}{4}\pi x^2 + \frac{x^3}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin nx, 0 \leq x \leq 2\pi.$

再逐项积分两次,得在 $[0, 2\pi]$ 上有

$$-\frac{1}{36}\pi^2x^3 + \frac{1}{48}\pi x^4 - \frac{x^5}{240} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left( \frac{\sin nx}{n} - x \right),$$

令  $x=2\pi$ , 即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{90}\pi^4.$$

## 第二节 以 $2l$ 为周期的函数的展开式

### 主要内容

1. 设  $f$  是以  $2l$  为周期的函数, 在  $[-l, l]$  上可积, 则

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, n = 0, 1, 2, \dots.$$

2. 若  $f$  是以  $2l$  为周期的偶函数(或定义在  $[-l, l]$  上的偶函数), 则  $f$  的傅里叶级数是余弦级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

3. 若  $f$  是以  $2l$  为周期的奇函数(或定义在  $[-l, l]$  上的奇函数), 则  $f$  的傅里叶级数是正弦级数

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

## 疑难解析

### 1. 讨论以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数展开式的意义.

**答** 在上节中,我们讨论的函数  $f$  是以  $2\pi$  为周期的周期函数.但实际上更多的周期函数是以  $2l$  为周期的,因此需要讨论以  $2l$  为周期的函数的傅里叶级数展开式.

一般地,当  $f$  是以  $2l$  为周期的函数时,通过变量代换:  $\pi x/l = t$  或  $x = lt/\pi$ ,可以把  $f$  变换成以  $2\pi$  为周期的函数,再依上节的公式展开.

当  $f$  不是周期函数时.如果函数  $f$  定义在  $(-\infty, +\infty)$  内(或  $[-l, l]$  上,或长度为  $2l$  的区间上),则可以引入一个辅助函数  $f^*$ ,令  $f^*$  与  $f$  在  $[-l, l]$  内相同.然后,将  $f^*$  按周期延拓到整个数轴,成为以  $2l$  为周期的周期函数.此时,可以在区间  $[-l, l]$  上将  $f^*$  展开为傅里叶级数,以满足研究函数  $f$  的需要.

因而,以  $2l$  为周期的函数的傅里叶级数展开式的讨论对我们研究一般的周期函数与非周期函数是十分有用且至关重要的.

## 方法、技巧与典型例题分析

本节解题方法与技巧与上节基本相同,所要注意的是  $l$  的确定与傅里叶级数收敛的区间的确定,一定要认真思考.

**例 1** 设  $f(x)$  是以  $2l$  的周期的函数,在区间  $(-l, l]$  上,  $f(x) = x + |x|$ ,求  $f(x)$  的傅里叶级数.

**解**  $f(x)$  在  $(-l, l]$  上表示为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -l < x < 0, \\ 2x, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

函数  $f(x)$  满足收敛定理条件,可以展开为傅里叶级数.

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l 2x dx = l,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_0^l 2x \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{n\pi} \left[ x \sin \frac{n\pi x}{l} \right] \Big|_0^l - \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2l}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1], \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_0^l 2x \sin \frac{n\pi x}{l} dx = (-1)^{n-1} \frac{2l}{n\pi}.$$

故  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内, 除  $x = (2k+1)l$  外, 傅里叶级数为

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{l}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2l}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1] \cos \frac{n\pi x}{l} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n+1} \frac{2l}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{l} \right]. \end{aligned}$$

在  $x = (2k+1)l$  ( $k=0, \pm 1, \dots$ ), 级数收敛于

$$\frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2} = \frac{l}{2}.$$

**例 2** 求下列函数的傅里叶级数:

$$(1) f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 2; \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} 2-x, & 0 \leq x < 4, \\ x-6, & 4 \leq x \leq 8; \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} 1 + \cos \pi x, & -1 < x < 1, \\ 0, & -2 \leq x \leq -1 \text{ 和 } 1 \leq x \leq 2; \end{cases}$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq x < 1. \end{cases}$$

解 (1)  $a_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 x dx = 1,$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1],$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2}{n\pi} (-1)^n.$$

所以,在 $(-2, 2)$ 内,有

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] \cos \frac{n\pi x}{2} - \frac{2(-1)^n}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \right].$$

在点  $x = \pm 2$ , 傅里叶级数收敛于  $\frac{2+0}{2} = 1$ .

$$\begin{aligned} (2) \quad a_0 &= \frac{1}{4} \left[ \int_0^4 (2-x) dx + \int_4^8 (x-6) dx \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \left( 2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^4 + \left( \frac{x^2}{2} - 6x \right) \Big|_4^8 \right] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{4} \left[ \int_0^4 (2-x) \cos \frac{n\pi x}{4} dx + \int_4^8 (x-6) \cos \frac{n\pi x}{4} dx \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{8}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{4} - \frac{4x}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{4} - \frac{16}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{4} \right] \Big|_0^4 \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[ \frac{4x}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{4} + \frac{16}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{4} - \frac{24}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{4} \right] \Big|_4^8 \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{-16}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] + \frac{16}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n] \right\} \\ &= \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{16}{n^2 \pi^2}, & n \text{ 为奇数.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{4} \left[ \int_0^4 (2-x) \sin \frac{n\pi x}{4} dx + \int_4^8 (x-6) \sin \frac{n\pi x}{4} dx \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{-8}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{4} + \frac{4x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{4} - \frac{16}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{4} \right] \Big|_0^4 \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[ \frac{-4x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{4} + \frac{16}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{4} + \frac{24}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{4} \right] \Big|_4^8 = 0. \end{aligned}$$

所以,在 $(0, 8)$ 内,有

$$f(x) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{4}.$$

$$(3) \quad a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 + \cos \pi x) dx = \frac{1}{2} \left[ x + \frac{1}{\pi} \sin \pi x \right] \Big|_{-1}^1 = 1,$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 + \cos \pi x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx \\
&= \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \cos \left( \pi + \frac{n\pi}{2} \right) x + \cos \left( \pi - \frac{n\pi}{2} \right) x \right] dx \\
&= \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2\pi + n\pi} \sin \left( \pi + \frac{n\pi}{2} \right) + \frac{1}{2\pi - n\pi} \sin \left( \pi - \frac{n\pi}{2} \right) \\
&= \left[ \frac{2}{(2n-1)\pi} - \frac{1}{2 - (2n-1)\pi} + \frac{1}{2 - (2n+1)\pi} \right] (-1)^{n-1} \\
&= \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1}{(2n-1)[4 - (2n-1)^2]} (-1)^{n-1},
\end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 + \cos \pi x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = 0.$$

因为  $f(x)$  在  $[-2, 2]$  上连续, 所以

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)[4 - (2n-1)^2]} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}.$$

$$(4) \quad a_0 = \int_{-1}^0 x dx + \int_0^{1/2} dx + \int_{1/2}^1 -dx = -\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_{-1}^0 x \cos n\pi x dx + \int_0^{1/2} \cos n\pi x dx - \int_{1/2}^1 \cos n\pi x dx \\
&= \frac{x \sin n\pi x}{n\pi} \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{n\pi} \int_{-1}^0 \sin n\pi x dx + \frac{\sin n\pi x}{n\pi} \Big|_0^{1/2} - \frac{\sin n\pi x}{n\pi} \Big|_{1/2}^1 \\
&= \frac{1}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \Big|_{-1}^0 + \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi^2} + \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \\
&= \frac{2}{(2k-1)^2 \pi^2} + \frac{2(-1)^{k-1}}{(2k-1)\pi},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_{-1}^0 x \sin n\pi x dx + \int_0^{1/2} \sin n\pi x dx - \int_{1/2}^1 \sin n\pi x dx \\
&= -\frac{x \cos n\pi x}{n\pi} \Big|_{-1}^0 + \int_1^0 \frac{\cos n\pi x}{n\pi} dx \\
&\quad - \frac{x \cos n\pi x}{n\pi} \Big|_0^{1/2} + \frac{\cos n\pi x}{n\pi} \Big|_{1/2}^1 \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{\sin n\pi x}{n^2 \pi^2} \Big|_{-1}^0
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1 - \cos(n\pi/2)}{n\pi} + \frac{(-1)^n - \cos(n\pi/2)}{n\pi}$$

$$= \frac{1}{n\pi} \left( 1 - 2\cos \frac{n\pi}{2} \right).$$

故, 在  $(-1, 0) \cup (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$  上, 有

$$f(x) = -\frac{1}{4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(2n-1)^2 \pi^2} + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} \right] \cos(2n-1)\pi x$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left( 1 - 2\cos \frac{n\pi}{2} \right) \sin n\pi x.$$

**例 3** 将下列函数展开成傅里叶级数:

(1)  $f(x) = 2 + |x|$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , 并求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  之和;

(2)  $f(x) = \begin{cases} \cos(n\pi x/l), & 0 \leq x \leq l/2, \\ 0, & l/2 < x \leq l, \end{cases}$  展开为余弦级数.

**解** (1)  $f(x)$  为偶函数, 故  $b_n = 0$ .

$$a_0 = 2 \int_0^1 (2+x) dx = 5,$$

$$a_n = 2 \int_0^1 (2+x) \cos n\pi x dx$$

$$= 4 \int_0^1 \cos n\pi x dx + 2 \int_0^1 x \cos n\pi x dx$$

$$= 2 \left[ \frac{1}{n^2 \pi^2} \sin n\pi x + \frac{1}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \right] \Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} -\frac{4}{n^2 \pi^2}, & n \text{ 为奇数,} \\ 0, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

故  $f(x) = \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x, -1 \leq x \leq 1.$

令  $x=0$ , 得  $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$

设  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$ , 则  $S_1 + S_2 = S, S_2 = \frac{S}{4} =$

$$\frac{S_1 + S_2}{2}, \text{ 于是 } S_2 = \frac{1}{3}S_1 = \frac{\pi^2}{24}.$$

$$\text{从而 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = S_1 + S_2 = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(2) 进行偶延拓, 故  $b_n = 0$ .

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \cos \frac{\pi x}{l} dx = \frac{2}{\pi},$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_0^{l/2} \left( 1 + \cos \frac{2\pi x}{l} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^{l/2} \cos \frac{2\pi x}{l} d \frac{x}{l} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{1}{l} \int_0^{l/2} \left[ \cos \frac{(1-n)\pi x}{l} + \cos \frac{(1+n)\pi x}{l} \right] dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{1-n} \sin \frac{(-n)\pi x}{l} + \frac{1}{1+n} \sin \frac{(1+n)\pi x}{l} \right] \Big|_0^{l/2} \\ &= \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}, & n = 2k \text{ 为偶数.} \end{cases} \end{aligned}$$

$f(x)$  在  $(0, l)$  内连续, 延拓后在  $x=0, x=l$  连续, 故在  $[0, l]$  上有

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi x}{l} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

**例 4** 设  $f(x) = 10 - x, 5 < x < 15, f(x+10) = f(x)$ , 求  $f(x)$  的傅里叶级数.

**解**  $T=10$ , 故  $f(x)$  可写为  $f(x) = -x, (-5, 5)$ .

$f(x)$  是奇函数, 故  $a_0 = 0, a_n = 0$ .

$$b_n = \frac{2}{5} \int_0^5 (-x) \sin \frac{n\pi x}{5} dx = (-1)^n \frac{10}{n\pi}.$$

$$\text{故 } f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{10}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{5}.$$

**例 5** 如图 9.1 所示函数的解析式为

$$f(x) = \begin{cases} 2E, & 0 \leq x \leq \tau, \\ E, & \tau < x < 2\tau, \end{cases}$$

试展开为余弦级数(取前四项).

解 进行偶延拓, 故  $b_n = 0$ .

$$a_0 = \frac{2}{2\tau} \left( \int_0^\tau 2E dx + \int_\tau^{2\tau} E dx \right) = 3E,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\tau} \left[ \int_0^\tau 2E \cos \frac{n\pi x}{2\tau} dx + \int_\tau^{2\tau} E \cos \frac{n\pi x}{2\tau} dx \right] \\ &= \frac{1}{\tau} \left[ 2E \frac{2\tau}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2\tau} \Big|_0^\tau + E \frac{2\tau}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2\tau} \Big|_\tau^{2\tau} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{2E}{n\tau} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数,} \\ (-1)^{k-1} \frac{2E}{(2k-1)\pi}, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

所以, 在  $(0, \tau) \cup (\tau, 2\tau)$  上, 有

$$f(x) = \frac{3E}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2E}{(2k-1)\pi} \cos \frac{2k-1}{2\tau} \pi x.$$

在  $x = \tau$ , 傅里叶级数收敛于  $3E/2$ .

**例 6** 将  $f(x) = x$  ( $0 \leq x \leq l$ ) 展开为周期为  $2l$  的傅里叶级数.

(1) 用函数  $F(x) = x$  ( $0 \leq x \leq 2l$ );

(2) 展开为余弦级数;

(3) 展开为正弦级数.

$$\text{解 (1) } a_0 = \frac{1}{l} \int_0^{2l} x dx = 2l, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} x \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{1}{l} \left[ -\frac{lx}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{l} + \frac{l^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{l} \right] \Big|_0^{2l} = -\frac{2l}{n\pi}. \end{aligned}$$

在  $[0, l]$  上, 有  $f(x) = F(x)$ , 所以, 在  $(0, l]$  上, 有

$$f(x) = l - \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

在  $x = 0$ , 傅里叶级数收敛于  $l$ .

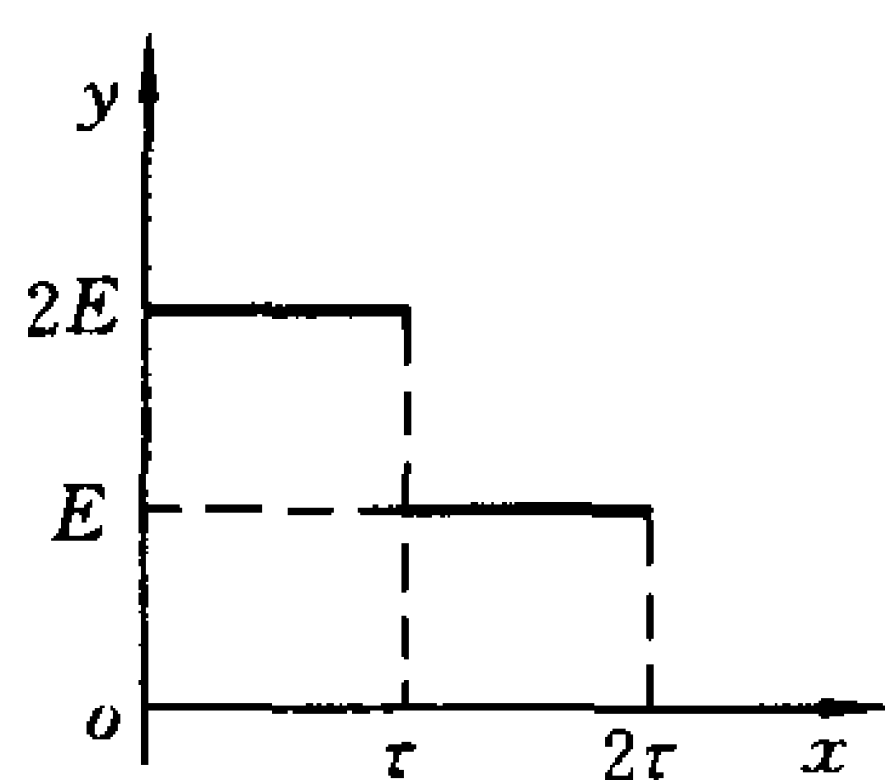


图 9.1



(2) 进行偶延拓, 故  $b_0 = 0, a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l x dx = l$ .

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l x \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \left( \frac{lx}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{l} + \frac{l^2}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{l} \right) \Big|_0^l \\ &= \frac{2l}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数,} \\ -\frac{4l}{n^2\pi^2}, & n \text{ 为奇数.} \end{cases} \end{aligned}$$

所以, 在  $[0, l]$  上, 有

$$f(x) = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{l}.$$

(3) 进行奇延拓, 故  $a_0 = 0, a_n = 0$ .

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l x \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \left( -\frac{lx}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{l} + \frac{l^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \Big|_0^l \\ &= (-1)^{n+1} \frac{2l}{n\pi}. \end{aligned}$$

所以, 在  $[0, l)$  上, 有

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2l}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

在  $x=l$  处, 傅里叶级数收敛于零.

**注意** 三种情形下傅里叶级数收敛于  $f(x)$  的区间是不同的.

### 第三节 收敛定理

#### 主要内容

1. 贝塞尔不等式 若函数  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上可积, 则

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx,$$

其中  $a_n, b_n$  是函数  $f(x)$  的傅里叶系数.

2. 黎曼-勒贝格 (Riemann-Lebesgue) 定理 若  $f(x)$  是  $[-\pi, \pi]$  上的可积函数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0.$$

3. 若  $f(x)$  是  $[-\pi, \pi]$  上的可积函数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} f(x) \sin(n + 1/2)x dx = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^0 f(x) \sin(n + 1/2)x dx = 0.$$

4. 若  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的周期函数, 且在  $[-\pi, \pi]$  上可积, 则其傅里叶级数部分和  $S_n(x)$  可表示为 (狄利克雷积分)

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} dt.$$

当  $t=0$  时, 被积函数中的不定式由极限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} = n + \frac{1}{2}$$

确定.

5. 收敛定理 (狄利克雷-约当定理) 若以  $2\pi$  为周期的函数  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  上分段光滑, 则在每一点  $x \in [-\pi, \pi]$ ,  $f$  的傅里叶级数  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  收敛于  $f$  在点  $x$  的左、右极限的算术平均值, 即

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

其中  $a_n, b_n$  是  $f$  的傅里叶系数.

## 疑难解析

1. 收敛定理有哪些不同的表述方式?

答 关于傅里叶级数的敛散性有许多不同的判别法. 有些判别法, 如狄尼条件与李普希兹条件判别法只能保证函数在一点展

开为傅里叶级数,而狄利克雷-约当判别法可以保证函数在整个区间上展开为傅里叶级数.

在保留函数  $f(x)$  的周期性的情况下,收敛定理可以表述为

- (1)  $f(x)$  有界;
- (2)  $f(x)$  只有有限个第一类间断点和有限个极值点;
- (3)  $f(x)$  可以表示为两个非负递增函数之差;
- (4)  $f(x)$  可以表示为两个递增函数之差.

只要满足这四条中的一条,就有

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$
$$\rightarrow f^*(x) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)].$$

因为后三条中的每一条都是函数有界的充要条件.

因为当  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有连续导数  $f'(x)$  时,  $f'(x)$  有界,即  $|f'(x)| \leq M$ , 于是

$$\begin{aligned} & \sup \sum |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &= \sup \sum |f'(\eta_i)| |x_i - x_{i-1}| \leq M(b-a), \end{aligned}$$

所以  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界;若  $f(x)$  分段光滑,则  $[a, b]$  可分成有限多个子区间,在每个小区间上  $f(x)$  有连续导数  $f'(x)$ ,故在每个子区间上有界,即  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界.从而有

- (1) 如果  $f(x)$  分段光滑,则  $S_m(x) \rightarrow f^*(x)$ ;
- (2) 若  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的有界连续函数(或分段光滑的连续函数),则  $f(x)$  的傅里叶级数在全区间上一致收敛于  $f(x)$ .

## 方法、技巧与典型例题分析

涉及傅里叶级数敛散性的问题大多是证明题,除了运用函数项级数的有关命题外,大多数命题需要利用积分的技巧来完成.

**例 1** 设  $f$  是周期为  $2\pi$  的可积函数,记

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$\sigma_m(x) = \frac{1}{m} [S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_{m-1}(x)].$$

证明: (1)  $S_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)} dt;$  ①

(2)  $\sigma_m(x) = \frac{1}{2m\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left[ \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right]^2 dt.$  ②

其中

$$S_0(x) = a_0/2.$$

证 (1) 利用被积函数的周期性, 有

$$\begin{aligned} S_m(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^m \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt \right] \cos nx \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^m \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt \right] \sin nx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^m (\cos nt \cos nx + \sin nt \sin nx) \right] dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^m \cos n(t-x) \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+\tau) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^m \cos n\tau \right] d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+\tau) \frac{\sin(m+1/2)\tau}{\sin(\tau/2)} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)} dt, \end{aligned}$$

取  $f(x)=1$ , 有  $S_0(x)=a_0/2=1$ , 则

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)} dt = 1.$$

此式与式①都称为狄利克雷积分.

$$\text{又} \quad \frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)} = \frac{\sin(m+1/2)t \sin(t/2)}{\sin^2(t/2)}$$

$$= \frac{\cos mt - \cos(m+1)t}{1 - \cos t},$$

故 
$$S_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\cos mt - \cos(m+1)t}{1 - \cos t} dt.$$

(2) 由题(1)的结果,有

$$\begin{aligned} \sigma_m(x) &= \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} S_n(x) \\ &= \frac{1}{2m\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\cos nt - \cos(n+1)t}{1 - \cos t} dt \\ &= \frac{1}{2m\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left[ \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right]^2 dt. \end{aligned}$$

当  $f(x)=1$  时,  $\sigma_m(x)=1$ , 得

$$\frac{1}{2m\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right]^2 dt.$$

此式与式②均称为费吉尔(Fejer)积分,  $\sigma_m(x)$  称为积分和.

**例 2** 证明: 若  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的可积函数, 则有

$$f(x) - S_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)} [2f(x) - f(x+t) - f(x-t)] dt.$$

**证** 由例(1)知

$$f(x) = f(x) \cdot 1 = f(x) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)} dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)} dt,$$

而 
$$\begin{aligned} S_m(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 f(x+t) \frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\pi} f(x+t) \frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)} dt \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)} dt. \end{aligned}$$

两式相减, 即得

$$\begin{aligned} f(x) - S_m(x) \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)} [2f(x) - f(x+t) - f(x-t)] dt. \end{aligned}$$

例 3 证明: 若  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的连续函数, 则

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m(x) = f(x).$$

证 由例 1 知  $\frac{1}{2m\pi} \int_{-\pi}^\pi \left[ \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right]^2 dt = 1$ , 故

$$\sigma_m(x) = \frac{1}{2m\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x+t) \left[ \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right]^2 dt,$$

$$f(x) = \frac{1}{2m\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \left[ \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right]^2 dt.$$

因为  $f(x)$  在闭区间上连续, 所以  $f(x)$  一致连续, 故  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使得只要  $|t| > \delta$ , 则对一切  $x$ , 有  $|f(x+t) - f(x)| < \epsilon/2$ .

若记  $M$  为  $|f(x)|$  在  $[-\pi, \pi]$  上的最大值, 则

$$\begin{aligned} & |\sigma_m(x) - f(x)| \\ &= \frac{1}{2m\pi} \left| \int_{-\pi}^\pi [f(x+t) - f(t)] \left[ \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right]^2 dt \right| \\ &< \frac{2M}{2m\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} \left[ \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right]^2 dt + \frac{\epsilon}{4m\pi} \int_{-\delta}^\delta \left[ \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right]^2 dt \\ &\quad + \frac{2M}{2m\pi} \int_\delta^\pi \left[ \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right]^2 dt, \end{aligned}$$

其中  $\frac{1}{2m\pi} \int_{-\delta}^\delta \left[ \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right]^2 dt < \frac{1}{2m\pi} \int_{-\pi}^\pi \left[ \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right]^2 dt = 1$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^\pi \left[ \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right]^2 dt &= \int_\delta^\pi \left[ \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right]^2 dt \\ &< \int_\delta^\pi \frac{dt}{\sin^2(\delta/2)} < \frac{\pi}{\sin^2(\delta/2)}, \end{aligned}$$

所以  $|\sigma_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{2M}{m\sin^2(\delta/2)}$ .

在  $n$  充分大时, 取  $m > n$ , 就有  $\frac{2M}{m\sin^2(\delta/2)} < \frac{\epsilon}{2}$ , 于是

$$|\sigma_m(x) - f(x)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

即

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m(x) = f(x).$$

本命题称为费吉尔定理,说明收敛是一致收敛的,从而当

$|\sigma_m(x) - f(x)| < \sqrt{\epsilon/2\pi}$  时,有

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_m(x) - f(x)|^2 dx < \epsilon \rightarrow 0.$$

例 4 设  $S_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx$ ,  $S_0(x) = \frac{1}{2}$ , 且

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_n(x)}{n+1},$$

证明: (1)  $\sigma_n(x) = \frac{1}{2(n+1)} \left[ \frac{\sin(n+1)x/2}{\sin(x/2)} \right]^2$ ;

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(x) dx = \pi.$$

证 (1) 利用三角公式

$$2\sin(x/2)\cos kx = \sin(k+1/2)x - \sin(k-1/2)x,$$

有

$$S_0(x) = \frac{1}{2} = \frac{\sin(x/2)}{2\sin(x/2)}.$$

$$S_n(x) = 1/2 + \sum_{k=1}^n \cos kx$$

$$= \frac{\sin(x/2) + \sum_{k=1}^n [\sin(k+1/2)x - \sin(k-1/2)x]}{2\sin(x/2)}$$

$$= \frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}.$$

再由  $2\sin(x/2)\sin(k+1/2)x = \cos kx - \cos(k+1)x$ ,

得  $\sin(k+1/2)x = \frac{\cos kx - \cos(k+1)x}{2\sin(x/2)},$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(k + \frac{1}{2}\right)x &= \frac{1}{2\sin(x/2)} \sum_{k=0}^n [\cos kx - \cos(k+1)x] \\ &= \frac{1 - \cos(n+1)x}{2\sin(x/2)} = \frac{\sin^2(n+1)x/2}{\sin(x/2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{于是 } \sigma_n(x) &= \frac{S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_n(x)}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n S_k(x) = \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^n \frac{\sin(k+1/2)x}{\sin(x/2)} \\
&= \frac{1}{2(n+1)} \left[ \frac{\sin(n+1)x/2}{\sin(x/2)} \right]^2.
\end{aligned}$$

(2) 因为原点是  $\sigma_n(x)$  的可去间断点, 所以  $\sigma_n(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上可积. 又  $\sigma_n(x)$  是偶函数, 故

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(x) dx = 2 \int_0^{\pi} \sigma_n(x) dx,$$

而  $\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)} dx = \frac{\pi}{2}$  (见例 1(1)).

于是

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(x) dx &= 2 \int_0^{\pi} \sigma_n(x) dx = \frac{2}{n+1} \int_0^{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{\sin(k+1/2)x}{\sin(x/2)} dx \\
&= \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n \int_0^{\pi} \frac{\sin(k+1/2)x}{\sin(x/2)} dx \\
&= \frac{2}{n+1} \cdot (n+1) \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.
\end{aligned}$$

**例 5** 设  $0 < \alpha < 1$ ,  $f(x) = \cos \alpha x$  在  $(-\pi, \pi)$  内的傅里叶级数为

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \left[ \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \cos nx \right],$$

证明: (1)  $\frac{\pi}{\sin \alpha \pi} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2};$

(2)  $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2 \pi^2} \quad (0 < x < \pi);$

(3)  $\pi = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{2x \sin x}{x^2 - n^2 \pi^2} dx;$

(4)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$



证 (1) 在所给傅里叶级数中令  $x=0$ , 即得

$$\frac{\pi}{\sin \alpha \pi} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \cos nx.$$

(2)  $\forall x \in (0, \pi)$ , 令  $\alpha = x/\pi$ , 则  $0 < \alpha < 1$ , 代入题(1)的结果, 化简得

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2 \pi^2}.$$

(3) 将上面结果改写为

$$1 = \frac{\sin x}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x \sin x}{x^2 - n^2 \pi^2} \quad (0 < x < \pi),$$

令

$$u_0(x) = \begin{cases} \sin x / x, & 0 < x < \pi, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

$$u_1(x) = \begin{cases} -2x \sin x / (x^2 - \pi^2), & 0 \leq x \leq \pi, \\ 1, & x = \pi, \end{cases}$$

$$u_n(x) = (-1)^n \frac{2x \sin nx}{x^2 - n^2 \pi^2} \quad (n \geq 2, 0 \leq x \leq \pi),$$

则  $\forall n \geq 0, u_n(x)$  在  $[0, \pi]$  上连续, 且由题(1)有

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

当  $n \geq 2$  时,  $\forall x \in [0, \pi]$ , 有

$$|u_n(x)| \leq \frac{2\pi}{n^2 \pi^2 - \pi^2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2 - 1}.$$

而  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2} < +\infty$ , 所以  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$  在  $[0, \pi]$  上收敛且一致收敛, 故可在  $[0, \pi]$  上逐项积分, 得

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} u_n(x) dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{2x \sin x}{x^2 - n^2 \pi^2} dx.$$

(4) 将所给无穷区间上的积分转化为有限区间上的积分的级数, 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x} dx + \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-n\pi}^{-(n-1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx \\
&= \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(t+n\pi)}{t+n\pi} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(t-n\pi)}{t-n\pi} dt \\
&= \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^\pi \left[ \frac{\sin t}{t+n\pi} + \frac{\sin t}{t-n\pi} \right] dt \\
&= \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^\pi \frac{2t \sin t}{t^2 - n^2 \pi^2} dt = \pi \text{ (由题(3))}.
\end{aligned}$$

事实上,若将题给傅里叶级数写成

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cos \alpha x}{\sin \alpha \pi} = \frac{1}{2\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha \cos n x}{\alpha^2 - \pi^2},$$

在式中令  $x=\pi$ , 再将  $\alpha\pi$  改写为  $x$ , 可得

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x-n\pi} + \frac{1}{x+n\pi} \right).$$

利用  $\tan x = -\cot(x-\pi/2)$ , 即得

$$\tan \alpha = - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{x-(2n+1)\pi/2} + \frac{1}{x+(2n-1)\pi/2} \right] - \frac{2}{2x-\pi}.$$

可见,利用傅里叶级数的收敛性质,能通过一个函数的傅里叶级数得到许多有用的公式.

**例 6** 设  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  上可积且平方可积,证明贝塞尔不等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

成立. 其中  $a_0, a_n, b_n (n=1, 2, \dots)$  是  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  上的傅里叶系数.

**证** 讨论积分  $\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx$ , 其中

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

因为

$$\begin{aligned}
&|f(x) - S_n(x)|^2 \\
&= (f(x) - S_n(x))(\overline{f(x)} - \overline{S_n(x)}) \\
&= |f(x)|^2 - 2\operatorname{Re} S_n(x) f(x) + |S_n(x)|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{而 } \int_{-\pi}^{\pi} 2\operatorname{Re} S_n(x) f(x) dx &= 2\operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) f(x) dx \\ &= 2\pi \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left( 1 - \frac{k}{n} \right) (a_k^2 + b_k^2) \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |S_n(x)|^2 dx &= \frac{\pi a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n \left( 1 - \frac{k}{n} \right)^2 (a_k^2 + b_k^2) \pi, \\ \text{所以 } \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx + \frac{\pi a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n \left( 1 - \frac{k}{n} \right)^2 (a_k^2 + b_k^2) \pi \\ &\quad - 2\pi \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n \left( 1 - \frac{k}{n} \right) (a_k^2 + b_k^2) \right] \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \frac{\pi a_0^2}{2} - \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \\ &\quad + \frac{\pi}{n^2} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2).\end{aligned}$$

$$\text{由 } \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx \geq 0,$$

$$\text{得 } \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \geq \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) - \frac{\pi}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 (a_k^2 + b_k^2).$$

当  $n \rightarrow \infty$  时, 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 (a_k^2 + b_k^2) = 0$ , 故

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

**例 7** 若  $\{a_n\}, \{b_n\}$  是正项数列且单调减少并趋向于零, 证明:

级数  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  在任何区间  $0 \leq \delta \leq x \leq 2\pi - \delta$  上一致收敛.

**证** 因为, 有

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin[(n+1)x/2] \sin(nx/2)}{\sin(x/2)},$$

$$C_n = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin[(n+1/2)x]}{2\sin(x/2)}.$$

则  $|S_n| < \frac{1}{\sin(\delta/2)} = \eta, \quad |C_n| < \frac{1}{2\sin(\delta/2)} = \frac{\eta}{2}.$

由于  $\{a_n\}, \{b_n\}$  单调减少并趋向于零, 且为正项数列, 故依狄利克雷判别法知, 所证级数收敛.

由  $|S_n| < \eta, |C_n| < \frac{\eta}{2}$ , 即有

$$R_m(x) = \sum_{k=m+1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \rightarrow 0.$$

令  $R'_m(x) = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad R''_m(x) = \sum_{k=m+1}^{\infty} b_k \sin kx,$

则  $R'_n(x) - R'_{n+p}(x)$   
 $= a_{n+1} \cos(n+1)x + \cdots + a_{n+p} \cos(n+p)x$   
 $= a_{n+1}(C_{n+1} - C_n) + \cdots + a_{n+p}(C_{n+p} - C_{n+p-1})$   
 $= -a_{n+1}C_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1})C_k + a_{n+p}C_{n+p}.$

故  $|R'_n(x) - R'_{n+p}(x)|$   
 $< [a_{n+1} + (a_{n+1} - a_{n+p}) + a_{n+p}] \frac{\eta}{2} = a_{n+1}\eta.$

由  $\{a_n\} \rightarrow 0$ , 故当  $a_{N+1} < \epsilon/\eta$  时,  $\forall n > N$  及  $p \in \mathbb{N}$ , 有

$$|R'_n(x) - R'_{n+p}(x)| < \epsilon.$$

由于  $N$  与  $x$  无关, 所以  $R'_m(x)$  一致收敛于零.

同样可证  $R''_m(x)$  一致收敛于零, 从而  $R_m(x)$  一致收敛于零, 即题给级数一致收敛.

**例 8** 若  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的连续函数, 且存在连续的一阶和二阶导数. 证明:  $f(x)$  的傅里叶级数一致收敛.

**证** 因为  $f(x)$  以  $2\pi$  为周期, 所以  $f'(x), f''(x)$  仍以  $2\pi$  为周期.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{\sin nx}{n\pi} f(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx, \end{aligned}$$

$$= \frac{\cos nx}{n^2} f'(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx dx.$$

由  $f'(x)$  及  $\cos nx$  的周期性知, 第一项等于零; 又  $|f''(x)| < M$  (闭区间上连续), 故  $|a_n| < 2M/n^2$ . 同理,  $|b_n| < 2M/n^2$ .

由  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  的收敛性知,  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$  收敛, 依例 7 知,  $f(x)$  的傅里叶级数收敛, 且一致收敛.

**例 9** 若  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上围变, 证明: 存在常数  $k > 0$ ,  $\forall$  傅里叶系数  $a_n, b_n$ , 有  $|a_n| \leq k/n$ ,  $|b_n| \leq k/n$ .

**证** 若  $f(x)$  以  $2\pi$  为周期, 在  $[-\pi, \pi]$  上只有有限个第一类间断点和有限个极值点, 则称函数  $f(x)$  围变.

当  $f(x)$  是正的围变递增函数时, 有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{f(x)}{\pi} \int_{\zeta}^{\pi} \cos nx dx \\ &= \frac{f(\pi)}{\pi} \cdot \frac{1}{n} (\sin n\pi - \sin n\zeta), \end{aligned}$$

故  $|a_n| < \frac{|f(\pi)|}{n}$ . 同理  $|b_n| < \frac{|f(\pi)|}{n}$ .

由于  $f(x)$  围变, 则  $f(x)$  必可表示为两个非负单调增加函数之差 (见疑难解析 2), 即  $f(x) = F(x) - h(x)$ . 于是

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [F(x) - h(x)] \cos nx dx \\ &= \frac{F(\pi)}{\pi} \int_{\zeta}^{\pi} \cos nx dx - \frac{h(\pi)}{\pi} \int_{\zeta}^{\pi} \cos nx dx, \end{aligned}$$

即  $|a_n| < \left| \frac{F(\pi)}{n} \right| + \left| \frac{h(\pi)}{n} \right|.$

同理  $|b_n| < \left| \frac{F(\pi)}{n} \right| + \left| \frac{h(\pi)}{n} \right|.$

故可以选出一个常数  $k$ , 使得  $n|a_n| \leq k, n|b_n| \leq k$ , 对一切  $n$  成立. 从而命题得证.

**例 10** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 用傅里叶展开式证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) |\sin nx| dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) dx.$$

证 因为  $|\sin x|$  有一个一致收敛的傅里叶展开式(见第一节例 11(1))

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{(2k)^2 - 1} \quad (-\infty, +\infty),$$

所以 
$$|\sin nx| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2knx}{(2k)^2 - 1} \quad [-\pi, \pi].$$

若用有界函数乘以一致收敛级数的各项,则所得级数仍一致收敛. 而  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上可积, 故  $\exists M$ , 使得  $\forall x \in [-\pi, \pi]$ , 有  $|f(x)| \leq M$ . 于是

$$f(x) |\sin nx| = \frac{2}{\pi} f(x) - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} f(x) \frac{\cos 2knx}{4k^2 - 1}, \quad [-\pi, \pi]$$

一致收敛. 逐项积分得

$$\int_a^b f(x) |\sin nx| dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) dx - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(x) \cos 2knx}{4k^2 - 1} dx.$$

因为 
$$\left| \int_a^b \frac{f(x) \cos 2knx}{4k^2 - 1} dx \right| \leq \frac{M(b-a)}{4k^2 - 1},$$

而  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M(b-a)}{4k^2 - 1}$  收敛, 故  $\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \frac{f(x) \cos 2knx}{4k^2 - 1} dx$  一致收敛.

取  $n \rightarrow \infty$  的极限, 并利用黎曼引理, 得

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) |\sin nx| dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) dx - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_a^b f(x) \cos 2knx dx}{4k^2 - 1} = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

例 11 设  $f(x)$  在  $[0, \pi]$  上有连续导数, 且  $f'(x)$  在  $[0, \pi]$  上分段光滑,  $\int_0^\pi f(x) dx = 0$ . 证明:  $\int_0^\pi [f'(x)]^2 dx \geq \int_0^\pi [f(x)]^2 dx$ .

证 对  $f(x)$  进行偶延拓, 故  $a_0 = 0, b_n = 0$ .

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad x \in [0, \pi],$$

$$f'(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin nx, \quad x \in [0, \pi].$$

由巴塞瓦等式得

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x)]^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2,$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [f'(x)]^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x)]^2 dx,$$

所以 
$$\int_0^{\pi} [f'(x)]^2 dx \geq \int_0^{\pi} [f(x)]^2 dx.$$

**例 12** 设  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的连续函数, 证明:

(1)  $F(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt$  ( $h > 0$ ) 也是周期为  $2\pi$  的连续函数;

(2)  $\forall \epsilon > 0, \exists h > 0$ , 使得在  $[-\pi, \pi]$  上, 有  $|f(x) - F(x)| < \epsilon$ .

(3)  $\forall \epsilon < 0, \exists n$  阶三角多项式  $\tilde{S}_n(x)$ , 使得在  $[-\pi, \pi]$  上有  $|f(x) - \tilde{S}_n(x)| < 2\epsilon$ .

**证** 设  $f(x)$  的傅里叶级数为  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ , 则对傅里叶级数逐项积分后, 得

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n \sin nh}{n} \cos nx + \frac{b_n \sin nh}{n} \sin nx \right]. \end{aligned}$$

可以由此讨论所证命题.

下面给出另一种形式的但更直接的证明.

(1) 作代换  $t = x + y$ , 得

$$F(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x+y) dy,$$

则  $F(x+2\pi) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x+2\pi+y) dy$  ( $f(x)$  周期为  $2\pi$ )

$$= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x+y) dy = F(x),$$

故  $F(x)$  是以  $2\pi$  为周期的连续函数. 又

$$F(x) = \frac{1}{2h} \left[ \int_0^{x+h} f(t) dt - \int_0^{x-h} f(t) dt \right],$$

由变上限函数性质与  $f(x)$  的连续性知,  $F(x)$  也是连续函数.

(2) 由积分中值定理,  $\forall x \in [-\pi, \pi]$  及  $h > 0$ ,  $\exists \xi_x \in [x-h, x+h]$ , 使得

$$F(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt = f(\xi_x).$$

又由  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上的一致连续性,  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使得  $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ , 只要  $|x_1 - x_2| < \delta$ , 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

取  $h \in (0, \delta)$ , 由  $|\xi_x - x| \leq h < \delta$ , 即得

$$|F(x) - f(x)| = |f(\xi_x) - f(x)| < \epsilon \quad (|x| \leq \pi).$$

(3) 因为  $F(x)$  是变限积分函数, 所以  $F(x)$  连续可微, 有

$$F'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (|x| \leq \pi),$$

所以  $F'(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上二阶连续可导,  $F(x)$  的傅里叶级数一致收敛于  $F(x)$ .

设  $F(x)$  的傅里叶级数的部分和为  $\tilde{S}_k(x)$ , 则当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\forall x \in [-\pi, \pi]$ ,  $\tilde{S}_k(x) \rightarrow F(x)$ . 于是,  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists n \in \mathbf{N}$ , 使得

$$|F(x) - \tilde{S}_n(x)| < \epsilon \quad (|x| \leq \pi).$$

故  $\forall \epsilon > 0$ , 先取定  $h$ , 使得  $|F(x) - f(x)| < \epsilon$  成立, 再取定  $\tilde{S}_n(x)$ , 使得  $|F(x) - \tilde{S}_n(x)| < \epsilon$  成立. 由此两式即得

$$\begin{aligned} |f(x) - \tilde{S}_n(x)| &\leq |f(x) - F(x)| + |F(x) - \tilde{S}_n(x)| \\ &< 2\epsilon \quad (|x| \leq \pi). \end{aligned}$$

连续函数的傅里叶级数可以在一些点上发散, 所以不一定收敛, 更不一定一致收敛. 但是连续的周期函数却总可用三角多项式一致逼近.

关于傅里叶级数的应用与傅里叶级数的复数形式, 本书将不予讨论.



## 第十章 多元函数微分学

本章先讨论多元实值函数的微分学,而把向量函数的微分学放在第十二章单独进行讨论.

### 第一节 平面点集与多元函数

#### 主要内容

##### 一、平面点集

1. 坐标平面上满足某种条件  $P$  的点的集合称为平面点集,记作  $E = \{(x, y) | (x, y) \text{ 满足条件 } P\}$ .

平面点集  $\{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\}$  称为以点  $A(x_0, y_0)$  为中心的  $\delta$  圆邻域,  $\{(x, y) | |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta\}$  称为以点  $A(x_0, y_0)$  为中心的  $\delta$  方邻域. 并且以记号  $U(A; \delta)$  或  $U(A)$  不加区分地表示这两种邻域.  $U^\circ(A; \delta)$  或  $U^\circ(A)$  表示点  $A$  的去心邻域.

2. 任意点  $A \in \mathbf{R}^2$  与任意点集  $E \subset \mathbf{R}^2$  的关系

若存在点  $A$  的某邻域  $U(A)$ , 使得  $U(A) \subset E$ , 且称  $A$  为点集  $E$  的内点;  $E$  的全体内点构成  $E$  的内部, 记作  $\text{int} E$ .

若存在点  $A$  的某邻域  $U(A)$ , 使得  $U(A) \cap E = \emptyset$ , 则称  $A$  为点集  $E$  的外点.

若在点  $A$  的任何邻域内既有属于  $E$  的点, 又有不属于  $E$  的点, 则称  $A$  是集合  $E$  的边界点.

$E^c = \mathbf{R}^2 \setminus E$  是  $E$  关于  $\mathbf{R}^2$  的余集;  $E$  的边界点的全体构成  $E$  的

边界,记作  $\partial E$ .

### 3. 点 $A$ 与数集 $E$ 中点的关系

若在  $A$  任一邻域  $U^\circ(A)$  内均含有  $E$  中的点,则称  $A$  是  $E$  的聚点.聚点可以属于  $E$ ,也可以不属于  $E$ .

若点  $A \in E$ ,但不是  $E$  的聚点,则称  $A$  是  $E$  的孤立点.

### 4. 一些重要的平面点集

若平面点集  $E$  的每一点都是  $E$  的内点,则称为  $E$  为开集.

若平面点集  $E$  的所有聚点都属于  $E$ ,则称为  $E$  为闭集.若  $E$  没有聚点, $E$  也称为闭集.

$\mathbf{R}^2$  与  $\emptyset$  是既开又闭的点集.

连通(即  $E$  中任意两点可以用一条完全在  $E$  内的折线相连接)的开集  $E$  称为开域.

开域及其边界构成的点集称为闭域.

开域、闭域或者开域及其部分边界点构成的点集统称为区域.

### 5. 点集的有界性

对于平面点集  $E$ ,若存在原点的某邻域  $U(0, r)$ ,使得  $E \subset U(0, r)$  ( $r > 0$ ),则称  $E$  是有界点集.否则,称  $E$  是无界点集.

$E$  也可以表示为:存在矩形区域  $D = [a, b] \times [c, d] \supset E$ .或者用点集的直径  $d(E) = \sup_{P_1, P_2 \in E} \rho(P_1, P_2)$  来讨论:当且仅当  $d(E)$  为有限值时, $E$  是有界点集.其中

$$\rho(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

对  $\mathbf{R}^2$  平面上任何三点  $P_1, P_2, P_3$ ,下式成立:

$$\rho(P_1, P_2) \leq \rho(P_1, P_3) + \rho(P_2, P_3).$$

## 二、 $\mathbf{R}^2$ 上的完备性定理

1. 设  $\{P_n\} \subset \mathbf{R}^2$  为平面点列,  $P_0$  为  $\mathbf{R}^2$  定点.若  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$ ,使得当  $n > N$  时,有  $P_n \in U(P_0)$ ,则称点列  $\{P_n\}$  收敛于  $P_0$ ,记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0 \quad \text{或} \quad P_n \rightarrow P_0, n \rightarrow \infty.$$

2. 柯西收敛准则 平面点列  $\{P_n\}$  收敛的充要条件是:  $\forall \epsilon >$

0,  $\exists N \in \mathbf{N}$ , 使得当  $n > N$  时,  $\forall P \in \mathbf{N}$ , 总有  $\rho(P_n, P_{n+p}) < \varepsilon$ .

3. 闭域套定理 设  $\{D_n\}$  是  $\mathbf{R}^2$  中的闭域列, 满足:  $D_n \supset D_{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;  $d_n = d(D_n)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ , 则存在惟一的点  $P_0 \in D_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

4. 聚点定理 设  $E \subset \mathbf{R}^2$  为有界无限点集, 则  $E$  在  $\mathbf{R}^2$  中至少有一个聚点.

5. 有限覆盖定理 设  $D \subset \mathbf{R}^2$  为有界闭域,  $\{\Delta_\alpha\}$  为一开域族, 覆盖了  $D$  (即  $D \subset \bigcup_\alpha \Delta_\alpha$ ), 则在  $\{\Delta_\alpha\}$  中必存在有限个开域  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ , 它们也覆盖了  $D$  (即  $D \subset \bigcup_{i=1}^m \Delta_i$ ).

### 三、二元函数与 $n$ 元函数

1. 设平面点集  $D \subset \mathbf{R}^2$ , 若按某对应法则  $f$ ,  $D$  中每一点  $P(x, y)$  都有惟一确定的实数  $Z$  与之对应, 则称  $f$  为定义在  $D$  上的二元函数 (或称  $f$  为  $D$  到  $\mathbf{R}$  的一个映射), 记作  $f: D \rightarrow \mathbf{R}, P \mapsto Z$ .

若二元函数的值域为有界数集, 则该函数称为有界函数.

2.  $n$  个有序实数组  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的全体称为  $n$  维向量空间 (或  $n$  维空间), 记作  $\mathbf{R}^n$ . 任一有序实数组  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  称为  $\mathbf{R}^n$  的一个点;  $n$  个实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是该点的坐标.

设  $E$  为  $\mathbf{R}^n$  中的点集, 若按某对应法则  $f$ , 使得  $E$  中每一点  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  都有惟一的一个实数与之对应, 则称  $f$  为定义在  $E$  上的  $n$  元函数 (或称  $f$  为  $E \subset \mathbf{R}^n$  到  $\mathbf{R}$  的一个映射), 记作  $f: E \rightarrow \mathbf{R}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto y$  或  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ .

## 疑难解析

1. 内点、外点、边界点、聚点及孤立点与数集  $E$  有何关系?

答  $E$  的内点一定属于  $E$ ;  $E$  的外点一定不属于  $E$ ;  $E$  的边界点可能属于  $E$ , 也可能不属于  $E$ ; 聚点可能属于  $E$ , 也可能不属于  $E$ ; 孤立点一定属于  $E$ .

它们之间还存在这样的关系:孤立点一定是界点;内点与非孤立的界点一定是聚点;既不是聚点又不是孤立点的点一定是外点.

## 2. $\mathbf{R}^2$ 上的完备性定理与实数系的完备性定理有什么联系?

答  $\mathbf{R}^2$  上的完备性定理是实数系的完备性定理的推广,它们同样是二元函数极限理论的基础.

这些定理的证明方法与实数系的完备性定理的证明方法完全相同,仅需将闭区间换成闭区域.因此,本章不多讨论.

## 方法、技巧与典型例题分析

本节讨论两个问题:一是平面区域问题与  $\mathbf{R}^2$  上的完备性定理.通过概念来认识实际问题,区分实际的平面区域是哪类区域,并进行讨论.这需要读者对概念有清晰的认识,能运用概念辨析实际问题.二是函数的基本概念,即函数式、函数值、函数定义域及其点集形式的讨论与确定.可以利用讨论一元函数的技巧与方法来讨论二元与  $n$  元函数的同类问题.

**例 1** 证明:邻域是开集.

**证** 设邻域为  $U(a)$ ,  $A$  为  $U(a)$  上任一点,则  $|A-a|<\delta$ . 因此,存在正数  $h$ ,使得  $|A-a|<\delta-h$ . 故  $\forall x \in U(A;h)$ , 以下不等式成立:

$$|x-a| \leq |x-A| + |A-a| < \delta.$$

所以,  $x \in U(a)$ , 即  $A$  是  $U(a)$  的内点. 依定义知,  $U(a)$  为开集.

**例 2** 证明:  $E$  为闭集的充分必要条件是  $E^c$  是开集.

**证 必要性** 若  $E$  为闭集,则因为  $E$  的一切聚点都属于  $E$ , 从而  $\forall x \in E^c$ ,  $x$  不是  $E$  的聚点. 即存在  $U(x)$ , 使得  $U(x) \cap E = \emptyset$ , 也就是  $U(x) \subset E^c$ . 故  $E^c$  是开集.

**充分性**  $\forall$  任  $x \in E^c$ , 因为  $E^c$  是开集, 所以  $\exists U(x) \subset E^c$ , 即  $x$  不是  $E$  的聚点. 故若  $E$  有聚点, 则聚点必属于  $E$ .

类似可证:  $E$  为开集的充分必要条件是  $E^c$  是闭集.

例 3 证明:

(1) 任意一组开集  $\{E_\alpha\}$  的并集  $(\bigcup_\alpha E_\alpha)$  是开集;

(2) 任意一组闭集  $\{E_\alpha\}$  的交集  $(\bigcap_\alpha E_\alpha)$  是闭集;

(3) 任意有限个开集  $E_1, E_2, \dots, E_m$  的交集  $(\bigcap_{i=1}^m E_i)$  是开集;

(4) 任意有限个闭集  $E_1, E_2, \dots, E_m$  的并集  $(\bigcup_{i=1}^m E_i)$  是闭集.

证 要用到德·摩根(De-Morgan)公式: 设  $\{E_\alpha\}$  是若干(有限或无限多个)  $\mathbf{R}^k (k=2, 3, \dots, n)$  中子集  $E_\alpha$  的一组, 则成立

$$(\bigcup_\alpha E_\alpha)^c = (\bigcap_\alpha E_\alpha^c); \quad (\bigcap_\alpha E_\alpha)^c = (\bigcup_\alpha E_\alpha^c).$$

其证明见上册第一章.

(1) 若  $x \in (\bigcup_\alpha E_\alpha)$ , 则存在某个  $\alpha$ , 使得  $x \in E_\alpha$ . 而  $E_\alpha$  是开集, 故  $x$  是  $E_\alpha$  的内点, 即  $(\bigcup_\alpha E_\alpha)$  的内点, 从而  $(\bigcup_\alpha E_\alpha)$  是开集.

(2) 依德·摩根公式,  $(\bigcap_\alpha E_\alpha)^c = (\bigcup_\alpha E_\alpha^c)$ . 由于  $E_\alpha$  是闭集, 故  $E_\alpha^c$  是开集. 由题(1)知,  $(\bigcup_\alpha E_\alpha^c)$  是开集, 即  $(\bigcap_\alpha E_\alpha)^c$  是开集, 从而  $(\bigcap_\alpha E_\alpha)$  是闭集.

(3) 若  $x \in (\bigcap_{i=1}^m E_i)$ , 则  $x \in$  某  $E_i$ , 故存在  $U(x; \delta_i)$ , 使得  $U(x; \delta_i) \subset E_i$ . 可以取  $\delta = \min_{0 \leq i \leq m} (\delta_i)$ , 则对任一  $i (i=1, 2, \dots, m)$ ,  $U(x; \delta)$  成立, 从而  $x$  是  $(\bigcap_{i=1}^m E_i)$  的内点, 即  $(\bigcap_{i=1}^m E_i)$  是开集.

(4) 类似题(2)的证法, 利用德·摩根公式和余集概念, 由题(3)的结论即可得出. 请读者自己写出证明过程.

但是, 任意个开集的交集不一定是开集, 任意个闭集的和集不一定是闭集.

例 4 求下列各集的导集(所有聚点构成的集合), 并说明它是否闭集.

(1)  $E = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 2\}$ ;

(2)  $E = \{(1/m, 1/n) | m, n \in \mathbf{N}\}$ ;

(3)  $E = \{(x, y) | x, y \text{ 为整数}\}$ ;

(4)  $E = \{(x, y) | x, y \text{ 为有理数}\}$ .

解 (1) 导集  $E' = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 2\}$ ,  $E$  是开集,  $E'$  是闭集.

(2) 导集  $E' = \{(0, 0)\}$ ,  $E$  不是闭集.

(3) 导集  $E' = \emptyset$ ,  $E$  是闭集.

(4) 导集  $E' = \mathbf{R}^2$ ,  $E$  不是闭集.

例 5 下列集合是开集还是闭集? 求出它们的内部(int)和边界, 并确定是什么区域.

(1)  $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ ;

(2)  $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | y < x^2\}$ ;

(3)  $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | -1 < x < 1, y = 0\}$ .

解 (1)  $E$  是闭集.

$$\text{int}E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x > 0, y > 0, x + y < 1\}.$$

$$\partial E = \{(x, y) | x = 0, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, y) | y = 0, 0 \leq x \leq 1\}, \\ \cup \{(x, y) | x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0\},$$

$E$  是有界闭区域.

(2)  $E$  是开集.  $\text{int}E = E$ ,  $\partial E = \{(x, y) | y = x^2\}$ .  $E$  是无界开区域.

(3)  $E$  既不是开集又不是闭集.  $\text{int}E = \emptyset$ .  $\partial E = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, y = 0\}$ .  $E$  不是区域.

例 6 画出下列平面区域, 并指出它是什么样的区域.

(1)  $\{(x, y) | x^2 > y\}$ ; (2)  $\{(x, y) | x^2 - y^2 \leq 1\}$ ;

(3)  $\{(x, y) | |xy| \leq 1\}$ ; (4)  $\{(x, y) | |x| + y \leq 1\}$ .

解 (1) 如图 10.1(a) 所示是开区域, 无界区域.

(2) 如图 10.1(b) 所示是闭区域, 无界区域.

(3) 如图 10.2(a) 所示是闭区域, 无界区域.

(4) 如图 10.2(b) 所示是闭区域, 无界区域.

例 7 画出下列空间区间, 并指出它们各是什么区域.

(1)  $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$ ;

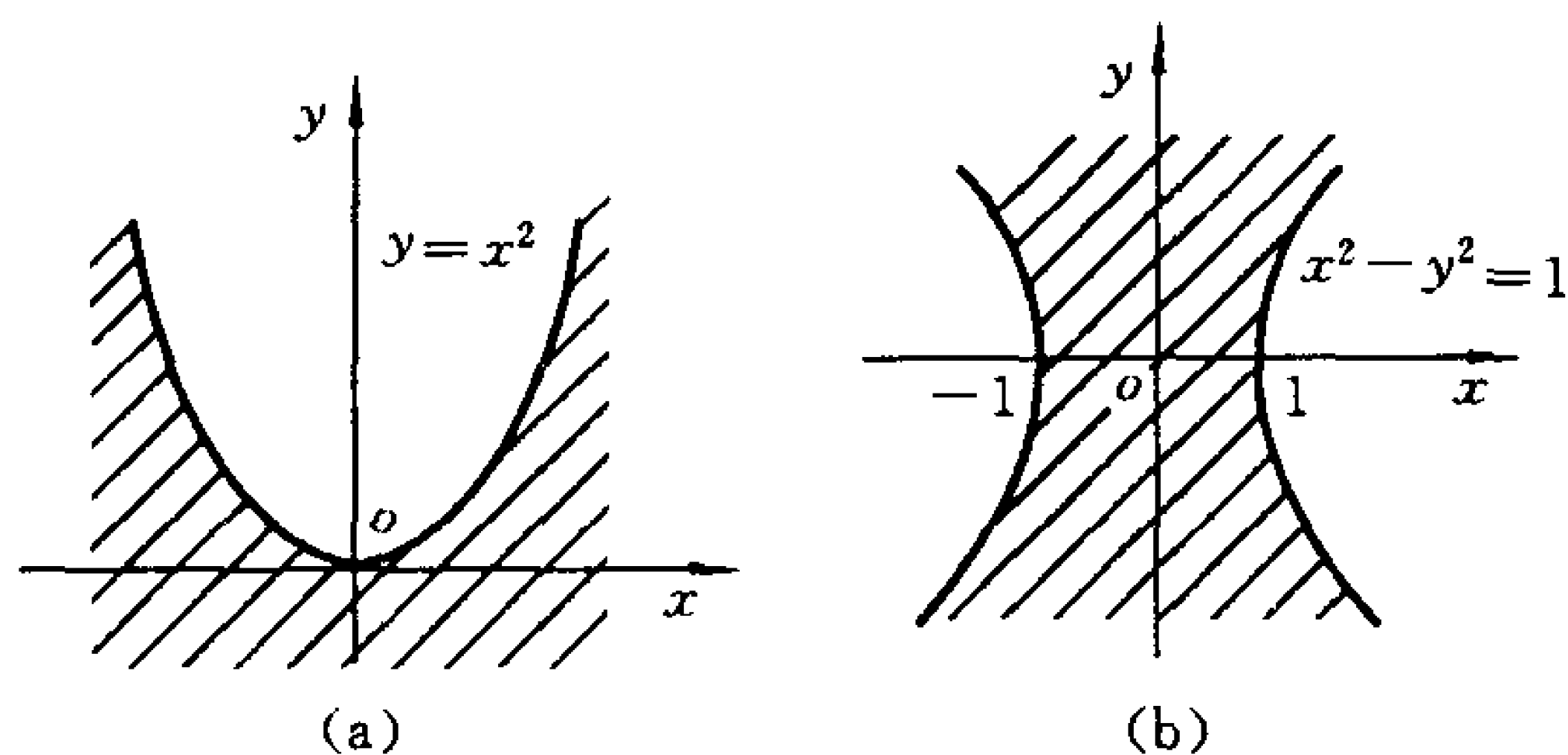


图 10.1

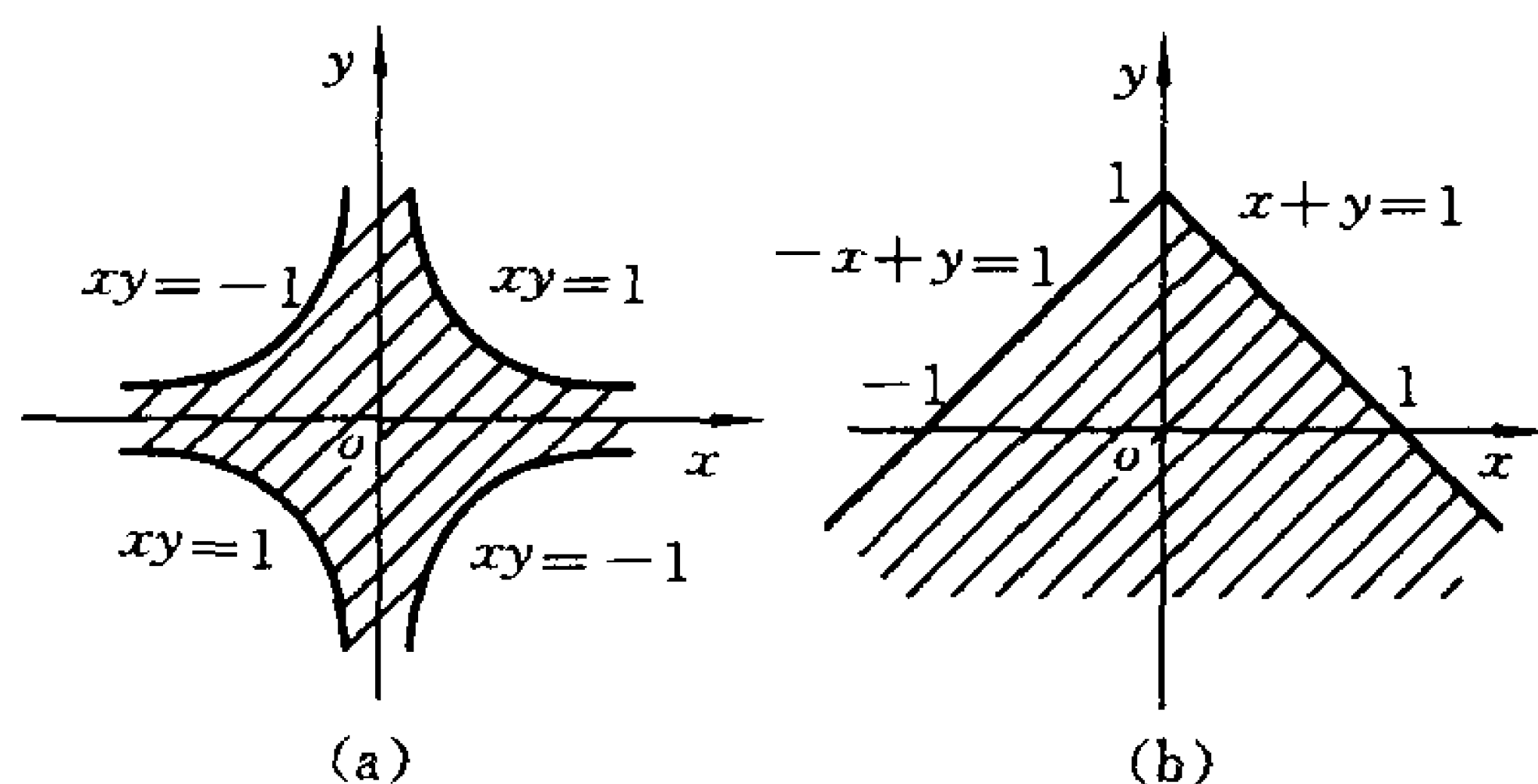


图 10.2

(2)  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, |z| \leq b\};$

(3)  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < z, z < 2\};$

(4)  $V = \{(x, y, z) \mid |x| + |y| + |z| \leq 1\}.$

解 (1) 是以原点为中心、半径等于 3 的球体, 是闭区域, 如图 10.3(a) 所示.

(2) 是以  $z$  轴为中心轴、半径等于  $a$ 、高为  $2b$  的圆柱体, 是闭区域, 如图 10.3(b) 所示.

(3) 是以原点为顶点、 $z$  轴为中心轴、开口向上的旋转抛物面  $x^2 + y^2 = z$  与平面  $z = 2$  所围立体的内部, 是开区域, 如图 10.4(a) 所示.

(4) 是以原点中心、八个平面所围成的八面体区域, 是闭区域, 如图 10.4(b) 所示.

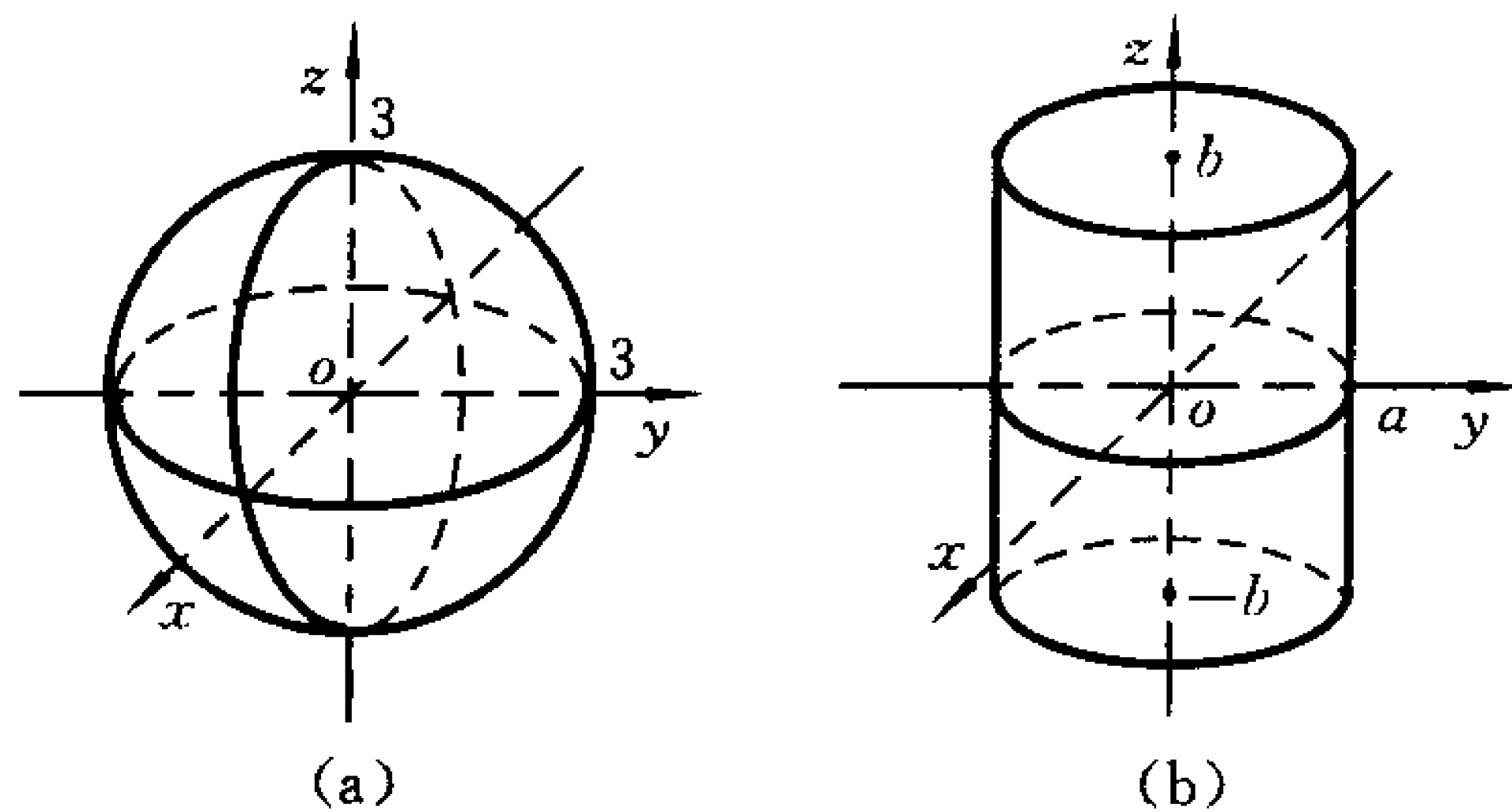


图 10.3

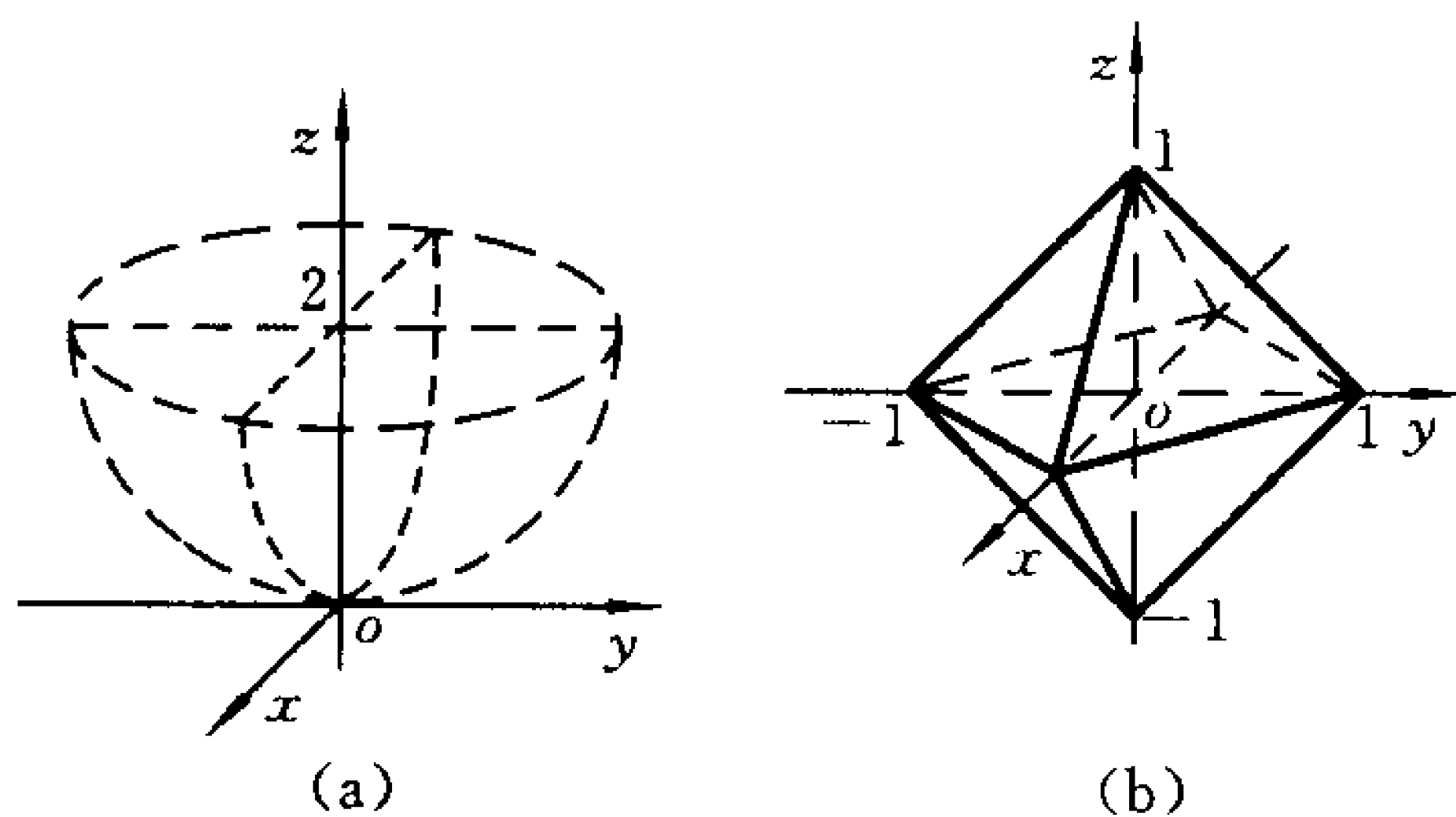


图 10.4

**例 8** 证明: 点  $P$  是  $E$  的聚点的充分必要条件是:  $\forall \delta > 0, U^\circ(P; \delta) \cap E \neq \emptyset$ .

**证 必要性** 若  $P$  是  $E$  的聚点, 则  $\forall \delta > 0, U(P; \delta)$  内有  $E$  的无限多个点, 故  $U^\circ(P; \delta) \cap E \neq \emptyset$ .

**充分性** 若  $\forall n \in \mathbf{N}, U^\circ(P; 1/n) \cap E \neq \emptyset$ , 即  $\exists P_n \in U^\circ(P; 1/n) \cap E$ . 这样,  $\forall \delta > 0, \exists N \in \mathbf{N}$ , 使得当  $\delta > 1/N$  时, 有  $U^\circ(P; 1/N) \subset U^\circ(P; \delta)$ . 于是,  $\forall n > N$ , 有无限多个  $P_n \in E$ , 使得  $P_n \in U^\circ(P; \delta)$ , 故  $P$  是  $E$  的聚点.

**例 9** 利用闭区域套定理证明: 三角形的中线交于一点.

**证** 记带边界三角形为  $\triangle ABC$ , 它是一个闭集.

如图 10.5 所示,  $\triangle ABC$  的三中线包含在  $\triangle ABC$  内, 三中线又构成  $\triangle A_1B_1C_1$ , 有  $\triangle A_1B_1C_1 \subset \triangle ABC$ .



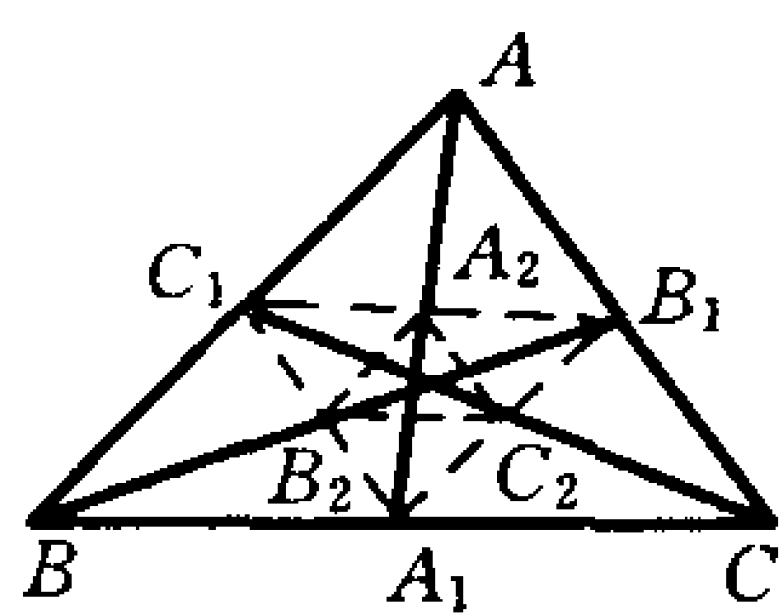


图 10.5

$\triangle ABC$  三中线的一部分恰为  $\triangle A_1B_1C_1$  的三中线, 且  $\triangle ABC$  三中线两两的交点也是  $\triangle A_1B_1C_1$  三中线两两的交点.  $\triangle A_1B_1C_1$  的三中线又构成  $\triangle A_2B_2C_2$ , 有  $\triangle A_2B_2C_2 \subset \triangle A_1B_1C_1$ .  $\triangle A_1B_1C_1$  的三中线恰为  $\triangle A_2B_2C_2$  的三中线. 如此继续, 得一闭三角形区域套

$$\triangle ABC \supset \triangle A_1B_1C_1 \supset \triangle A_2B_2C_2 \supset \cdots,$$

且有  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ . 因此, 存在惟一的点  $o$  属于闭三角形区域套, 点  $o$  即三角形三中线的交点.

**例 10** 证明有限覆盖定理: 设  $D \subset \mathbb{R}^2$  为一有界闭区域,  $\{\Delta_\alpha\}$  为一开域族, 它覆盖  $D$  (即  $D \subset \bigcup_\alpha \Delta_\alpha$ ), 则在  $\{\Delta_\alpha\}$  中必存在有限个开域  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ , 它们同样覆盖了  $D$  (即  $D \subset \bigcup_{i=1}^m \Delta_i$ ).

**证** (仿照实数系的有限覆盖定理的证明) 用反证法. 设在  $\{\Delta_\alpha\}$  中不存在有限个开域  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$  可以覆盖  $D$ . 将  $D$  等分为四个子域时, 其中至少有一个子域不能被  $\{\Delta_\alpha\}$  中有限个子域所覆盖, 记此子域为  $D_1$ , 且  $d(D_1) = \frac{1}{2}d(D)$ .

再将  $D_1$  等分为四个子域. 同样地, 其中至少有一个子域不能被  $\{\Delta_\alpha\}$  中有限个开域所覆盖, 记此子域为  $D_2$ , 且  $d(D_2) = \frac{1}{2^2}d(D)$ .

如此继续, 则得到一个闭区域列  $\{D_n\} (n=1, 2, \dots)$ , 有

$$D \supset D_1 \supset D_2 \supset \cdots, \quad \text{即} \quad D_n \supset D_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$d(D_n) = \frac{1}{2^n}d(D) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

每一个闭域  $D_n$  都不能用  $\{\Delta_\alpha\}$  中有限个开域来覆盖. 依闭区域套定理, 存在惟一的点  $P \in D_n, n=1, 2, \dots$ . 但  $P$  必含于  $\{\Delta_\alpha\}$  的某一个开域  $\Delta$  内, 当  $n$  充分大时, 有  $D_n \subset \Delta$ . 此式说明,  $\{\Delta_\alpha\}$  中的一个开域  $\Delta$  即可覆盖  $D_n$ , 从而与假设下推出的  $D_n$  “不能被  $\{\Delta_\alpha\}$  中有限个开域来覆盖”相矛盾. 可见, 假设是错误的, 即在  $\{\Delta_\alpha\}$  中必存在有限个

开域  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ , 它们同样覆盖了  $D$ .

**例 11** 求下列平面点列的极限:

$$(1) \left\{ \frac{(-1)^n}{n}, \frac{n}{n-1} \right\}; \quad (2) \left\{ \frac{n^2+1}{n^2-n+1}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\}.$$

**解** (1) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-1} = 1$ , 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{n}, \frac{n}{n-1} \right\} = (0, 1).$$

(2) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2-n+1} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ , 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n^2+1}{n^2-n+1}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\} = (1, e).$$

这里用到了点列收敛的充要条件(见例 12).

**例 12** 证明: 点列  $\{P_n(x_n, y_n)\}$  收敛于  $P_0(x_0, y_0)$  的充要条件是  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ .

**证 必要性** 因为  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 恒有

$$|x_n - x_0| < \rho(P_n, P_0) < \epsilon,$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . 同理可证,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ .

**充分性** 设  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ , 则  $\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$ , 使得当  $k > N_1$  时,  $|x_k - x_0| < \epsilon / \sqrt{2}$ ; 同样,  $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ , 使得当  $k > N_2$  时,  $|y_k - y_0| < \epsilon / \sqrt{2}$ . 取  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 则当  $k > N$  时, 恒有

$$|x_k - x_0| < \epsilon / \sqrt{2}, \quad |y_k - y_0| < \epsilon / \sqrt{2},$$

于是,  $\forall k > N$ , 有  $\rho(P_k, P_0) < \epsilon$ . 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{P_n(x_n, y_n)\} = P_0(x_0, y_0).$$

**例 13** 求下列函数的表达式:

$$(1) f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \text{ 求 } f\left(1, \frac{y}{x}\right);$$

$$(2) f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \quad (x > 0), \text{ 求 } f(x);$$

(3)  $z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1)$ , 且当  $y=1$  时  $z=x$ , 求函数  $f, z$ ;

(4)  $z = x + y + f(x - y)$ , 且当  $y=0$  时  $z=x^2$ , 求函数  $f, z$ .

解 求函数表达式的方法与一元函数同类题的解法一样, 读者可参看上册中的有关说明.

$$(1) f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{2 \cdot 1 \cdot y/x}{1 + (y/x)^2} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} = f(x, y).$$

$$(2) \text{ 因为 } f\left(\frac{y}{x}\right) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}, \text{ 所以}$$
$$f(x) = \sqrt{1 + x^2}.$$

(3) 因为当  $y=1$  时,  $z=x$ , 所以

$$\begin{aligned} f(\sqrt{x} - 1) &= z - \sqrt{y} \stackrel{y=1}{=} x - 1 \\ &= (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) \\ &= (\sqrt{x} - 1)[(\sqrt{x} - 1) + 2]. \end{aligned}$$

于是

$$f(t) = t(t+2) = t^2 + 2t,$$

$$z = \sqrt{y} + x - 1 \text{ (利用 } f(\sqrt{x} - 1) = x - 1 \text{)}.$$

(4) 因为当  $y=0$  时,  $z=x^2$ , 所以,  $x^2 = x + f(x)$ , 即  $f(x) = x^2 - x$ . 则

$$z = x + y + (x - y)^2 - (x - y) = 2y + (x - y)^2.$$

例 14 求下列函数的函数值:

$$(1) f(x, y) = \left[ \frac{\arctan(x+y)}{\arctan(x-y)} \right]^2, \text{ 求 } f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$(2) f(x, y) = x^2 + y^2 - xy \tan(x/y), \text{ 求 } f(tx, ty).$$

解 代入运算即可.

$$(1) \text{ 因为 } \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2} = 1, \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

故 
$$f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\pi/4}{\pi/3}\right)^2 = \frac{27}{64}.$$

$$\begin{aligned} (2) f(tx, ty) &= (tx)^2 + (ty)^2 - xyt^2 \tan(x/y) \\ &= t^2[x^2 + y^2 - xy \tan(x/y)] = t^2 f(x, y). \end{aligned}$$

**例 15** 求下列函数的定义域:

$$(1) f(x, y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1};$$

$$(2) f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)};$$

$$(3) f(x, y, z) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2 - z^2}} (R > r);$$

$$(4) f(x, y) = \arcsin(x/y^2) + \arcsin(1-y).$$

**解** 一般需通过解不等式组确定.

$$(1) \begin{cases} 1-x^2 \geq 0, \\ y^2-1 \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq 1, \\ |y| \geq 1. \end{cases} \text{ 定义域如图 10.6(a) 所示.}$$

(2)  $\sin(x^2+y^2) \geq 0 \Rightarrow 2k\pi \leq x^2+y^2 \leq (2k+1)\pi, k=0, 1, 2, \dots$  定义域如图 10.6(b) 所示.

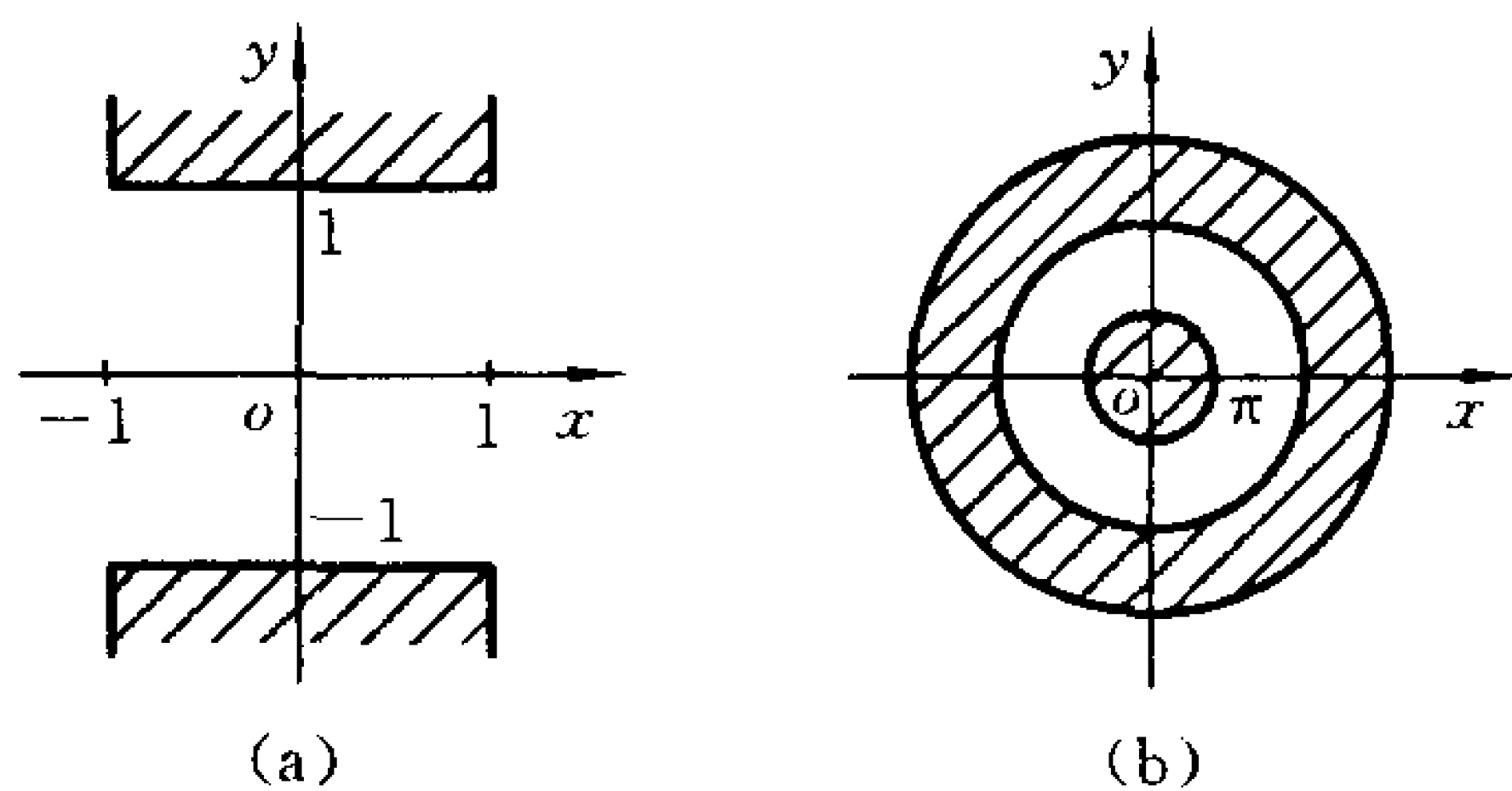


图 10.6

(3)  $r^2 < x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ , 是两个球体所围区域. 定义域如图 10.7(a) 所示.

$$(4) \begin{cases} |x/y^2| \leq 1, \\ |1-y| \leq 1 \end{cases} (y \neq 0) \Rightarrow \begin{cases} y^2 \geq x, \\ 0 < y \leq 2, \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} y^2 \geq -x, \\ 0 < y \leq 2. \end{cases}$$

定义域如图 10.7(b) 所示.

**例 16** 求下列函数的定义域:

$$(1) z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}; \quad (2) z = \arccos \frac{x}{x+y};$$

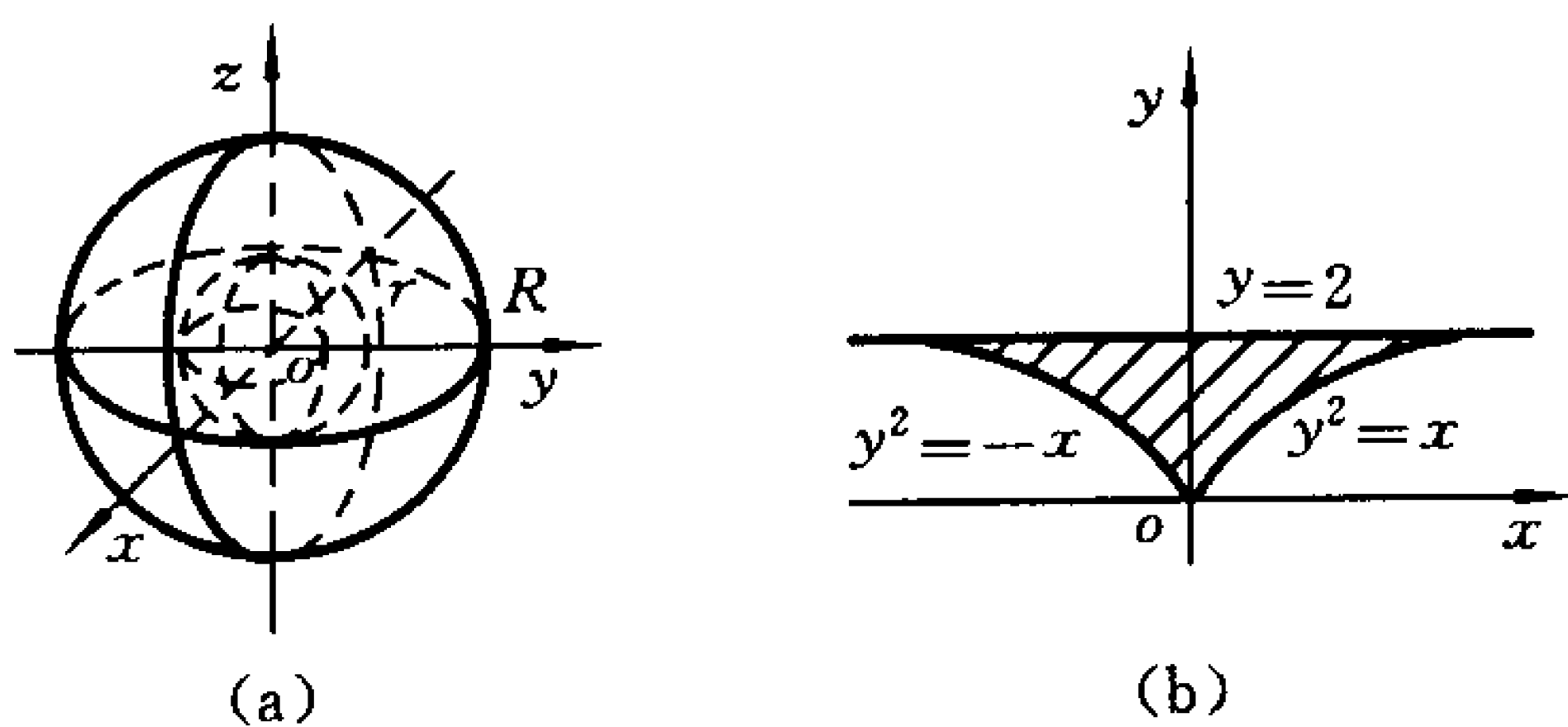


图 10.7

$$(2) u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad (4) u = \ln(-1 - x^2 - y^2 + z^2).$$

解 (1)  $\begin{cases} x \leq x^2 + y^2, \\ x^2 + y^2 < 2x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - 1/2)^2 + y^2 \geq (1/2)^2, \\ (x - 1)^2 + y^2 < 1, \end{cases}$

定义域是一月牙形区域,如图 10.8(a)所示.

$$(2) \left| \frac{x}{x+y} \right| \leq 1 \Rightarrow |x| \leq |x+y| \quad (x \neq -y), \text{ 即}$$

$$x^2 \leq x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{或} \quad y(y+2x) \geq 0.$$

$$\begin{cases} y \geq 0, \\ y \geq -2x, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} y \leq 0, \\ y \leq -2x, \end{cases} \quad (x, y \text{ 不同时为零}).$$

定义域如图 10.8(b)所示.

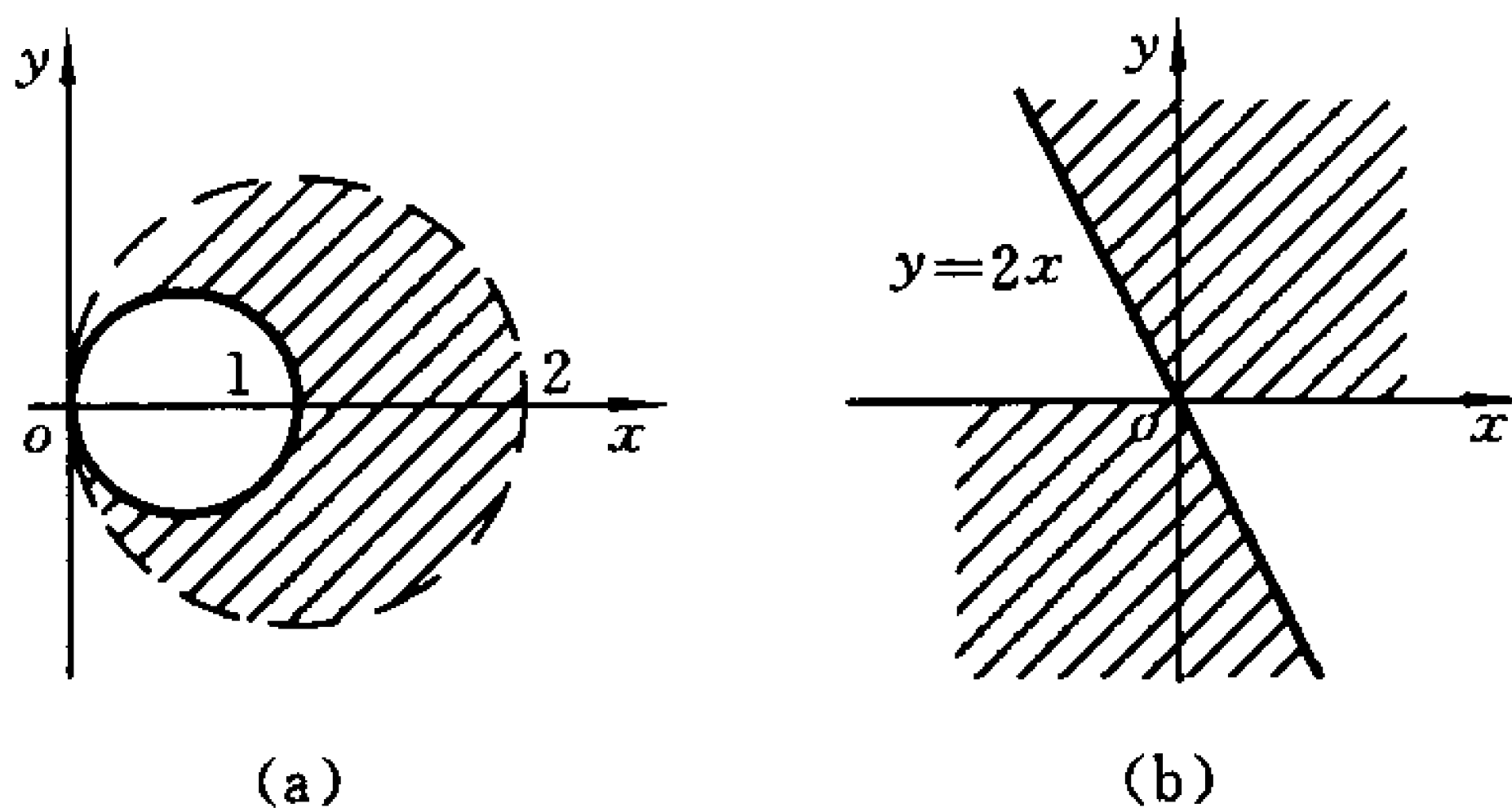


图 10.8

$$(3) \left| \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 \geq 0, \text{ 定义域是圆锥面 } x^2 + y^2 = z^2 \text{ 的外部, 如图 10.9(a)所示.}$$

(4)  $-x^2 - y^2 + z^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 < 1$ , 定义域是双叶双曲面内部, 如图 10.9(b) 所示.

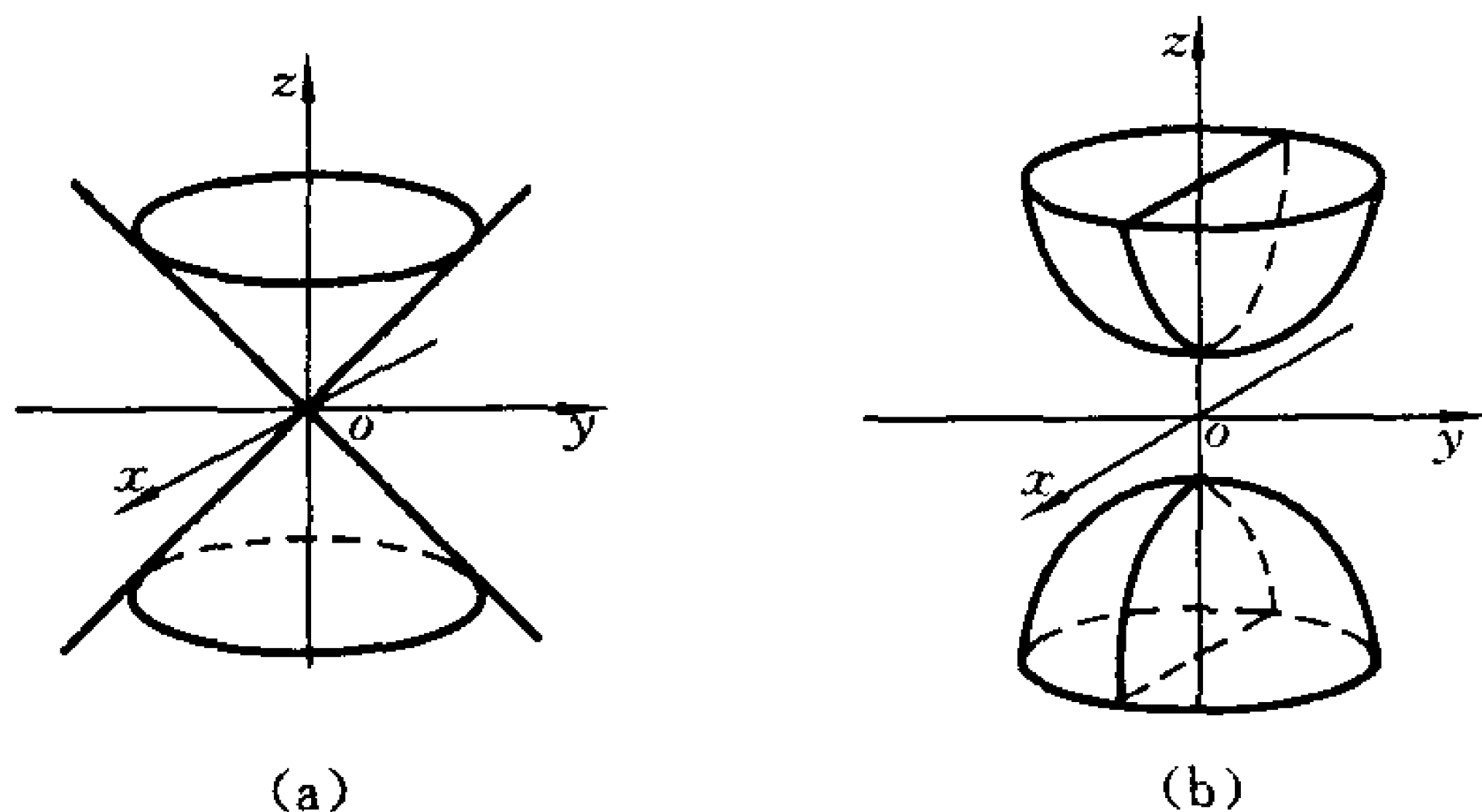


图 10.9

## 第二节 二元函数的极限与连续性

### 主要内容

#### 一、二元函数的极限

1. 设  $f$  为定义在  $D \subset \mathbf{R}^2$  上的二元函数,  $P_0$  为  $D$  的一个聚点,  $A$  为确定的实数. 若  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得当  $P \in U^\circ(P_0; \delta) \cap D$  时, 恒有  $|f(P) - A| < \epsilon$ , 则称  $f$  在  $D$  上当  $P \rightarrow P_0$  时, 以  $A$  为极限, 记作  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$  或  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A$ .

2.  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$  的充要条件是:  $\forall$  任  $E \subset D$ , 只要  $P_0$  是  $E$  的聚点.

**推论 1** 设  $E_1 \subset D$ ,  $P_0$  是  $E_1$  的聚点, 若  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$  不存在, 则  $\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in D}} f(P)$  也不存在.

**推论 2** 设  $E_1, E_2 \subset D$ ,  $P_0$  是它们的聚点, 若存在极限:

$$\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in E_1}} f(P) = A_1, \lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in E_2}} f(P) = A_2, \text{ 但 } A_1 \neq A_2, \text{ 则 } \lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in E_1}} f(P) \text{ 不存在.}$$

**推论 3** 极限  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$  存在  $\Leftrightarrow$  对于  $D$  中任一满足条件  $P_n \neq$

$P_0$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$  的点列  $\{P_n\}$ , 它所对应的函数列  $\{f(P_n)\}$  都收敛.

3. 设  $f$  为定义在  $D \subset \mathbb{R}^2$  上的二元函数,  $P_0(x_0, y_0)$  是  $D$  的一个聚点. 若  $\forall$  任  $M > 0, \exists U(P_0; \delta)$ , 使得  $\forall P(x, y) \in U^\circ(P_0; \delta)$ , 有  $f(P) > M$ , 则称  $f$  在  $D$  上当  $P \rightarrow P_0$  时存在非正常极限  $+\infty$ , 记作

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = +\infty \quad \text{或} \quad \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = +\infty.$$

类似可定义  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = -\infty$  与  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \infty$ .

4.  $x, y$  依一定顺序先后趋向于  $x_0, y_0$  时  $f$  的极限称为累次极限. 而前面的极限称为二重极限.

设  $f$  是定义在  $D \subset \mathbb{R}^2$  的二元函数,  $P_0(x_0, y_0)$  是  $D$  的一个聚点. 如果对于每个  $y \neq y_0$ , 极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$  存在, 且极限

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$$

存在, 则称此极限值为函数  $f$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  先对  $x$  后对  $y$  的二次极限.

同理可得函数  $f$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  先对  $y$  后对  $x$  的二次极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ .

5. 若  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  存在二重极限  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$  与累次极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$  (或  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ ), 则它们必然相等.

(1) 若累次极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$  与  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$  存在但不相等, 则二重极限  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$  必不存在.

(2) 若累次极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$  与  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$  以及二重极限  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$  都存在, 则三者相等.

## 二、二元函数的连续性

1. 设  $f$  为定义在点集  $D \subset \mathbf{R}^2$  上的二元函数, 点  $P_0 \in D$  ( $P_0$  是  $D$  的聚点或孤立点).  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当点  $P \in U(P_0; \delta) \cap D$ , 就有  $|f(P) - f(P_0)| < \epsilon$ , 则称  $f$  关于集合  $D$  在  $P_0$  连续.

若  $f$  在  $D$  上任何点都连续, 则称  $f$  为  $D$  上的连续函数.

若  $P_0$  是  $D$  的聚点, 则  $f$  关于  $D$  在  $P_0$  连续等价于

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0).$$

若  $P_0$  是  $D$  的聚点, 但  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) \neq f(P_0)$ , 则称  $P_0$  是  $f$  的不连续点(或间断点). 若  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$  存在, 但不等于  $f(P_0)$ , 则称  $P_0$  为可去间断点.

2. 复合函数的连续性 设函数  $u = \varphi(x, y)$  和  $v = \psi(x, y)$  在  $xoy$  平面上点  $P_0(x_0, y_0)$  的某邻域内有定义, 并在点  $P_0$  连续, 函数  $f(u, v)$  在  $uov$  平面上点  $Q_0(u_0, v_0)$  的某邻域内有定义, 并在点  $Q_0$  连续, 其中  $u_0 = \varphi(x_0, y_0), v_0 = \psi(x_0, y_0)$ , 则复合函数  $g(x, y) = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$  在点  $P_0$  也连续.

### 3. 有界闭域上连续函数的性质

(1) 有界性与最大值、最小值定理 若函数  $f$  在有界闭域  $D \subset \mathbf{R}^2$  连续, 则  $f$  在  $D$  上有界, 且能取得最大值与最小值.

(2) 一致连续性定理 若函数  $f$  在有界闭域  $D \subset \mathbf{R}^2$  连续, 则  $f$  在  $D$  上一致连续.

(3) 介值性定理 设函数  $f$  在区域  $D \subset \mathbf{R}^2$  上连续,  $P_1, P_2$  为  $D$  中任意两点, 且  $f(P_1) < f(P_2)$ , 则对任何满足不等式  $f(P_1) < \mu < f(P_2)$  的实数  $\mu$ , 必存在点  $P_0 \in D$ , 使得  $f(P_0) = \mu$ .

## 疑难解析

1. 一元函数的极限概念与二元函数的极限概念有何异同?

答 一元函数的极限与二元函数的极限都是讨论在自变量的



某个变化趋势下,函数值与某个常量之间的关系.只是二元函数比一元函数对自变量的要求更高,也更为复杂.如对 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ,只要求在 $x_0$ 的左、右极限存在且相等,则函数在 $x_0$ 的极限就存在.而对 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ ,要求点 $P(x,y)$ 以任何方式趋向于 $P_0(x_0,y_0)$ 时, $f(x,y)$ 都趋向于同一个极限.任何方式包含了 $x$ 与 $y$ 的不同关系与趋向时的不同路径.这为我们判断函数不存在提供了方便.

在二元函数极限概念中还存在因自变量变化而产生的二重极限与二次极限的区别,而这在一元函数极限概念中是没有的.

但是,一元函数的极限的性质,如惟一性、局部有界性、局部保序性、局部迫敛性以及极限的四则运算法则,在二元函数极限中依然成立.读者可试着证明.

## 2. 什么是二次极限与二重极限? 它们之间有什么样的关系?

答 在求二元函数 $f(x,y)$ 极限的过程中,如果自变量是同时变化的,则极限称为二重极限,如 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ .如果自变量的变化有先后之分,则极限称为二次极限,如 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y)$ 和 $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$ .二重极限与二次极限是两个不同的概念,彼此间关系很复杂.

如果 $f(x,y)$ 存在 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y)$ ,则它们必相等.如果二重极限与两个二次极限都存在,则三者相等.

若两个二次极限存在但不相等,则二重极限必不存在,即二次极限存在也不能保证二重极限存在.同样,二重极限存在不能保证二次极限存在.

例如,对于函数

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin(1/x)\cos(1/y), & x \neq 0, y \neq 0, \\ 0, & x = 0 \text{ 或 } y = 0, \end{cases}$$

由于 $|f(x,y)| \leq x^2 + y^2$ ,所以 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ ,但是两个二次极限都不存在.

而对于函数

$$f(x, y) = \begin{cases} y \sin(1/x), & x \neq 0, y \neq 0, \\ 0, & x = 0 \text{ 或 } y = 0, \end{cases}$$

二重极限  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(0, y) = 0$  存在, 但先对  $x$  后对  $y$  的二次极限  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$  不存在.

又如, 对于函数

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2},$$

二次极限存在且相等, 即  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ , 但是

二重极限  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  不存在. 因为

$$\text{沿直线 } x=0 \text{ 时, } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(0, y) = 0,$$

$$\text{沿直线 } x=y \text{ 时, } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, x) = 1.$$

## 方法、技巧与典型例题分析

### 一、二元函数的极限

证明函数的极限难度是比较大的, 因为要证明点  $P(x, y)$  在任何方式下趋向于  $P(x_0, y_0)$  时有同一极限是不可能的. 一般都用定义来证, 即证当  $P \in U^\circ(P_0, \delta)$  时, 有  $|f(P) - A| < \varepsilon$  成立. 也可以利用坐标系的转换, 将二元函数化为一元函数的极限来证.

**例 1** 证明:  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ .

**证法 1** 因为由  $|f(P) - A|$ , 得

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{|xy|}{\sqrt{2}|xy|} \leq \sqrt{|x||y|},$$

所以,  $\forall \varepsilon > 0$ . 令  $\delta = \varepsilon$ , 则当  $(x, y) \neq (0, 0)$  且  $0 < |x - 0| < \delta, 0 <$

$|y - 0| < \delta$  时, 有  $\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| < \varepsilon$ , 即

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

证法 2 将所给函数化为一元函数, 令  $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ , 则  $\forall$  任  $\theta, (x,y) \rightarrow (0,0)$  等价于  $r \rightarrow 0$ , 则

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = r\sin\theta\cos\theta.$$

由于  $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$  在  $r \rightarrow 0$  时是有界量, 所以

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{r \rightarrow 0} r\cos\theta\sin\theta = 0.$$

例 2 证明下列极限存在:

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{xy-1}{y+1} = 3; \quad (2) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} (4x^2+3y) = 19.$$

证 (1)  $y \rightarrow +\infty$ , 可以设为  $y > 0$ , 于是

$$\begin{aligned} \left| \frac{xy-1}{y+1} - 3 \right| &= \left| \frac{xy-1-3y-3}{y+1} \right| = \left| \frac{(x-3)y-4}{y+1} \right| \\ &\leq \frac{|x-3|y}{y+1} + \frac{4}{y+1} < |x-3| + \frac{4}{y}. \end{aligned}$$

$\forall \epsilon > 0$ , 取  $0 < \delta < \epsilon/5, A > 1/\delta$ , 则当  $|x-3| < \delta, y > A$  时, 恒有

$$\begin{aligned} \left| \frac{xy-1}{y+1} - 3 \right| &< |x-3| + 4/y < \delta + 4/A \\ &< \delta + 4\delta = 5\delta = \epsilon, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{xy-1}{y+1} = 3.$$

(2) 取  $\delta_1 = 1$ , 并限定  $|x-2| < 1, |y-1| < 1$ , 则

$$|x+2| = |x-2+4| \leq |x-2| + 4 < 5.$$

$\forall \epsilon < 0$ , 要使不等式

$$\begin{aligned} |(4x^2+3y)-19| &= |(4x^2-16)+3(y-1)| \\ &\leq 4|x-2||x+2| + 3|y-1| \\ &< 20(|x-2| + |y-1|) < \epsilon \end{aligned}$$

成立, 只需  $|x-2| < \epsilon/40, |y-1| < \epsilon/40$ , 可取  $\delta_2 = \epsilon/40$ . 于是,  $\forall \epsilon$

$>0, \exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ , 使得当  $|x-2| < \delta, |y-1| < \delta$  时, 恒有

$$|(4x^2 + 3y) - 19| < \epsilon,$$

即

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} (4x^2 + 3y) = 19.$$

**例 3** 证明: 限制在区域  $D = \{(x, y) \mid |y| < x^2\}$  内的函数  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  在点  $(0, 0)$  存在极限 1 (关于  $D$ ).

**证** 区域  $D$  如图 10.10 所示.  $\forall \epsilon > 0$ , 要使不等式

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - 1 \right| &= \frac{2y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{2y^2}{2|x y|} \\ &= \frac{|y|}{|x|} < \frac{|x^2|}{|x|} = |x| < \epsilon \quad (\text{因为 } |y| < x^2) \end{aligned}$$

成立, 只需取  $\delta = \epsilon$ . 于是,  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \epsilon > 0$ ,

$\forall (x, y) \in D: |x| < \delta, |y| < \delta$ , 恒有

$$\left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - 1 \right| < \epsilon \text{ 成立. 故}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1 \quad (\text{关于 } D).$$

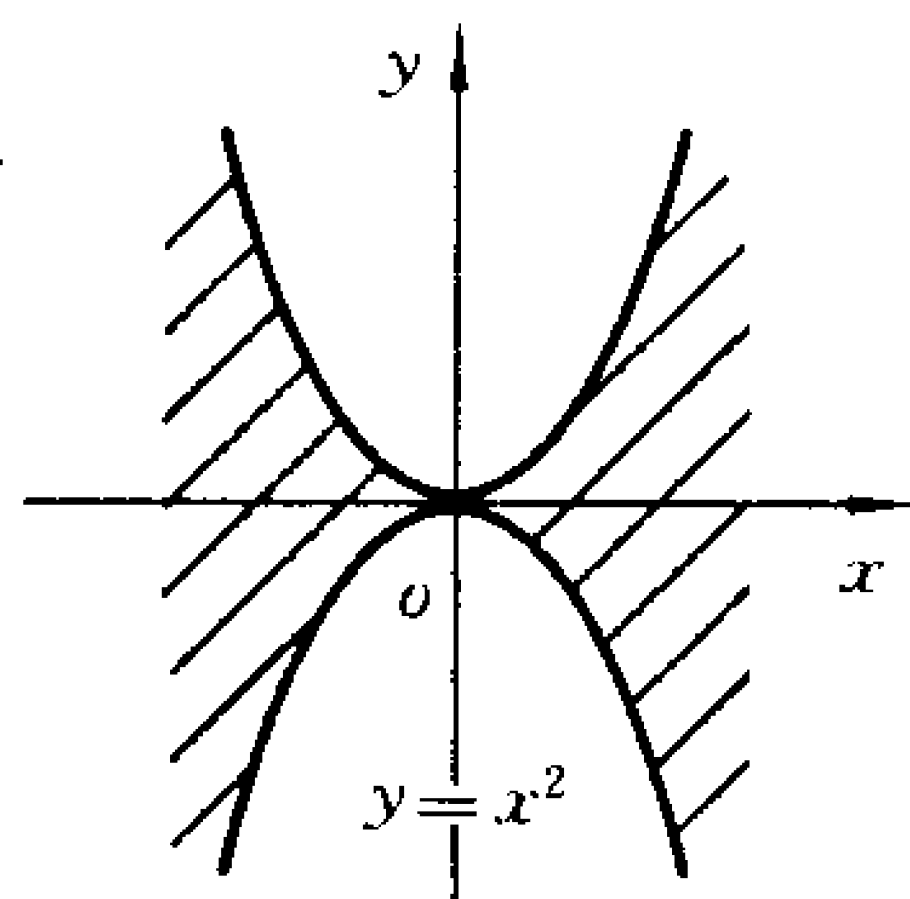


图 10.10

证明函数的极限不存在则要简单得多, 一般的方法是:

- (1) 在某种方式下点  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  时, 函数极限不存在;
- (2) 在两种不同方式下点  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  时, 函数极限都存在, 但不相等.

一般采用的趋向方式是: 点  $(x, y)$  沿  $x=0$ , 或  $y=0$ , 或  $y=kx$ , 或  $y=x^k$  趋向于  $(x_0, y_0)$ .

**例 4** 证明: 对于函数  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$ , 极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$  不存在.

**证** 按  $y=kx \rightarrow (0, 0)$  方向取极限, 得

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 k^2}{x^4 k^2 + x^2 (1 - k^2)^2}.$$

当  $k=0$  时, 极限为零; 当  $k=1$  时, 极限为 1. 故  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  不存在.

**例 5** 证明下列极限不存在:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}}; & (2) \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}; \\ (3) \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y + xy^4 + x^2 y}{x+y}; & (4) \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{\sqrt{|x|}}{3x+2y}. \end{aligned}$$

证 (1) 取  $x_n = 1/n, y_n = 0$ , 有

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1+x_n y_n)^{\frac{1}{x_n+y_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} [1+0]^n = 1;$$

取  $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{-1}{n+1}$ , 有

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1+x_n y_n)^{\frac{1}{x_n+y_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 - \frac{1}{n(n+1)} \right]^{n(n+1)} = e^{-1}.$$

从而知  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$  不存在.

(2) 当点  $P(x,y)$  沿  $y=kx \rightarrow P_0(0,0)$  时, 有

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^3}{x^4 + k^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx}{x^2 + k^2} = 0;$$

当点  $P(x,y)$  沿  $y=x^2 \rightarrow P_0(0,0)$  时, 有

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}.$$

从而知  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$  不存在.

(3) 当点  $P(x,y)$  沿  $y=x^3-x \rightarrow P_0(0,0)$  时, 有

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y + xy^4 + x^2 y}{x+y} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3(x^3-x) + x(x^3-x)^4 + x^2(x^3-x)}{x+(x^3-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3 - x^4 + o(x^4)}{x^3} = -1; \end{aligned}$$

当点  $P(x,y)$  沿  $y=x \rightarrow P_0(0,0)$  时, 有

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y + xy^4 + x^2y}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x^5 + x^3}{2x} = 0.$$

从而知  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y + xy^4 + x^2y}{x+y}$  不存在.

(4) 当点  $P(x,y)$  沿  $y=x \rightarrow (\infty, \infty)$  时, 有

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{|x|}}{3x + 2y} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{|x|}}{5x} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{|x|}} = 0;$$

当点  $P(x,y)$  沿  $y = -\frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{|x|}}{2} \rightarrow (\infty, \infty)$  时, 有

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{|x|}}{3x + 2y} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|}} = 1.$$

从而知  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|x|}}{3x + 2y}$  不存在.

计算二元函数的极限常利用一元函数求极限的方法, 如迫敛性、有界函数与无穷小量乘积、有理化、两个重要极限等方法. 如果能进行变量代换, 化为一元函数形式, 则洛必达法则、无穷大的次数比等方法也可以使用.

**例 6** 计算下列极限:

$$\begin{aligned} (1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2); & \quad (2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2y^2}; \\ (3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \sin \sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}; & \quad (4) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

**解** (1) 令  $x^2 + y^2 = t$ , 则当  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$  时,  $t \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^2 \ln(x^2 + y^2) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} t^2 \ln t = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln t}{1/t^2} \stackrel{L'}{=} \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{1}{2} t^2 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2y^2} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} 2 \frac{\sin^2(x^2 + y^2)/2}{[(x^2 + y^2)/2]^2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{4x^2y^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) = +\infty. \end{aligned}$$

(3) 令  $\sqrt{x^2+y^2}=t$ , 当  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$  时,  $t \rightarrow 0$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \sin \sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3}$$

$$\stackrel{L'}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{3t^2} \stackrel{L'}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

(4) 利用连续性与极限运算法则, 有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln 2}{1} = \ln 2.$$

例 7 计算下列极限:

- (1)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^{3/2}}{x^4 + y^2}$ ; (2)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2)$ ;  
 (3)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 + y^2}$ ; (4)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \left( \frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}$ ;  
 (5)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \left( 1 + \frac{1}{xy} \right)^{x^2/(x+y)}$ ;  
 (6)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin[(y+1)(x^2+y^2)]}{x^2+y^2}.$

解 (1) 因为

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y^{3/2}}{x^4 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^2 y^{3/2}}{2x^2 y} \right| = \frac{1}{2} |y| \rightarrow 0$$

成立, 所以

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^{3/2}}{x^4 + y^2} = 0.$$

(2) 令  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ , 由  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  得  $r \rightarrow 0$ , 于是

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) = \lim_{r \rightarrow 0} r^4 \frac{1}{4} \sin^2 2\theta \ln r^2.$$

由洛必达法则得  $\lim_{r \rightarrow 0} r^4 \ln r^2 = 0$ , 而  $\sin^2 2\theta$  为有界量, 从而

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) = 0.$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 y} \cdot \frac{x^2 y}{x^2 + y^2},$$

而  $\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2} |x| \rightarrow 0, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 y} = 1,$

故 
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 + y^2} = 0.$$

(4) 因为若  $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty$  时, 可设  $x > 0, y > 0$ , 则

$$0 < \left( \frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2} \leq \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \right)^{x^2} = \left( \frac{1}{2} \right)^{x^2} \rightarrow 0,$$

所以 
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \left( \frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2} = 0.$$

$$(5) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left( 1 + \frac{1}{xy} \right)^{x^2/(x+y)} = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left[ \left( 1 + \frac{1}{xy} \right)^{xy} \right]^{\frac{x}{y(x+y)}},$$

而 
$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \frac{x}{y(x+y)} = \frac{1}{a}, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left( 1 + \frac{1}{xy} \right)^{xy} = e,$$

故 
$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left( 1 + \frac{1}{xy} \right)^{x^2/(x+y)} = e^{1/a}.$$

$$(6) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin[(y+1)(x^2+y^2)]}{x^2+y^2} \\ = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{[(y+1)(x^2+y^2)]}{(y+1)(x^2+y^2)} \cdot (y+1) = 1 \cdot 1 = 1.$$

**例 8** 证明: 若  $x = x_0 + r \cos \theta, y = y_0 + r \sin \theta$ , 则  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) =$

$A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall r (0 < r < \delta), \forall \theta (0 \leq \theta \leq 2\pi),$  有

$$|f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) - A| < \epsilon.$$

**证** 此例事实上证明了极限过程中坐标变换的合理性.

**必要性** 若  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$ , 则  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y):$

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta,$$

且  $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ , 有

$$|f(x, y) - A| < \epsilon.$$

设  $x = x_0 + r \cos \theta, y = y_0 + r \sin \theta$ , 则  $\forall \theta: 0 < \theta < 2\pi$ , 有

$$|x - x_0| = |r \cos \theta| \leq r, \quad |y - y_0| = |r \sin \theta| \leq r.$$

从而  $\forall r: 0 < r < \delta$  和  $\forall \theta: 0 \leq \theta \leq 2\pi$ , 有



$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta,$$

且  $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ , 得

$$|f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) - A| < \epsilon.$$

充分性 若  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 且  $\forall r: 0 \leq r \leq \delta, \forall \theta: 0 \leq \theta \leq 2\pi$ , 有

$$|f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) - A| < \epsilon.$$

设  $x = x_0 + r\cos\theta, y = y_0 + r\sin\theta$ , 则  $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ , 有

$$|x - x_0| \leq r, \quad |y - y_0| \leq r,$$

其中

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

取  $\eta = \delta / \sqrt{2}$ , 则  $\forall \epsilon > 0, \eta > 0$  且  $\forall (x, y)$ , 有

$$|x - x_0| < \eta, \quad |y - y_0| < \delta \quad (r < \delta),$$

且  $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ , 于是

$$|f(x, y) - A| = |f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) - A| < \epsilon,$$

即

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A.$$

例 9 若  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \varphi(x, y) = A$ ,  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \psi(x, y) = 0$ , 且在

$(x_0, y_0)$  的邻域内  $|f(x, y) - \varphi(x, y)| \leq \psi(x, y)$  成立, 证明:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A.$$

证 由题设知  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得  $\forall (x, y): |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$ , 且  $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ , 有

$$|\varphi(x, y) - A| < \epsilon, \quad |\psi(x, y) - 0| < \epsilon.$$

于是,  $\forall (x, y): |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$ , 且  $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ ,

$$\begin{aligned} |f(x, y) - A| &\leq |f(x, y) - \varphi(x, y)| + |\varphi(x, y) - A| \\ &\leq \psi(x, y) + |\varphi(x, y) - A| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon, \end{aligned}$$

即

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A.$$

## 二、二元函数的连续性

如同极限问题一样, 二元函数的连续性问题要比一元函数要

求更高,处理起来也更复杂.但是,一切从基本概念出发,熟知连续性的定义和定理,参考一元函数连续性问题的解决方法,二元函数连续性的问题就不难解决.

**例 10** 求下列函数的间断点(或间断线):

$$\begin{aligned} (1) z &= \frac{y^2 + 2x}{y^2 - 2x}; & (2) z &= \frac{1}{\sin x \sin y}; \\ (3) z &= \ln(1 - x^2 - y^2); & (4) z &= \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{\sin \pi y}. \end{aligned}$$

**解** 考虑使函数无意义的点.

(1) 曲线  $y^2 = 2x$  是函数的间断线.

(2) 直线  $x = m\pi$  与  $y = n\pi$  ( $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 是函数的间断线.

(3) 圆周  $x^2 + y^2 = 1$  是函数的间断线.

(4) 直线  $y = m\pi$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) 和  $x = 0$  是函数的间断线.

**例 11** 讨论下列函数的连续性:

$$\begin{aligned} (1) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases} \\ (2) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases} \\ (3) f(x, y) &= \sin \sqrt{x^2 + y^2}; & (4) f(x, y) &= \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

**解** (1) 当  $x^2 + y^2 \neq 0$  时, 函数  $f(x, y)$  连续.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{xy}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\sin(xy)}{xy} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{1 + k^2}$$

显然与  $k$  有关. 所以函数  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  不连续.

即函数  $f(x, y)$  在  $\mathbf{R}^2$  上除点  $(0, 0)$  外都连续.

(2) 当  $x^2 + y^2 \neq 0$  时, 函数  $f(x, y)$  连续. 由

$$0 < \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$$

知,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ . 所以函数  $f(x,y)$  在点  $(0,0)$  连续.

即函数  $f(x,y)$  在  $\mathbf{R}^2$  上连续.

(3)  $\forall (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ , 有

$$\begin{aligned} & |f(x,y) - f(x_0,y_0)| \\ &= |\sin \sqrt{x^2 + y^2} - \sin \sqrt{x_0^2 + y_0^2}| \\ &= 2 \left| \cos \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{2} \right| \left| \sin \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{2} \right| \\ &\leq |\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \end{aligned}$$

则  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$ , 当  $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$  时, 有

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon,$$

即函数  $f(x,y)$  在点  $(x_0, y_0)$  连续, 所以  $f(x,y)$  在  $\mathbf{R}^2$  上连续.

(4) 函数  $f(x,y)$  在  $x^2 + y^2 \neq 0$  时连续.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - k^2 x^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}$$

随  $k$  变化而变化, 所以  $f(x,y)$  在点  $(0,0)$  不连续.

即函数  $f(x,y)$  在  $\mathbf{R}^2$  上除点  $(0,0)$  外连续.

例 12 讨论以下函数的连续性:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \sin(x - 2y)}{x - 2y}, & x \neq 2y, \\ 0, & x = 2y. \end{cases}$$

解 当  $x \neq 2y$  时, 函数  $f(x,y)$  连续.

当  $x_0 = 2y_0 \neq 0$  时, 取路径  $x = 2y$ , 有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 = x_0/2}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow x_0} x_0 \frac{\sin(x - 2y_0)}{x - 2y_0} = x_0,$$

而在点  $(0,0)$ , 极限

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} x \frac{\sin(x - 2y)}{x - 2y} = 0 = f(0,0),$$

从而  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  连续.

但  $x_0 \neq 0$ , 故不等于  $f(0, 0)$ , 直线  $2y = x$  上除点  $(0, 0)$  外的点是函数的间断点.

**例 13** 证明: 函数  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$  当  $(x, y)$

沿过点  $(0, 0)$  的每一条射线

$$x = t \cos \alpha, \quad y = t \sin \alpha \quad (0 < t < +\infty)$$

连续, 即  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0, 0)$ . 但函数  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  不连续.

**证** 当  $\sin \alpha = 0$  时,  $\cos \alpha = 1$  或  $-1$ . 当  $t \neq 0$  时,  $f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = \frac{t^2 \cdot 0}{t^4 + 0} = 0$ , 而  $f(0, 0) = 0$ , 故  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0, 0)$ .

但当点  $(x, y)$  沿曲线  $y = x^2 \rightarrow (0, 0)$  时, 有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = x^2}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \neq f(0, 0),$$

从而, 函数  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  不连续.

**例 14** 设函数  $f(x, y)$  在域  $D$  内对变量  $x$  是连续的, 并对变量  $y$  满足李卜希兹条件, 即  $\forall (x, y'), (x, y'') \in D$ , 有

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \leq L |y' - y''|,$$

其中  $L$  为常数. 证明:  $f(x, y)$  在  $D$  上连续.

**证**  $\forall (x_0, y_0) \in D$ , 由于  $f(x, y)$  对  $x$  连续, 则  $f(x, y_0)$  在  $x_0$  连续,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1(x_0, y_0) > 0$ , 使得当  $|x - x_0| < \delta_1$  时, 有

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon/2.$$

取  $\delta_2 = \varepsilon/(2L) > 0$ , 则当  $|y - y_0| < \delta$  时, 由条件有

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| \leq L |y - y_0| < L\varepsilon/(2L) = \varepsilon/2.$$

故取  $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$ , 则当  $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$ , 且  $U((x_0, y_0), \delta) \subset D$  时, 有

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)|$$

$$\begin{aligned} &\leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \end{aligned}$$

即知  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  连续. 由  $(x_0, y_0)$  的任意性知,  $f(x, y)$  在  $D$  上连续.

**例 15** 证明尤格定理: 若  $f(x, y)$  分别对于  $x$  与  $y$  连续, 且对于其中一个变量是单调的, 则  $f(x, y)$  对两个变量总体是连续的.

**证** 由题设,  $f(x, y)$  对任意  $(x_0, y_0)$  关于  $x$  和  $y$  连续, 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$ , 使得当  $|x - x_0| < \delta_1$  时, 有

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon/2.$$

特别地, 有  $|f(x_0 + \delta_1, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon/2$ ,

$$|f(x_0 - \delta_1, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon/2.$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$ , 使得当  $|y - y_0| < \delta_2$  时, 有

$$|f(x_0 + \delta_1, y) - f(x_0 + \delta_1, y_0)| < \varepsilon/2,$$

$$|f(x_0 - \delta_1, y) - f(x_0 - \delta_1, y_0)| < \varepsilon/2.$$

于是, 当  $|x - x_0| \leq \delta_1, |y - y_0| \leq \delta_2$  时, 由  $f(x, y)$  对  $x$  的单调性得

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &\leq \max\{|f(x_0 - \delta_1, y) - f(x_0, y_0)|, \\ &\quad |f(x_0 + \delta_1, y) - f(x_0, y_0)|\} < \varepsilon. \end{aligned}$$

在  $f(x, y)$  对于  $y$  单调时同样可证.

**例 16** 证明: 若函数  $f(x, y)$  在  $\mathbf{R}^2$  上连续, 且  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} f(x, y) = A$ , 则函数  $f(x, y)$  在  $\mathbf{R}^2$  上一致连续.

**证** 由  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} f(x, y) = A$  知:  $\forall \varepsilon > 0, \exists T > 1$ , 对任意的  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ , 当  $|x| > T, |y| > T$  时, 有  $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ . 从而,  $\forall (x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$ , 当  $|x_1| > T, |x_2| > T, |y_1| > T, |y_2| > T$  时, 有

$$\begin{aligned} &|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \\ &\leq |f(x_1, y_1) - A| + |f(x_2, y_2) - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon, \end{aligned}$$

即  $f(x, y)$  在区域  $D = \{(x, y) \mid |x| > T, |y| > T\}$  内一致连续.

而在有界闭方形区域  $G = \{(x, y) \mid |x| < T + 1, |y| < T + 1\}$

内, 由于  $f(x, y)$  连续, 所以一致连续. 即  $\forall \varepsilon > 0, \exists 0 < \delta < 1$ , 对于  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G$ , 且  $|x_1 - x_2| < \delta, |y_1 - y_2| < \delta$ , 有

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon.$$

这样,  $\forall (x_1, y_1)$  与  $(x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2$ , 只要  $|x_1 - x_2| < \delta, |y_1 - y_2| < \delta$ , 点  $(x_1, y_1)$  与  $(x_2, y_2)$  一定同在  $D$  或  $G$  内. 于是

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < 2\varepsilon,$$

即  $f(x, y)$  在  $\mathbf{R}^2$  上一致连续.

**例 17** 证明: 对于函数  $f(x, y) = x \sin(1/y)$ , 若  $y \neq 0$ , 则  $f(x, y) = 0$  的间断点的集合不是封闭的.

**证** 当  $y_0 \neq 0$  时, 函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  连续. 即在  $\mathbf{R}^2$  上除  $x$  轴外的一切点连续. 又

$$0 \leq |f(x, y) - f(0, 0)| = |f(x, y)| \leq |x| \rightarrow 0,$$

所以, 当  $y_0 \neq 0$  时,  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  也连续.

当  $x_0 \neq 0$  时, 对点  $(x_0, 0)$ , 极限  $\lim_{y \rightarrow 0} x_0 \sin(1/y)$  不存在. 所以, 当  $x_0 \neq 0$  时,  $f(x, y)$  在点  $(x_0, 0)$  不连续. 也就是说,  $f(x, y)$  的全部不连续点为  $x$  轴上除点  $(0, 0)$  外的所有点, 但点  $(0, 0)$  是不连续点的聚点而不是间断点. 从而知  $f(x, y)$  的不连续点的集合不封闭.

**例 18** 设函数  $f(x, y)$  在域  $a \leq x \leq A, b \leq y \leq B$  上连续, 函数列  $\varphi_n(x)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 在  $[a, A]$  上一致收敛并满足  $b \leq \varphi_n(x) \leq B$ . 证明: 函数列  $F_n(x) = f(x, \varphi_n(x))$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 也在  $[a, A]$  上一致收敛.

**证** 由于  $f(x, y)$  在闭域  $a \leq x \leq A, b \leq y \leq B$  上连续, 故必一致连续, 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $y', y'' \in [b, B]$  时, 只要  $|y' - y''| < \delta$ , 就有  $|f(x, y') - f(x, y'')| < \varepsilon$ .

又  $\varphi_n(x)$  在  $[a, A]$  上一致收敛, 故  $\exists N \in \mathbf{N}$ , 当  $m > N, n > N$  时,  $\forall x \in [a, A]$ , 有  $|\varphi_m(x) - \varphi_n(x)| < \delta$ .

由题设,  $b \leq \varphi_m(x), \varphi_n(x) \leq B$ , 故  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$ , 当  $m > N, n > N$ , 且  $a \leq x \leq A$  时, 有

$$|F_m(x) - F_n(x)| = |f(x, \varphi_m(x)) - f(x, \varphi_n(x))| < \varepsilon,$$

即  $F_n(x)$  在  $[a, A]$  上一致收敛.

**例 19** 设  $f(x, y)$  在域  $a < x < A, b < y < B$  内连续, 函数  $\varphi(x)$  在区间  $(a, A)$  连续并有属于区间  $(b, B)$  的值. 证明: 函数  $F(x) = f[x, \varphi(x)]$  在区间  $(a, A)$  内连续.

**证** 任取点  $(x_0, y_0)$  属于  $a < x < A, b < y < B$ , 则  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得当  $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon.$$

又对上述  $\delta > 0, \exists \eta < 0$  (可取  $\eta < \delta$ ), 使得当  $|x - x_0| < \eta$  ( $x \in (a, A)$ ) 时, 有

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = |y - y_0| < \delta,$$

于是  $|F(x) - F(x_0)| = |f(x, \varphi(x)) - f(x_0, \varphi(x_0))| < \epsilon$ ,

即  $F(x)$  在  $x_0$  连续. 由  $x_0$  的任意性知,  $F(x)$  在区间  $(a, A)$  内连续.

**例 20** 设函数  $f(x, y)$  在域  $R(a < x < A, b < y < B)$  内连续, 函数  $x = \varphi(u, v)$  与  $y = \psi(u, v)$  在域  $R'(a' < u < A', b' < v < B')$  内连续并有属于  $(a, A)$  与  $(b, B)$  的值. 证明: 函数  $F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$  在域  $R'$  内连续.

**证** 取足够小的  $\delta$  与  $\eta$ , 使得点的  $\delta$  或  $\eta$  邻域在所给域内.

任取  $(x_0, y_0) \in R$ , 则  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得当  $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon.$$

由  $\varphi(u, v)$  与  $\psi(u, v)$  的连续性知,  $\forall$  上述  $\delta < 0, \forall \eta > 0$ , 使得当  $|u - u_0| < \eta, |v - v_0| < \eta$  时, 有

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta,$$

其中

$$x_0 = \varphi(u_0, v_0), \quad y_0 = \psi(u_0, v_0).$$

于是,  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得当  $|u - u_0| < \eta, |v - v_0| < \eta$  时, 有

$$|F(u, v) - F(u_0, v_0)|$$

$$= |f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) - f(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0))| < \epsilon,$$

则  $F(u, v)$  在点  $(u_0, v_0)$  连续. 由  $(u_0, v_0)$  的任意性知,  $F(u, v)$  在  $R'$  内连续.

### 第三节 多元函数的偏导数与全微分

#### 主要内容

1. 设函数  $z=f(x,y)$  在点  $P_0(x_0,y_0)$  的某邻域  $U(P_0)$  内有定义,  $\forall P(x,y)=(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in U(P)$ , 若函数  $f(x,y)$  在  $P_0$  的全增量  $\Delta z$  可表示为

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),\end{aligned}$$

其中  $A, B$  是仅与  $P_0$  有关的常数,  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ , 则称函数  $f(x,y)$  在点  $P_0$  可微.

$\Delta x, \Delta y$  的线性函数  $A\Delta x + B\Delta y$  称为函数在点  $P_0$  的全微分. 记作  $dz|_{P_0}$  或  $df(x_0, y_0)$ .

2. 设函数  $f(x,y)$  定义在  $D$  上, 若  $(x_0, y_0) \in D$ , 且  $f(x,y)$  在  $x_0$  的某邻域内有定义, 则称极限  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$  为函数  $f(x,y)$  在点  $(x_0, y_0)$  关于  $x$  的偏导数, 记作

$$f_x(x_0, y_0) \quad \text{或} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0}.$$

类似地, 定义极限

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

为函数  $f(x,y)$  在点  $(x_0, y_0)$  关于  $y$  的偏导数.

若函数  $f(x,y)$  在  $D$  上每一点  $(x,y)$  都存在关于  $x$  (或  $y$ ) 的偏导数, 则称函数  $f(x,y)$  在  $D$  上有关于  $x$  (或  $y$ ) 的偏导函数, 记作  $f_x(x,y), f_y(x,y); \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ ; 简记为  $f_x, z_x$ .



3. 偏导数的几何意义  $f_x(x_0, y_0)$  表示曲面  $z=f(x, y)$  与平面  $y=y_0$  的交线  $\begin{cases} z=f(x, y), \\ y=y_0 \end{cases}$  在点  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  的切线  $T_x$  的斜率(或切线  $T_x$  与  $x$  轴正向夹角  $\alpha$  的正切). 类似地,  $f_y(x_0, y_0)$  表示曲面  $z=f(x, y)$  与平面  $x=x_0$  的交线  $\begin{cases} z=f(x, y), \\ x=x_0 \end{cases}$  在点  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  的切线  $T_y$  的斜率(或切线  $T_y$  与  $y$  轴正向夹角  $\beta$  的正切). 即

$$f_x(x_0, y_0) = \tan \alpha, \quad f_y(x_0, y_0) = \tan \beta.$$

4. 可微的必要条件 若函数  $f(x, y)$  在其定义域内一点  $(x_0, y_0)$  可微, 则函数  $f$  在该点的偏导数  $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$  都存在, 且

$$df|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

或 
$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy.$$

5. 可微的充分条件 若函数  $f(x, y)$  的偏导数在  $U((x_0, y_0); \delta)$  存在, 且  $f_x$  与  $f_y$  在点  $(x_0, y_0)$  连续, 则函数  $f$  在点  $(x_0, y_0)$  可微.

6. 设函数  $f(x, y)$  在  $U((x_0, y_0); \delta)$  存在偏导数,  $(x, y) \in U((x_0, y_0); \delta)$ , 则  $\exists \xi = x_0 + \theta_1(x - x_0), \eta = y_0 + \theta_2(y - y_0), 0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ , 使得

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi, \eta)(x - x_0) + f_y(x_0, \eta)(y - y_0).$$

7. 曲面  $z=f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  存在不平行于  $z$  轴的切平面  $\pi$  的充要条件是, 函数  $f$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  可微.

若函数  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  可微, 则曲面  $z=f(x, y)$  在点  $P(x_0, y_0, z_0)$  的切平面方程和法线方程分别为

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

## 疑难解析

1. 说明函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  连续与在点  $P_0(x_0, y_0)$  的偏导数之间的关系.

答 函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  连续, 则  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的偏导数不一定存在. 例如  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  在点  $(0, 0)$  连续, 但是

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

不存在. 同理,  $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(0,0)}$  也不存在, 这是因为  $f(x, y)$  连续不能保证左、右导数存在且相等.

反之, 函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的偏导数存在也不能确定函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  连续. 例如

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在点  $(0, 0)$  存在偏导数  $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} = 0, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(0,0)} = 0$ , 但在点  $(0, 0)$  不连续. 这是因为  $f_x(x_0, y_0)$  只反映函数  $f(x, y_0)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  作为  $x$  的函数在  $x_0$  是连续的,  $f_y(x_0, y_0)$  只反映函数  $f(x_0, y)$  作为  $y$  的函数在  $y_0$  是连续的. 而  $f(x, y_0)$  在  $x_0$  连续与  $f(x_0, y)$  在  $y_0$  连续并无必然联系, 并且  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  连续要求函数  $f(x, y)$  在经过点  $P_0(x_0, y_0)$  的任何方向上连续, 这是偏导数存在不能保证的.

但是函数  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  可微时, 由定义  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0$ , 保证  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  连续.

2. 说明函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  可微与偏导数存在之间的关系.

答 若函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  可微, 则  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的偏导数必存在. 因为  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  偏导数存在是  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  可微的必要条件, 且

$$df|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy.$$

但反过来不一定成立, 例如,  $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ , 在点  $(0, 0)$  有  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ , 但  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  不可微. 因为若按上式, 有

$$df|_{(0,0)} = 0 \cdot dx + 0 \cdot dy = 0.$$

而  $\Delta f = f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) = \sqrt{|\Delta x \Delta y|}$ ,

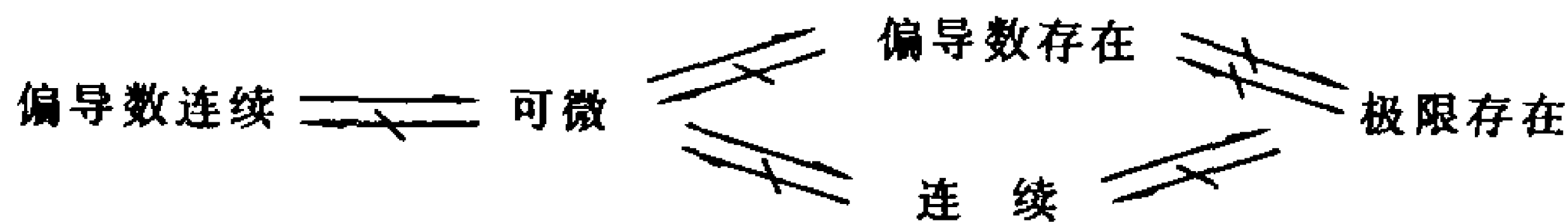
当取  $\Delta x = \Delta y$  时,  $\Delta f = |\Delta x|$ ,  $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{2} |\Delta x|$ , 故

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f - df}{\rho} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\sqrt{2} |\Delta x|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0,$$

从而,  $\Delta f$  与  $\rho$  为同阶无穷小, 与可微性定义相矛盾. 因此,  $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$  在点  $(0, 0)$  不可微.

若函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的某邻域内偏导数存在, 且偏导数在点  $P_0(x_0, y_0)$  连续, 则函数在点  $P_0(x_0, y_0)$  可微. 但偏导数在点  $P_0(x_0, y_0)$  连续不是函数可微的必要条件.

二元函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的可微、连续、极限与偏导数存在之间有如下关系.



## 方法、技巧与典型例题分析

在计算函数在其一点的偏导数或区域上的偏导函数时, 可以利用一元函数的求导法则, 只要牢记只有一个变量在变, 而把其余变量视作常数就行. 也可以利用全微分的形式不变性求偏导数, 即求出全微分时同时得到几个偏导数. 这样不仅简捷方便, 而且在计

算中还不必区别自变量与中间变量,避免出错.

若函数在个别孤立点有定义但不知偏导数是否存在,更不知偏导函数在该点是否连续,则必须依定义来讨论函数在该点的偏导数.

例 1 设函数

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

讨论  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$ : (1) 偏导数是否存在; (2) 偏导数是否连续; (3) 是否可微.

解 (1) 由定义知

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x^2)}{x} = 0,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 \sin(1/y^2)}{y} = 0,$$

所以  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  偏导数存在.

(2) 因为当  $x^2 + y^2 \neq 0$  时,  $f(x, y)$  偏导数存在, 故

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2x \left[ \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \right], & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} 2y \left[ \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \right], & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

而  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\partial f}{\partial x}$  与  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\partial f}{\partial y}$  不存在, 故偏导数在点  $(0, 0)$  不连续.

$$(3) \Delta z = [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - [f_x(0, 0)\Delta x + f_y(0, 0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \sin \frac{1}{\rho^2} = 0,$$

所以  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  可微, 且全微分  $dz = 0$ .

本例说明在二元函数的不连续点函数仍可能可微. 偏导数连

续是可微的充分条件,而不是充要条件.

例 2 证明:  $f_x(x, b) = \frac{d}{dx}[f(x, b)]$ .

证 依定义知

$$f_x(x, b) = \left[ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \right]_{y=b},$$

而 
$$\frac{d}{dx}[f(x, b)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, b) - f(x, b)}{\Delta x}.$$

因为  $y$  与  $\Delta x$  无关,所以

$$\begin{aligned} & \left[ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \right]_{y=b} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \right]_{y=b} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, b) - f(x, b)}{\Delta x}, \end{aligned}$$

即 
$$f_x(x, b) = \frac{d}{dx}[f(x, b)].$$

例 3 (1)  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$

求  $f_x(0, 0)$ ,  $f_x(x, 0)$  ( $x \neq 0$ ),  $f_x(0, y)$  ( $y \neq 0$ );

(2)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$

求  $f_x(x, y)$ ,  $f_y(x, y)$ ,  $f_x(0, 0)$ ,  $f_y(0, 0)$ .

解 由于点  $(0, 0)$  是分段函数分界点,故需依定义求解.

(1)  $f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0,$

当  $x \neq 0$  时,  $f_x(x, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, 0) - f(x, 0)}{\Delta x} = 0;$

当  $y \neq 0$  时,  $f_x(0, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, y) - f(0, y)}{\Delta x} = -y.$

(2) 当  $x^2 + y^2 \neq 0$  时,应用求导公式,得

$$f_x(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)y - xy \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f_y(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)x - xy \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

当  $x^2 + y^2 = 0$  时, 依定义得

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = 0.$$

例 4 求下列函数的偏导数:

$$(1) z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$(2) z = \arctan \frac{x+y}{x-y};$$

$$(3) z = (1 + xy)^x;$$

$$(4) z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2});$$

$$(5) u = xze^{\sin(yz)};$$

$$(6) u = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z}.$$

解 (1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \left[ 1 / \sqrt{1 - \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2} \right] \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x^2 / \sqrt{x^2 + y^2}}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} \\ &= \frac{|y|}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \left[ 1 / \sqrt{1 - \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2} \right] \frac{(-xy) / \sqrt{x^2 + y^2}}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} \\ &= -\frac{xy}{|y|(x^2 + y^2)}. \end{aligned}$$

$$(2) \frac{\partial z}{\partial x} = 1 / \left[ 1 + \left( \frac{x+y}{x-y} \right)^2 \right] \frac{(x-y) + (x+y)}{(x-y)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 1 / \left[ 1 + \left( \frac{x+y}{x-y} \right)^2 \right] \frac{(x-y) + (x+y)}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

(3) 对  $z = (1 + xy)^x$  两边取对数, 得

$$\ln z = x \ln(1 + xy),$$

两边分别对  $x$  求导, 得  $\frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \ln(1 + xy) + x \frac{y}{1 + xy}$ , 故

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (1 + xy)^x \left[ \ln(1 + xy) + \frac{xy}{1 + xy} \right],$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x(1 + xy)^{x-1} \cdot x = x^2(1 + xy)^{x-1}.$$

$$(4) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \left( 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}(x + \sqrt{x^2 + y^2})}. \end{aligned}$$

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = ze^{\sin(yz)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xze^{\sin(yz)} \cos(yz) \cdot z = xz^2 e^{\sin(yz)} \cos(yz),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= xe^{\sin(yz)} + xze^{\sin(yz)} \cos(yz) \cdot y \\ &= xe^{\sin(yz)} [1 + yze^{\cos(yz)} \cos(yz)]. \end{aligned}$$

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} - \frac{1}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x} - \frac{z}{y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{y} + \frac{x}{z^2}.$$

**例 5** 利用对称性,求下列函数的偏导数:

$$(1) z = x^y y^x; \quad (2) u = \ln(x^y y^z z^x), \quad x > 0, y > 0, z > 0;$$

$$(3) z = (x^2 + y^2)e^{\frac{x^2 + y^2}{xy}}; \quad (4) z = xy - \frac{2xy^3}{x^2 + y^2}.$$

**解** 函数的对称性是指函数的任意两个自变量交换位置后函数不变的性质,如  $z = x^2 \arctan(x/y) + y^2 \arctan(y/x)$  就是如此. 对称性可以使计算变得简便. 有些函数虽然不是对称函数,但利用轮换对称或对换,也能得到对称性的效果.

(1) 等式两边取对数,得

$$\ln z = y \ln x + x \ln y,$$

两边再对  $x$  求导,得  $\frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x} + \ln y$ , 故

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z \left( \frac{y}{x} + \ln y \right) = x^y y^x \left( \frac{y}{x} + \ln y \right).$$

依对称性得 
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y y^x \left( \frac{x}{y} + \ln x \right).$$

(2) 直接求导, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2xe^{\frac{x^2+y^2}{xy}} + (x^2 + y^2)e^{\frac{x^2+y^2}{xy}} \left[ \frac{2x \cdot xy - (x^2 + y^2)y}{x^2 y^2} \right] \\ &= \frac{x^4 - y^4 + 2x^3 y}{x^2 y} e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}. \end{aligned}$$

依对称性得 
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y^4 - x^4 + 2xy^3}{xy^2} e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}.$$

(3)  $u = \ln(x^y y^z z^x) = y \ln x + x \ln y + x \ln z$  不是三元对称函数,

但在变换  $\begin{pmatrix} x & y & z \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ y & z & x \end{pmatrix}$  下, 函数不变, 称为三元轮换对称函数(在

多元函数积分学中常见). 可对任一变量的结果进行字母(变量)的轮换得到需要的结果.

$u$  对  $x$  直接求导, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x} + \ln z.$$

利用变换轮换变量, 得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{z}{x} + \ln x, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x}{z} + \ln y.$$

(4)  $z$  不是  $x$  和  $y$  的对称函数, 但由

$$z = xy - \frac{2xy^3}{x^2 + y^2} = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

可知, 当  $x, y$  互换后所得函数与原来函数只相差一个负号, 即  $(f(x, y)) = -f(y, x)$ . 故

$$\frac{\partial}{\partial y}[f(x, y)] = -\frac{\partial}{\partial y}[-f(x, y)] = -\frac{\partial}{\partial y}[f(y, x)].$$

因为 
$$\frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{2y^3(x^2 + y^2) - 2xy^3 \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2}$$



$$= y + \frac{2y^3(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

所以  $\frac{\partial z}{\partial y} = -x + \frac{2x^3(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$

例 6 设  $u = \sin x + \varphi(\sin x + \cos y)$ , 其中  $\varphi$  为可导函数, 且当  $x=0$  时,  $u = \sin^2 y$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ .

解 先求  $\varphi(t)$  的表达式. 因为  $x=0$  时,  $u = \sin^2 y$ , 即

$$u = \varphi(\cos y) = \sin^2 y = 1 - \cos^2 y,$$

所以  $\varphi(t) = 1 - t^2,$

$$\varphi(\sin x + \cos y) = 1 - (\sin x + \cos y)^2,$$

从而  $u = \sin x + 1 - (\sin x + \cos y)^2,$

于是  $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x - 2(\sin x + \cos y)\cos x,$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2(\sin x + \cos y)\sin y.$$

例 7 求下列函数的偏导数:

(1)  $u = x^{yz};$  (2)  $u = \left(\frac{x}{y}\right)^{y/z}.$

解 先求全微分, 再求偏导数.

(1) 两边取对数, 得  $\ln u = yz \ln x$ , 再求微分, 得

$$\frac{1}{u} du = \frac{yz}{x} dx + z \ln x dy + y \ln x dz,$$

即  $du = x^{yz} \left[ \frac{yz}{x} dx + z \ln x dy + y \ln x dz \right],$

得  $\frac{\partial u}{\partial x} = x^{yz} \frac{yz}{x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{yz} z \ln x \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{yz} y \ln x.$

(2) 两边取对数, 得

$$\ln u = \frac{y}{z} \ln \frac{x}{y} = \frac{y}{z} (\ln x - \ln y),$$

两边求微分, 得

$$\frac{1}{u}du = \frac{y}{zx}dx + \frac{1}{z}\left(\ln \frac{x}{y} - 1\right)dy - \frac{y}{z^2}\ln \frac{x}{y}dz.$$

即  $du = \left(\frac{x}{y}\right)^{y/z} \left[ \frac{y}{xz}dx + \frac{1}{z}\left(\ln \frac{x}{y} - 1\right)dy - \frac{y}{z^2}\ln \frac{x}{y}dz \right],$

得  $\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{x}{y}\right)^{y/z} \frac{y}{xz}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{x}{y}\right)^{y/z} \frac{1}{z}\left(\ln \frac{x}{y} - 1\right),$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\left(\frac{x}{y}\right)^{y/z} \frac{y}{z^2}\ln \frac{x}{y}.$$

例 8 计算下列偏导数:

(1)  $z = x^2 + (y^2 - 1)\tan \sqrt{x/y}$ , 求  $z_x(x, 1)$ ;

(2)  $z = \frac{\cos(x-2y)}{\cos(x+y)}$ , 求  $z_y\left(\pi, \frac{\pi}{4}\right)$ .

解 (1) 先求偏导函数, 再求偏导数值.

$$\begin{aligned} z_x &= 2x + (y^2 - 1)\sec^2 \sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 2x + \frac{y^2 - 1}{2\sqrt{xy}}\sec^2 \sqrt{\frac{x}{y}}, \end{aligned}$$

则

$$z_x(x, 1) = 2x.$$

(2) 先求一元函数  $f(\pi, y)$  和  $f_y(\pi, y)$ , 得

$$f(\pi, y) = \frac{\cos(\pi - 2y)}{\cos(\pi + y)} = \frac{\cos 2y}{\cos y},$$

$$f_y(\pi, y) = \frac{-2\sin 2y \cos y + \cos 2y \sin y}{\cos^2 y},$$

则

$$z_y(\pi, \pi/4) = -2\sqrt{2}.$$

计算函数的全微分, 可以用先求各个偏导数后组合的方法, 也可以由一阶微分的形式不变性直接求出.

例 9 求下列函数的全微分:

(1)  $z = x \ln(xy)$ ; (2)  $z = y \cos(x - 2y)$  在点  $(\pi, \pi/4)$ ;

(3)  $u = xe^{yz} + e^{-z} + y$  在点  $(1, 2, 1)$ .

解 (1)  $\frac{\partial z}{\partial x} = \ln(xy) + 1 = \ln(exy), \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y}$ , 故

$$dz = \ln(exy)dx + \frac{x}{y}dy.$$

(2)  $\frac{\partial z}{\partial x} = y\sin(x-2y), \frac{\partial z}{\partial y} = \cos(x-2y) + 2y\sin(x-2y),$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(\pi, \frac{\pi}{4})} = \frac{\pi}{4}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(\pi, \frac{\pi}{4})} = \frac{\pi}{2},$$

故  $dz|_{(\pi, \frac{\pi}{4})} = \frac{\pi}{4}(dx + 2dy).$

(3)  $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{yz}, \frac{\partial u}{\partial y} = xze^{yz} + 1, \frac{\partial u}{\partial z} = xye^{yz} - e^{-z},$

$$dz = e^{yz}dx + (xze^{yz} + 1)dy + (xye^{yz} - e^{-z})dz,$$

故  $dz|_{(1,2,1)} = e^2dx + (e^2 + 1)dy + (2e^2 - e^{-1})dz.$

当求空间曲面的切平面与法线方程时,若曲面由显式方程给出,则只需求出各个偏导数,然后依公式代入即可.

**例 10** 求椭球面  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$  上平行于平面  $x - y + 2z = 0$  的切平面方程.

解 令  $u = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1$ , 则  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = 4y, \frac{\partial u}{\partial z} = 2z$ , 故平面法向量  $n = (2x, 4y, 2z)$ .

而已知平面法向量为  $\{1, -1, 2\}$ , 由平行关系得

$$\frac{2x}{1} = \frac{4y}{-1} = \frac{2z}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}z, y = -\frac{1}{4}z.$$

代入椭球面方程得

$$(z/2)^2 + 2(-z/4)^2 + z^2 = 1.$$

解得  $z = \pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}, x = \pm\sqrt{\frac{2}{11}}, y = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}.$

所求切平面方程为

$$\left[ x \mp \sqrt{\frac{2}{11}} \right] - \left[ y \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{11}} \right] + 2 \left[ z \mp 2\sqrt{\frac{2}{11}} \right] = 0,$$

即  $x - y + 2z = \pm \sqrt{11/2}$ .

**例 11** 在曲面  $z=xy$  上求一点,使得在这点的法线垂直于平面  $x+2y+z+9=0$ ,求法线方程.

**解** 令  $u=xy-z$ , 则  $\frac{\partial u}{\partial x}=y, \frac{\partial u}{\partial y}=x, \frac{\partial u}{\partial z}=-1$ . 于是平面法向量  $n=\{y, x, -1\}$ .

而已知平面法向量为  $\{1, 3, 1\}$ , 与  $n$  平行. 由

$$\frac{y}{1} = \frac{x}{3} = \frac{-1}{1} \Rightarrow x = -3, \quad y = -1, \quad z = xy = 3,$$

所求点为  $P(-3, -1, 3)$ , 法线方程为

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}.$$

**例 12** 设  $f(x, y)$  在域  $D$  内有一阶连续偏导数, 且恒有  $f_x = f_y = 0$ , 证明:  $f$  是  $D$  内常数函数.

**证** 由题设知,  $f(x, y)$  在  $D$  内可微, 则

$$df = f_x dx + f_y dy = 0 \Rightarrow f = c(\text{常数}),$$

故  $\forall (x, y) \in D, f(x, y) = c(\text{常数})$ .

**例 13** 证明: 若在域  $D$  上,  $f(x, y)$  (对每一个固定的  $y$ ) 对  $x$  连续, 且对  $y$  的偏导数有界, 则  $f(x, y)$  在  $D$  上连续.

**证** 任取  $(x_0, y_0) \in D$ , 由  $f(x, y)$  对  $x$  连续知,  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \epsilon/2.$$

又由拉格朗日中值定理知

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |f'_y(x, \xi)(y - y_0)| \leq M|y - y_0|,$$

其中  $\xi$  位于  $y$  与  $y_0$  之间,  $|f'_y| \leq M$ .

取  $\delta' = \min \left\{ \delta, \frac{\epsilon}{2(M+1)} \right\}$ , 当  $|x - x_0| < \delta', |y - y_0| < \delta'$  时, 有

$$\begin{aligned} & |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \\ & \leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \\ & \leq M|y - y_0| + \epsilon/2 < \epsilon. \end{aligned}$$

即  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  连续. 由  $(x_0, y_0)$  的任意性知,  $f(x, y)$  在  $D$  内连续.

**例 14** 证明: 若  $f_x(x, y)$  与  $f_y(x, y)$  在矩形域  $D$  有界, 则函数  $f(x, y)$  在  $D$  内一致有界.

**证** 因为  $f_x(x, y)$  与  $f_y(x, y)$  在  $D$  有界, 即  $\forall (x, y) \in D$ ,  $\exists M > 0$ , 有  $|f_x(x, y)| \leq M$  与  $|f_y(x, y)| \leq M$ . 因而  $\forall P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) \in D$ , 有  $Q(x_2, y_1)$ .  $\forall \epsilon > 0$ , 使得

$$\begin{aligned} |f(P_1) - f(P_2)| &= |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \\ &\leq |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1)| + |f(x_2, y_1) - f(x_2, y_2)| \\ &= |f_x(\xi, y_1)| |x_1 - x_2| + |f_y(x_2, \eta)| |y_1 - y_2| \\ &\leq M|x_1 - x_2| + M|y_1 - y_2| \leq 2M|P_1 - P_2| < \epsilon, \end{aligned}$$

其中  $\xi$  在  $x_1, x_2$  之间,  $\eta$  在  $y_1, y_2$  之间. 取  $\delta = \epsilon/(2M) > 0$ , 于是,  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \epsilon/(2M) > 0$ , 使得  $\forall P_1, P_2 \in D: |P_1 - P_2| < \delta$ , 有上面的不等式成立, 即  $f(x, y)$  在  $D$  内一致连续.

## 第四节 复合函数微分法与方向导数

### 主要内容

#### 一、复合函数微分法

设函数  $x = \varphi(s, t), y = \psi(s, t)$  定义在  $sot$  平面的区域  $D$  上, 函数  $z = f(x, y)$  定义在  $xoy$  平面的区域  $D_1$  上, 且

$$\{(x, y) | x = \varphi(s, t), y = \psi(s, t), (s, t) \in D\} \subset D_1,$$

则函数  $z = F(s, t) = f[\varphi(s, t), \psi(s, t)], (s, t) \in D$  是以  $z = f(x, y)$  为外函数,  $x = \varphi(s, t), y = \psi(s, t)$  为内函数的复合函数.

1. **定理** 若函数  $x = \varphi(s, t), y = \psi(s, t)$  在点  $(s, t) \in D$  可微,  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y) = [\varphi(s, t), \psi(s, t)]$  可微, 则复合函数  $z =$

$f[\varphi(s, t), \psi(s, t)]$  在点  $(s, t)$  可微, 它关于  $s$  与  $t$  的偏导数分别为

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

2. 若  $z = f(x, y)$  可微, 则  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ .

若  $z = f[\varphi(s, t), \psi(s, t)]$  可微, 则

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial s} ds + \frac{\partial z}{\partial t} dt \\ &= \left( \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right) dt \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} \left( \frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial t} dt \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left( \frac{\partial y}{\partial s} ds + \frac{\partial y}{\partial t} dt \right). \end{aligned}$$

因而又有  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ , 即多元函数的一阶微分形式不变性.

## 二、方向导数与梯度

1. 设函数  $f(x, y, z)$  在点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  的某邻域  $U(P_0) \subset \mathbf{R}^3$  内有定义.  $l$  为从点  $P_0$  出发的射线,  $P(x, y, z)$  为  $l$  上且含于  $U(P_0)$  内的任一点, 以  $\rho$  表示  $P$  与  $P_0$  间的距离. 若极限

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{f(P) - f(P_0)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\Delta f}{\rho}$$

存在, 则称此极限为函数  $f$  在点  $P_0$  沿方向  $l$  的方向导数, 记作

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{P_0}, \quad f_l(P_0), \quad f_l(x_0, y_0, z_0).$$

2. 若函数  $f$  在点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  可微, 则  $f$  在点  $P_0$  沿任一方向  $l$  的方向导数都存在, 且

$$f_l(P_0) = f_x(P_0) \cos \alpha + f_y(P_0) \cos \beta + f_z(P_0) \cos \gamma,$$

其中  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  是方向  $l$  的方向余弦.

3. 若函数  $f(x, y, z)$  在点  $P_0(x, y, z)$  存在对各自变量的偏导数, 则称向量  $(f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0))$  为函数  $f$  在点  $P_0$  的梯度, 记作

$$\text{grad } f = (f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0)),$$

向量  $\text{grad} f$  的模(长度)为

$$|\text{grad} f| = \sqrt{f_x(P_0)^2 + f_y(P_0)^2 + f_z(P_0)^2}.$$

## 疑难解析

### 1. 怎样用复合函数求导法则求导数?

答 多元复合函数的求导,关键是分析复合关系,即应搞清楚

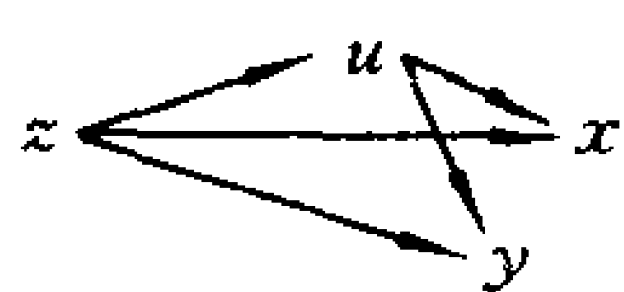


图 10.11

有几个复合层次,几个中间变量,中间变量又是几元函数.为了清晰明了地表示这些关系,最好画出“树形图”,例如  $z = xy + xF(u)$ ,  $u = y/x$ , 则其树形图如图 10.11 所示.然后利用树形图,按链式法则求导即可.

图 10.11 所示.然后利用树形图,按链式法则求导即可.

可.

注意 若中间变量是一元函数,则求得的导数称为全导数,否则称为偏导数.

### 2. 二元函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 沿任一方向 $l$ 的方向导数存在、可微、连续之间有什么关系?

答 二元函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  可微是  $f$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  沿任一方向  $l$  的方向导数存在的充分条件,而不是必要条件.例如

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < x^2, -\infty < x < +\infty, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

在点  $(0, 0)$  不连续也不可微.但在从原点出发的任何射线上都存在包含原点的充分小一段,使得  $f=0$ ,故在点  $(0, 0)$  沿任何方向  $l$  的方向导数都存在,且为  $\frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{(0,0)} = 0$ .可见,  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  可微和连续都不是方向导数存在的必要条件.

若  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  沿任何方向  $l$  的方向导数存在,则在点  $P_0(x_0, y_0)$  处偏导数存在.

3. 函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的梯度与在该点的方向导数有何关系?

答 因为梯度  $\text{grad} f = (f_x(P_0), f_y(P_0))$ , 而分量  $f_x(P_0)$ ,  $f_y(P_0)$  是  $f$  沿  $x$  轴和  $y$  轴方向的方向导数. 梯度的模  $|\text{grad} f| = \sqrt{f_x(P_0)^2 + f_y(P_0)^2}$  也与  $f$  沿  $x$  轴和  $y$  轴方向的方向导数有关.

若记  $l_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ , 则

$$f_l(P_0) = \text{grad} f(P_0) \cdot l_0 = |\text{grad} f| \cos\theta.$$

其中  $\theta$  是梯度向量  $\text{grad} f(P_0)$  与  $l_0$  的夹角, 当  $\theta=0$  时,  $\cos\theta=1$ ,  $f_l(P_0)$  取最大值, 最大值为  $|\text{grad} f(P_0)|$ . 因此,  $f$  在点  $P_0$  可微时,  $f$  在点  $P_0$  的梯度方向是  $f$  增长最快的方向; 沿这一方向的变化率就是梯度的模. 而  $l$  与梯度向量方向相反时, 方向导数取得最小值, 最小值为  $-|\text{grad} f(P_0)|$ .

## 方法、技巧与典型例题分析

### 一、多元复合函数求导与全微分

多元复合函数求导, 首先要弄清复合关系, 然后要正确运用链式法则.

例 1 求下列函数的全导数:

(1)  $z = uv + \sin t, u = e^t, v = \cos t$ , 求  $dz/dt$ ;

(2)  $z = \arcsin(x-y), x = 3t, y = 4t^3$ , 求  $dz/dt$ ;

(3)  $z = f(x, y), x = t + \sin t, y = \varphi(t)$ , 求  $dz/dt$ .

解 此例中间变量都是  $t$  的一元函数, 所以是求全导数.

(1) 复合关系如图 10.12(a) 所示, 故

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial z}{\partial t} = \cos t \cdot e^t - e^t \sin t + \sin t.$$

(2) 复合关系如图 10.12(b) 所示, 故

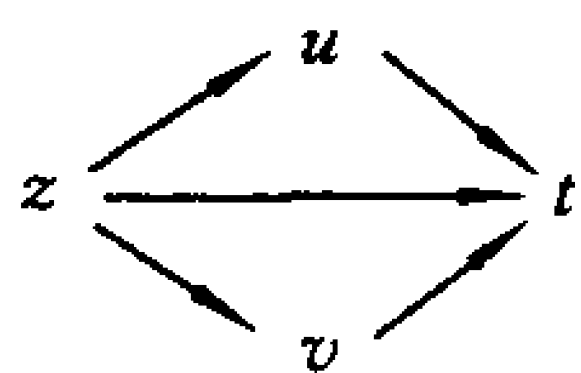
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$



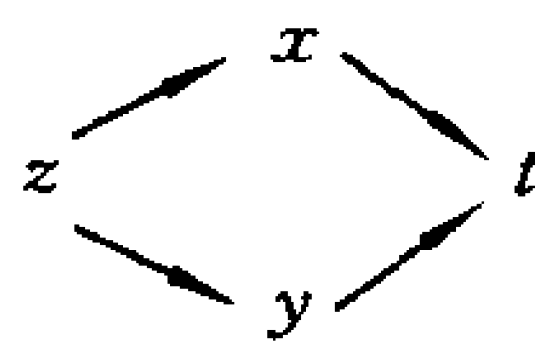
$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{\sqrt{1-(x-y)^2}} - \frac{12t^2}{\sqrt{1-(x-y)^2}} \\
&= \frac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(x-y)^2}}.
\end{aligned}$$

(3) 复合关系如图 10.12(b)所示,故

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\
&= f_x(x, y)(1 - \cos t) + f_y(x, y)\varphi'(t).
\end{aligned}$$



(a)



(b)

图 10.12

**例 2** 设函数  $f(x, y)$  存在一阶连续偏导数, 且  $f(1, 1) = 1$ ,  $f'_1(1, 1) = a$ ,  $f'_2(1, 1) = b$ . 又  $\varphi(x) = f\{x, f[x, f(x, x)]\}$ . 求  $\varphi(1)$  和  $\varphi'(1)$ .

**解**  $\varphi(1) = f\{1, f[1, f(1, 1)]\} = f\{1, f(1, 1)\} = f(1, 1) = 1$ .

由  $\varphi'(x) = f'_1\{x, f[x, f(x, x)]\}$

$$\begin{aligned}
&+ f'_2\{x, f[x, f(x, x)]\}\{f'_1[x, f(x, x)] \\
&+ f'_2[x, f(x, x)][f'_1(x, x) + f'_2(x, x)]\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{故 } \varphi'(1) &= f'_1(1, 1) + f'_2(1, 1)\{[f'_1(1, 1) + f'_2(1, 1)] \\
&\cdot [f'_1(1, 1) + f'_2(1, 1)]\} \\
&= a + b[a + b(a + b)] = a + ab + ab^2 + b^3.
\end{aligned}$$

**例 3** (1)  $z = u^2v - v^2u$ ,  $u = x\cos y$ ,  $v = x\sin y$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ;

(2)  $z = e^u \sin v$ ,  $u = xy$ ,  $v = x + y$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ;

(3)  $z = e^{\ln \sqrt{u^2 + v^2} \cdot \arctan(u/v)}$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ .

**解** (1) 复合关系如图 10.13(a)所示,故

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\
&= (2uv - v^2)\cos y + (u^2 - 2vu)\sin y \\
&= 3x^2\cos y\sin y(\cos y - \sin y),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \\
&= (2uv - v^2)(-x\sin y) + (u^2 - 2vu)x\cos y \\
&= -2x^3\sin y\cos y(\sin y + \cos y) + x^3(\cos^3 y + \sin^3 y).
\end{aligned}$$

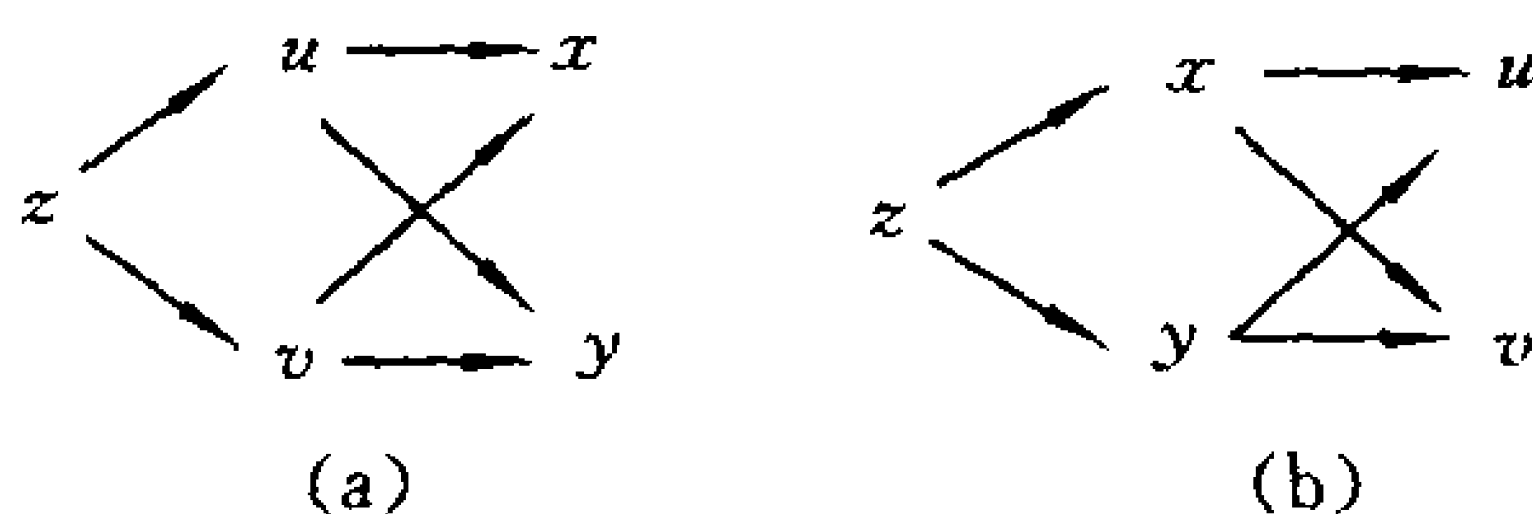


图 10.13

(2) 复合关系如图 10.13(a)所示,故

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = ye^{xy}\sin v + e^{xy}\cos v \\
&= e^{xy}[y\sin(x+y) + \cos(x+y)], \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = xe^{xy}\sin v + e^{xy}\cos v \\
&= e^{xy}[x\sin(x+y) + \cos(x+y)].
\end{aligned}$$

(3) 设  $x = \ln \sqrt{u^2 + v^2}$ ,  $y = \arctan(u/v)$ , 则  $z = e^{xy}$  成为复合函数, 复合关系如图 10.13(b)所示, 故

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\
&= ye^{xy} \frac{u}{u^2 + v^2} + xe^{xy} \frac{1}{1 + (u/v)^2} \cdot \frac{1}{v} \\
&= e^{\ln \sqrt{u^2 + v^2} \cdot \arctan(u/v)} \cdot \frac{u \arctan(u/v) + v \ln \sqrt{u^2 + v^2}}{u^2 + v^2},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\begin{aligned}
&= ye^{xy} \frac{v}{u^2 + v^2} + xe^{xy} \frac{-u}{1 + (u/v)^2} \\
&= e^{\ln \sqrt{u^2 + v^2} \arctan(u/v)} \cdot \frac{v \arctan(u/v) - u \ln \sqrt{u^2 + v^2}}{u^2 + v^2}.
\end{aligned}$$

对于抽象函数形式的复合函数,一定要认真分析复合关系和步骤.为简单起见,一般以下标来标记中间变量的顺序关系,以免出错.

**例 4** 设  $z = F(u, v, w)$ ,  $v = f(u, x)$ ,  $x = g(u, w)$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial w}$ .

**解** 复合关系如图 10.14 所示,故



图 10.14

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{du}{du} + \frac{\partial F}{\partial v} \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial u} \right)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial F}{\partial v} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial w} \right) + \frac{\partial F}{\partial w} = \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial w} + \frac{\partial F}{\partial w}.$$

**例 5** 设  $u = f(x, y, z)$ ,  $\varphi(x^2, e^y, z) = 0$ ,  $y = \sin x$ , 其中  $f$  和  $\varphi$  都有一阶连续偏导数, 且  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$ , 求  $\frac{du}{dx}$ .

**解** 因为  $\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx}$ ,  $\frac{dy}{dx} = \cos x$ , 而  $\frac{dz}{dx}$  要由隐函数方程解出. 对  $\varphi(x^2, e^y, z) = 0$  求导, 得

$$\varphi_1' \cdot 2x + \varphi_2' \cdot e^y \cdot y_x' + \varphi_3' \frac{dz}{dx} = 0,$$

即得 
$$\frac{dz}{dx} = \frac{2x\varphi_1' + e^y\varphi_2'\cos x}{\varphi_3'},$$

故 
$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \cos x \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{2x\varphi_1' + e^y\varphi_2'\cos x}{\varphi_3'} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

**例 6** 求下列函数的偏导数:

(1)  $z = x^3 f(xy, \frac{y}{x})$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ;

(2)  $u = f(x, y, z)$ ,  $z = \varphi(y, t)$ ,  $t = \psi(x, y)$ , 其中  $f, \varphi$  有一阶连续偏导数,  $\psi$  可导, 求  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ;

(3)  $u = f(x, xy, xyz)$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ ;

(4)  $z = f(x, u, v), u = u(x, y), v = v(x, y, u)$ .

解 用乘积及复合导数求导法则求解.

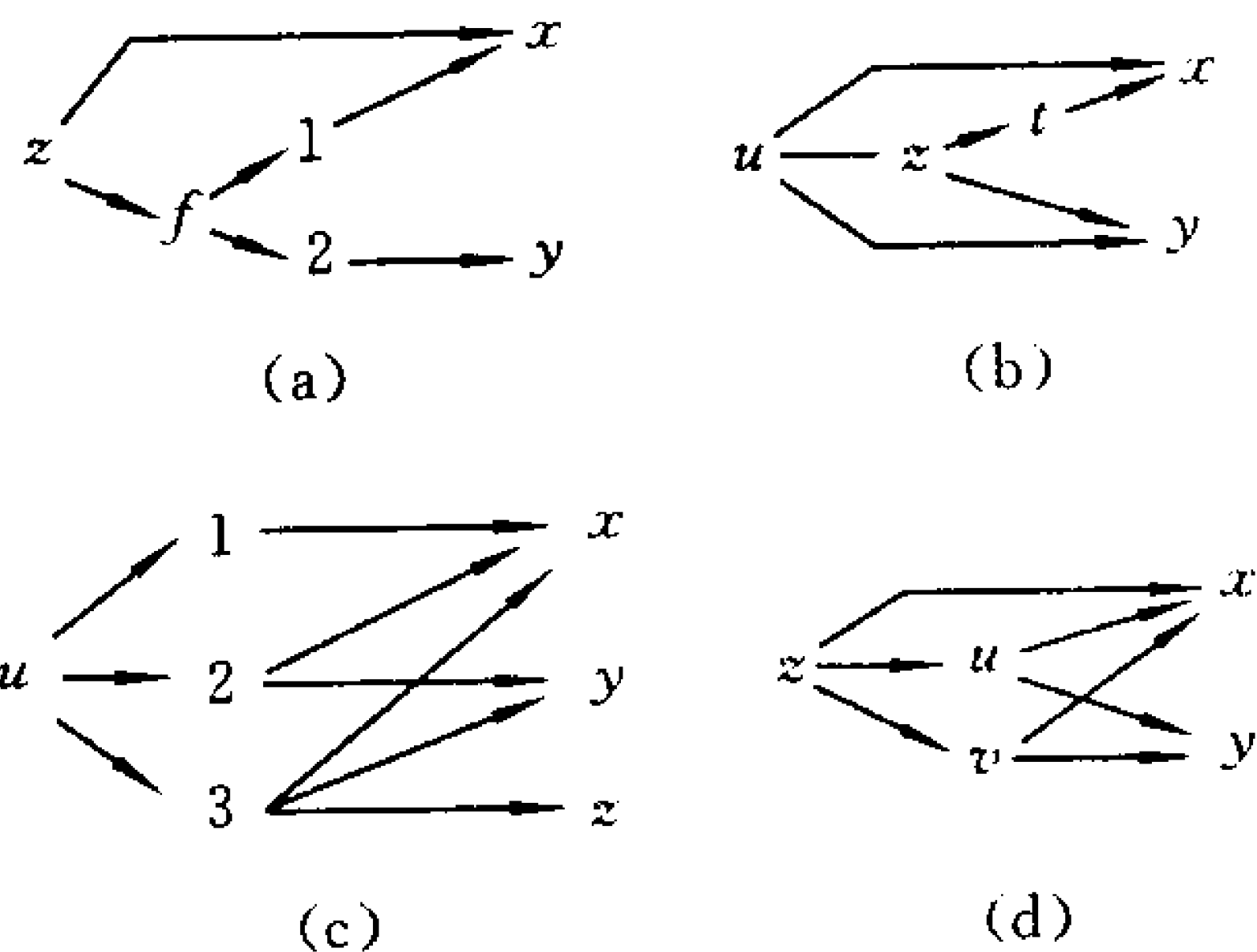


图 10.15

(1) 复合关系如图 10.15(a)所示, 故

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 f_1' \cdot x + x^3 f_2' \cdot \frac{1}{x} = x^4 f_1' + x^2 f_2',$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 3x^2 f + x^3 f_1' \cdot y + x^3 f_2' \left( -\frac{y}{x^2} \right) \\ &= 3x^2 f + x^3 y f_1' - xy f_2'. \end{aligned}$$

(2) 复合关系如图 10.15(b)所示, 故

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \varphi_t' \cdot \psi_x',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \left( \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} \right) = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} (\varphi_y' + \varphi_t' \cdot \psi_y').$$

(3) 复合关系如图 10.15(c)所示, 故

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1' + f_2' y + f_3' yz,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_2' x + f_3' xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = f_3' xy.$$

(4) 复合关系如图 10.15(d)所示, 故

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

例 7 证明:

(1)  $z = \arctan \frac{x^3 - y^3}{x - y}$  是方程  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \sin 2x$  的一个解;

(2)  $z = xy + xF(u)$ ,  $u = \frac{y}{x}$ ,  $F(u)$  可导, 满足方程  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + xy$ ;

(3)  $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$ ,  $f(u)$  可导, 满足方程  $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$ .

证 只要求出偏导数代入验证即可.

$$(1) \frac{\partial z}{\partial x} = 1 / \left[ 1 + \left( \frac{x^3 - y^3}{x - y} \right)^2 \right] \cdot \frac{3x^2(x - y) - (x^3 - y^3)}{(x - y)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 3x^2y + y^3}{(x - y)^2 + (x^3 - y^3)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3 - 3xy^2 + 2y^3}{(x - y)^2 + (x^3 - y^3)^2}, \quad \tan z = \frac{x^3 - y^3}{x - y}.$$

代入得  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2(x - y)(x^3 - y^3)}{(x - y)^2 + (x^3 - y^3)^2},$

又有  $\sin 2z = \frac{2 \tan z}{1 + \tan^2 z} = \frac{2(x - y)(x^3 - y^3)}{(x - y)^2 + (x^3 - y^3)^2},$

从而  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \sin 2z,$

即  $z = \arctan \frac{x^3 - y^3}{x - y}$  是方程  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \sin 2z$  的解.

$$(2) \frac{\partial z}{\partial x} = y + F(u) + x \frac{dF}{du} \left( -\frac{y}{x^2} \right) = y + F(u) - \frac{y}{x} \frac{dF}{du},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + x \frac{dF}{du} \left( \frac{1}{x} \right) = x + \frac{dF}{du}.$$

代入得  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x \left( y + F(u) - \frac{y}{x} \frac{dF}{du} \right) + y \left( x + \frac{dF}{du} \right)$   
 $= xy + xF(u) + xy = z + xy.$

$$(3) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y \cdot f'_u \cdot 2x}{f^2(u)} = -\frac{2xyf'_u}{f^2(u)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f(u) - yf'_u(-2y)}{f^2(u)} = \frac{1}{f(u)} + \frac{2y^2f'_u}{f^2(u)}.$$

代入得  $\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2yf'_u}{f^2(u)} + \frac{1}{y} \frac{1}{f(u)} + \frac{2yf'_u}{f^2(u)}$

$$= \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{y/z} = \frac{z}{y^2}.$$

这里,运用了关系式  $f(u) = z/y$ .

**例 8** 设  $u$  满足方程  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ , 作变量代换  $\xi = x, \eta = y - x, \zeta = z - x$ , 证明: 在新变量下, 满足方程  $\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$ .

**证** 因为  $x = \xi, y = \eta + x = \eta + \xi, z = \zeta + x = \zeta + \xi$ , 所以  $\frac{\partial x}{\partial \xi} = 1, \frac{\partial y}{\partial \xi} = 1, \frac{\partial z}{\partial \xi} = 1$ . 于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cdot 1 \\ &= 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

**例 9** 设  $x = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}, y = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}, z = \frac{1}{u^3} + \frac{1}{v^3} + e^x$ , 求  $dz$ .

**解**  $dx = -\frac{1}{u^2}du - \frac{1}{v^2}dv, \quad (1)$

$$dy = -\frac{2}{u^3}du - \frac{2}{v^3}dv, \quad (2)$$

$$dz = -\frac{3}{u^4}du - \frac{3}{v^4}dv + e^x dx. \quad (3)$$

由式②解得  $du = -\frac{u^3}{2}dy - \frac{u^3}{v^3}dv,$

代入式①得  $dx = \frac{u}{2}dy + \frac{u-v}{v^3}dv.$

再将  $du, dx$  代入式③, 得

$$dz = \left( \frac{3}{2u} + \frac{ue^x}{2} \right) dy + \left( \frac{3}{uv^3} + \frac{u-v}{v^3}e^x - \frac{3}{v^4} \right) dv.$$

**例 10** 若  $\forall t > 0, n$  为整数, 关系式  $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$  恒成立, 则称  $f$  是  $n$  次齐次函数. 证明:  $n$  次齐次函数一定满足关系式

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = n f(x, y).$$

**证** 令  $u = tx, v = ty$ , 则  $\frac{\partial u}{\partial t} = x, \frac{\partial v}{\partial t} = y$ . 对  $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$  两边关于  $t$  求导, 得

$$\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = n t^{n-1} f(x, y),$$

即 
$$x \frac{\partial f}{\partial u} + y \frac{\partial f}{\partial v} = n t^{n-1} f(x, y).$$

两边乘以  $t$ , 得

$$tx \frac{\partial f}{\partial u} + ty \frac{\partial f}{\partial v} = n t^n f(x, y),$$

即 
$$u \frac{\partial f}{\partial u} + v \frac{\partial f}{\partial v} = n f(tx, ty) = n f(u, v),$$

更换字母, 得 
$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = n f(x, y).$$

此公式可以推广到  $m$  ( $m \geq 2$ ) 元函数情形.

## 二、方向导数与梯度

求方向导数的关键是正确求出偏导数与  $l$  的方向向量, 要正确使用公式  $l_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left( \frac{\Delta x}{\rho}, \frac{\Delta y}{\rho}, \frac{\Delta z}{\rho} \right)$ , 要明确  $\frac{\partial f}{\partial l}$  中的  $l$  不是变量,  $\frac{\partial f}{\partial l}$  只是导数形式 (为简便起见, 可将  $\frac{\partial f}{\partial l}$  写成  $\frac{\partial f}{\partial l}$ ).

**例 11** 求下列函数的方向导数:

(1)  $f(x, y) = x^2 - y^2$  在点  $(1, 1)$  沿与  $x$  轴正向成  $60^\circ$  角方向的方向导数;

(2)  $f(x, y, z) = xy^2 + yz^3$  在点  $(1, 2, 1)$  沿  $l = i + 2j + 5k$  的方向导数;

(3)  $f(x, y, z) = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$  在点  $A(1, 0, 1)$  沿  $A$  指向点  $B(3, -2, 2)$  的方向导数.

解 (1) 因为  $\alpha=60^\circ$ , 所以  $l_0=(1/2, \sqrt{3}/2)$ .

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(1,1)} = 2x \Big|_{(1,1)} = 2, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(1,1)} = -2y \Big|_{(1,1)} = -2.$$

故 
$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-2) = 1 - \sqrt{3}.$$

$$(2) l_0 = \left( \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}} \right), \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(1,2,1)} = y^2 \Big|_{(2)} = 4,$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(1,2,1)} = (2xy + z^3) \Big|_{(1,2,1)} = 5,$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{(1,2,1)} = 3yz^2 \Big|_{(1,2,1)} = 6,$$

故 
$$\frac{\partial f}{\partial l} = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} + 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{30}} + 6 \cdot \frac{5}{\sqrt{30}} = \frac{44}{\sqrt{30}}.$$

$$(3) \vec{AB} = (2, -2, 1), |\vec{AB}| = 3, l_0 = \left( \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right),$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(1,0,1)} = \frac{1}{x + \sqrt{y^2 + z^2}} \Big|_{(1,0,1)} = \frac{1}{2},$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(1,0,1)} = \frac{1}{x + \sqrt{y^2 + z^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} \Big|_{(1,0,1)} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{(1,0,1)} = \frac{1}{x + \sqrt{y^2 + z^2}} \cdot \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \Big|_{(1,0,1)} = \frac{1}{2},$$

故 
$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \left( -\frac{2}{3} \right) \cdot 0 + \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

例 12 设  $f(x, y)$  在点  $P_0$  可微,  $l_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ ,  $l_2 = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ ,  $\frac{\partial f(P_0)}{\partial l_1} = 1$ ,  $\frac{\partial f(P_0)}{\partial l_2} = 0$ , 确定  $l$ , 使得

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial l} = \frac{7}{5\sqrt{2}}.$$

解 设  $l_0 = (\cos\theta, \sin\theta)$ , 则由题设得



$$\begin{cases} \frac{\partial f(P_0)}{\partial l_1} = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{2}} = 1, \\ \frac{\partial f(P_0)}{\partial l_2} = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0, \end{cases}$$

解方程组,得  $\frac{\partial f(P_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2}},$

于是 
$$\begin{aligned} \frac{\partial f(P_0)}{\partial l} &= \frac{\partial f(P_0)}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} \sin\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos\theta + \sin\theta) = \frac{7}{5\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

即 
$$\cos\theta + \sin\theta = \frac{7}{5} \Rightarrow \cos\theta \sin\theta = \frac{12}{25}.$$

构造方程 
$$x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{12}{25} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{5}, x_2 = \frac{4}{5}.$$

即得 
$$\cos\theta = \frac{3}{5} \text{ 或 } \frac{4}{5}, \quad \sin\theta = \frac{4}{5} \text{ 或 } \frac{3}{5}.$$

故所求方向 
$$l_0 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \quad \text{或} \quad l_0 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

**例 13** 设  $f(x, y)$  在点  $P_0(2, 0)$  处沿  $l_1 = (2, -1)$  方向的方向导数是 1, 沿  $l_2 = (-2, 0)$  方向的方向导数是 -3, 求  $f$  沿  $l = (3, 2)$  方向的方向导数.

**解** 因为  $l_{1_0} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), l_{2_0} = (-1, 0), l_0 = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ , 所以, 由题设按公式有

$$\begin{cases} \frac{\partial f(P_0)}{\partial l_1} = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1, \\ \frac{\partial f(P_0)}{\partial l_2} = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x} (-1) + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} (0) = -3, \end{cases}$$

解方程组,得 
$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial x} = 3, \quad \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} = 3 - \sqrt{2}.$$

于是 
$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial l} = 3 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} + (3 - \sqrt{2}) \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{15 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}.$$

**例 14** (1) 求函数  $z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$  在点  $P\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$  沿椭圆  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$  在该点内法线方向上的方向导数;

(2) 求函数  $u=xyz$  在点  $M(3,4,5)$  沿锥面  $z=\sqrt{x^2+y^2}$  的法线方向的方向导数.

**解** (1) 求内法线的方向余弦, 需先求曲线切线的斜率和内法线的斜率. 因为椭圆的切线方程为  $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=0$ , 所以, 过点  $P$  的切线方程为  $\frac{x}{\sqrt{2}a}+\frac{y}{\sqrt{2}b}=0$ , 于是  $\tan\alpha=-\frac{b}{a}\Rightarrow$  内法线斜率  $\tan\theta=\frac{a}{b}$ . 故

$$l_0=\left(\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

$$\text{而 } \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P=-\frac{2x}{a^2}\bigg|_P=-\frac{\sqrt{2}}{a}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P=-\frac{2y}{b^2}\bigg|_P=-\frac{\sqrt{2}}{b}.$$

$$\begin{aligned}\text{得 } \left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_P &= -\frac{\sqrt{2}}{a} \cdot \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \left[-\frac{\sqrt{2}}{b} \cdot \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{ab} \sqrt{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

(2) 求出锥面的法向量  $n=\pm\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$  在点  $M$  有  $n=\pm\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -1\right)$ , 故在点  $M$  有

$$n_0=\pm\left(\frac{3\sqrt{2}}{10}, \frac{2\sqrt{2}}{5}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\text{而 } \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=yz|_M=20, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=xz|_M=15, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=xy|_M=12.$$

于是

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_M=\pm\left[20\cdot\frac{3\sqrt{2}}{10}+15\cdot\frac{2\sqrt{2}}{5}+12\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

$$= \pm 6\sqrt{2}.$$

**例 15** 在  $xoy$  平面上存在温度场  $T=4x^2+9y^2$ .

- (1) 求在点  $P(9,4)$  沿方向角为  $210^\circ$  的方向  $l$  的温度变化率;
- (2) 在什么方向上, 点  $P$  的温度变化率取得最大值? 并求出最大值.

**解** (1) 依题意, 求温度变化率就是求方向导数  $\left. \frac{\partial T}{\partial l} \right|_P$ .

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial l} \right|_P &= \left( \frac{\partial T}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial T}{\partial y} \sin \alpha \right) \Big|_P \\ &= (\cos 210^\circ \cdot 8x + \sin 210^\circ \cdot 18y) \Big|_P \\ &= \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot 72 + \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot 72 = -36(1 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

(2) 梯度方向是变化率最大的方向.

$$\text{grad} T \Big|_P = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_P i + \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_P j = 72i + 72j.$$

此时,  $\tan \alpha = 1$ , 方向角  $\alpha = 45^\circ$ , 温度变化率的最大值为

$$|\text{grad} T| = \sqrt{72^2 + 72^2} = 72\sqrt{2}.$$

**例 16** 求函数  $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$  在点  $M(x, y, z)$  沿  $r = xi + yj + zk$  方向的方向导数, 并讨论在哪些点的方向导数等于梯度的大小, 考虑: (1)  $a, b, c$  两两不相等; (2)  $a = b \neq c$ ; (3)  $a = b = c$ .

$$\begin{aligned} \text{解 } \text{grad} u &= \left( \frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2} \right), \quad r_0 = \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right), \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \end{aligned}$$

故 
$$\frac{\partial u}{\partial r} = \text{grad} u \cdot r_0 = \frac{2}{r} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right).$$

(1) 当  $a, b, c$  两两不相等时, 等值面为椭球面  $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = k$  ( $k$  为常数). 梯度方向为等值面的法线方向, 由低值面指向高值面. 在点  $(0, 0, \pm c\sqrt{c})$ ,  $(0, \pm b\sqrt{b}, 0)$ ,  $(\pm a\sqrt{a}, 0, 0)$  等 6

个点的法线方向与矢径  $r$  方向相同, 有  $\frac{\partial u}{\partial r} = |\text{grad} u|$ .

(2) 当  $a=b \neq c$  时, 等值面为旋转椭球面. 在等值面的两个顶点  $(0, 0, \pm c \sqrt{c})$  及等值面与  $z=0$  的平面的交线  $x^2 + y^2 = \lambda a^2, z=0$  上, 梯度方向与  $r$  方向相同,  $\frac{\partial u}{\partial r} = |\text{grad} u|$ .

(3) 当  $a=b=c$  时, 等值面为球面. 球面上每一点的外法线方向与矢径  $r$  方向相同, 即球面上处处有  $\frac{\partial u}{\partial r} = |\text{grad} u|$ .

**例 17** 函数  $f(x, y)$  在点  $P(2, 0)$  沿  $l_1 = (2, -2)$  方向的方向导数是  $2\sqrt{2}$ , 沿  $l_2 = (-2, 0)$  方向的方向导数是  $-2$ . 求  $f$  在点  $P$  沿  $l = (3, 2)$  方向的方向导数.

$$\begin{aligned} \text{解 } l_{1_0} &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), l_{2_0} = (-1, 0), l_0 = \left( \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right). \\ \text{由 } \begin{cases} \frac{\partial f(P)}{\partial l_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a - b) = 2\sqrt{2}, \\ \frac{\partial f(P)}{\partial l_2} = -a = -2, \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a = 2, \\ b = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

这里设  $\text{grad} P = (a, b)$ , 故  $\text{grad} f = (2, -2)$ . 从而得

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot 2 + \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot (-2) = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

## 第五节 泰勒公式与极值问题

### 主要内容

1. 如果函数  $f(x, y)$  在域  $D \subset \mathbf{R}^2$  上有一阶偏导数,  $f'_x, f'_y$  是  $x, y$  的二元函数, 若它们的偏导数也存在, 则称之为  $f(x, y)$  的二

阶偏导数.

一般定义函数的  $n$  阶偏导数的偏导数(若存在)为  $n+1$  阶偏导数. 一般地,  $m$  元函数的  $n$  阶偏导数可以有  $m^n$  个.

2. 如果函数  $f(x, y)$  的两个混合偏导数  $f_{xy}$  和  $f_{yx}$  在点  $(x_0, y_0)$  连续, 则等式  $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$  成立.

此结论可以推广到  $n$  元函数情形.

3. 如果函数  $f(x, y)$  在域  $D \subset \mathbf{R}^2$  上可微,  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ , 则称  $dz$  的微分为  $z$  的二阶微分  $d^2z = d(dz)$ .

类似地, 有  $d^k z = d(d^{k-1}z)$ . 二阶及二阶以上微分统称为高阶微分.

4. 中值定理 设二元函数  $f$  在凸区域  $D \subset \mathbf{R}^2$  上连续, 在  $D$  的所有内点都可微, 则对  $D$  内任意两点  $P(a, b), Q(a+h, b+k) \in \text{int}D$ , 存在某  $\theta$  ( $0 < \theta < 1$ ), 使得

$$\begin{aligned} & f(a+h, b+k) - f(a, b) \\ &= f_x(a+\theta h, b+\theta k)h + f_y(a+\theta h, b+\theta k)k. \end{aligned}$$

5. 泰勒定理 若  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的邻域  $U((x_0, y_0); \delta)$  有直到  $n+1$  阶的连续偏导数, 则对  $U((x_0, y_0); \delta)$  内任一点  $(x_0+h, y_0+k)$  存在相应的  $\theta \in (0, 1)$ , 使得

$$\begin{aligned} & f(x_0+h, y_0+k) \\ &= f(x_0, y_0) + \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) \\ &+ \frac{1}{2!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0) + \cdots \\ &+ \frac{1}{n!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0, y_0) \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k) \end{aligned}$$

6. 设函数  $f$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的某邻域  $U(P_0)$  有定义, 若对于任何点  $P(x, y) \in U(P_0)$ , 不等式  $f(P) \leq f(P_0)$  (或  $f(P) \geq$

$f(P_0)$ 成立,则称函数  $f$  在点  $P_0$  取得极大值(或极小值). 点  $P_0$  称为  $f$  的极大值点(或极小值点).

7. 极值必要条件 若函数  $f$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  存在偏导数,且在  $P_0$  取得极值,则有

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

若函数  $f$  在点  $P_0$  满足以上两个等式,则称  $P_0$  为  $f$  的稳定点(或驻点、静止点).

若函数  $f$  存在二阶连续偏导数,则称矩阵

$$H_f(P_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{P_0}$$

为函数  $f$  在  $P_0$  的黑塞(Hesse)矩阵.

8. 极值充分条件 设  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的某邻域  $U(P_0)$  内存在二阶连续偏导数,且  $P_0$  是  $f$  的稳定点,则当  $H_f(P_0)$  是正定矩阵时,  $f$  在  $P_0$  取得极小值;当  $H_f(P_0)$  是负定矩阵时,  $f$  在  $P_0$  取得极大值;当  $H_f(P_0)$  是不定矩阵时,  $f$  在  $P_0$  无极值.

极值必要条件与充分条件均可推广到  $n$  元函数情形.

## 疑难解析

1. 写出求  $C^{(2)}$  类函数  $f$  的极值的步骤(若  $f$  在  $I$  上有  $n$  阶连续的导数,则称  $f$  为  $C^{(n)}$  类函数).

答 首先求出  $f$  的所有稳定点  $P_0$ ;然后求出  $f$  在  $P_0$  的黑塞矩阵,判定黑塞矩阵的类型;最后确定  $f(P_0)$  是极大值、极小值,或不是极值.

若  $z=f(x, y)$ , 令  $f_{xx}(P_0)=A, f_{xy}(P_0)=B, f_{yy}(P_0)=C$ , 则  $H_f(P_0)=\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ , 于是

(1) 若  $A>0, AC-B^2>0$  (即  $H_f(P_0)$  正定), 则  $f(P_0)$  为极小值;

(2) 若  $A < 0, AC - B^2 > 0$  (即  $H_f(P_0)$  负定), 则  $f(P_0)$  为极大值;

(3) 若  $AC - B^2 < 0$  (即  $H_f(P_0)$  不定), 则  $f(P_0)$  不是极值;

(4) 若  $AC - B^2 = 0$ , 不能肯定  $f$  在点  $P_0$  是否有极值.

## 方法、技巧与典型例题分析

### 一、高阶偏导数与全微分

求高阶偏导数与全微分没有什么新的方法, 一般用逐阶求导法. 应注意微分形式不变性已不复存在, 并注意求导时不要增项和丢项, 以保证运算的正确.

例 1 求下列函数的高阶导数:

(1)  $z = e^x(\cos y + x \sin y)$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ;

(2)  $z = x \ln(x, y)$ , 求  $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ ;

(3)  $z = \frac{1}{x} f(x, y) + y \varphi(x + y)$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ;

(4)  $z = f(e^x \sin y, x^2 + y^2)$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

解 此例中的  $f, \varphi$  均有二阶连续偏导数.

(1)  $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x[\cos y + (x+1)\sin y], \frac{\partial z}{\partial y} = e^x(-\sin y + x \cos y),$

故 
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= e^x[\cos y + (x+1)\sin y] + e^x \sin y \\ &= e^x[\cos y + (x+2)\sin y], \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^x[-\sin y + (x+1)\cos y] = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^x(-\cos y - x \sin y) = -e^x(\cos y + x \sin y).$$

(2)  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x}{y^2}$ , 故

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 0, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -\frac{1}{y^2}.$$

(3) 因为  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}f(xy) + \frac{y}{x}f'(xy) + y\varphi'(x+y)$ , 所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{x^2}f'(xy)x + \frac{1}{x}f'(xy) + \frac{y}{x}f''(xy) \cdot x \\ &\quad + \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y) \\ &= yf''(xy) + \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y).\end{aligned}$$

(4)  $\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'e^x \sin y + 2xf_2'$ , 故

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= f_{11}''e^{2x} \sin y \cos y + 2e^x f_{12}''(y \sin y + x \cos y) \\ &= 4xyf_{xy}'' + f_1'e^x \cos y.\end{aligned}$$

例 2 求变上限函数  $f(x, y) = \int_0^{xy} e^{-t^2} dt$  的关系式

$$\frac{x}{y} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{y}{x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

解  $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{-(xy)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{-(xy)^2},$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2xy^3e^{-(xy)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x^3ye^{-(xy)^2},$$

故

$$\frac{x}{y} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{y}{x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2e^{-(xy)^2}.$$

例 3 求下列函数指定阶的偏导数:

(1)  $u = x^3 \sin y + y^3 \sin x$ , 求  $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}$ ;

(2)  $u = \arctan \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$ , 求  $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ ;

(3)  $f(x, y) = e^x \sin y$ , 求  $f_{x^m y^n}^{(m+n)}(0, 0)$ .

解 (1)  $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 \sin y + y^3 \cos x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x \sin y - y^3 \sin x,$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 6 \sin y - y^3 \cos x, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} = 6 \cos y - 3y^2 \cos x,$$



$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2} = -6 \sin y - 6 y \cos x, \quad \frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3} = -6(\cos y + \cos x).$$

$$(2) u = \arctan x + \arctan y + \arctan z + \varepsilon \pi \quad (\varepsilon = 0, \pm 1),$$

所以 
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0.$$

$$(3) f_x^{(m)} = e^x \sin y, f_{x^m y^n}^{(m+n)} = e^x \sin(y + n\pi/2),$$

所以 
$$f_{x^m y^n}^{(m+n)}(0, 0) = e^0 \sin(n\pi/2) = \sin(n\pi/2).$$

**例 4** 求下列函数的高阶全微分:

$$(1) u = \ln(x^x y^y z^z), \text{ 求 } d^4 u; \quad (2) u = e^{ax+by}, \text{ 求 } d^n u;$$

$$(3) u = x^p y^q z^r, \text{ 求 } d^n u, \text{ 并由此证明}$$

$$d^n P_n(x, y, z) = n! P_n(dx, dy, dz).$$

**解** (1)  $u = x \ln x + y \ln y + z \ln z$ , 故

$$\begin{aligned} d^4 u &= (x \ln x)^{(4)} dx^4 + (y \ln y)^{(4)} dy^4 + (z \ln z)^{(4)} dz^4 \\ &= 2 \left( \frac{dx^4}{x^3} + \frac{dy^4}{y^3} + \frac{dz^4}{z^3} \right). \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 因为 } d(ax+by) = adx + bdy, d^2(ax+by) = 0, \text{ 故}$$

$$d^n u = d^n(e^{ax+by}) = e^{ax+by} [d(ax+by)]^n = e^{ax+by} (adx + bdy)^n.$$

$$(3) d(x^p y^q z^r) = C_n^{p+q} d^{p+q}(x^p y^q) \cdot d^r(z^r)$$

$$= \frac{n!}{r! (p+q)!} [C_{p+q}^p d^p(x^p) d^q(y^q) d^r(z^r)]$$

$$= \frac{n!}{r! (p+q)!} \frac{(p+q)!}{p! q!} p! q! r! dx^p dy^q dz^r$$

$$= n! dx^p dy^q dz^r.$$

而  $P_n(x, y, z)$  是  $n$  次齐次多项式, 可表示为形如  $Ax^p y^q z^r$  的若干个单项式的和, 其中  $A$  是常数.

由  $d^n(x^p y^q z^r) = n! dx^p dy^q dz^r$  立即可得

$$d^n P_n(x, y, z) = n! P_n(dx, dy, dz).$$

**例 5** 求下列函数指定阶的全微分:

$$(1) u = f(\sqrt{x^2 + y^2}), \text{ 求 } d^2 u;$$

$$(2) u = f(\xi, \eta), \xi = xy, \eta = x/y, \text{ 求 } d^2 u;$$

(3)  $u=f(x,y,z), x=t, y=t^2, z=t^3$ , 求  $d^2u$ ;

(4)  $u=f(\xi,\eta,\zeta), \xi=a_1x+b_1y+c_1z, \eta=a_2x+b_2y+c_2z, \zeta=a_3x+b_3y+c_3z$ , 求  $d^2u$ .

解 (1)  $du=f'\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ , 故

$$d^2u=f''\frac{(xdx+ydy)^2}{x^2+y^2}+f'\frac{(ydx-xdy)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

(2)  $du=f'_1(ydx+xdy)+f'_2\frac{ydx-xdy}{y^2}$ , 故

$$d^2u=f''_{11}(ydx+xdy)^2+f''_{22}\frac{(ydx-xdy)^2}{y^4}+2f''_{12}\frac{y^2dx^2-x^2dy^2}{y^2}+2f'_1dxdy-2f'_2\frac{(ydx-xdy)dy}{y^3}.$$

(3)  $du=(f'_1+2tf'_2+3t^2f'_3)dt$ , 故

$$d^2u=(f''_{11}+4t^2f''_{22}+6t^4f''_{33}+4tf''_{12}+6t^2f''_{13}+12t^3f''_{23}+2f'_2+6tf'_3)dt.$$

(4)  $d^2u$

$$\begin{aligned} &= \left[ (a_1dx+b_1dy+c_1dz) \right] \frac{\partial}{\partial \xi} + (a_2dx+b_2dy+c_2dz) \frac{\partial}{\partial \eta} \\ &\quad + (a_3dx+b_3dy+c_3dz) \frac{\partial}{\partial \zeta} \Big] \cdot f(\xi, \eta, \zeta) \\ &= \left[ \left( a_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + a_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + a_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) dx + \left( b_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + b_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) dy \right. \\ &\quad \left. + \left( c_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + c_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + c_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) dz \right] \cdot f(\xi, \eta, \zeta). \end{aligned}$$

## 二、泰勒公式

函数的泰勒公式可以用求偏导数的方法直接依公式求出, 这还是比较麻烦的; 也可以利用一元函数泰勒公式或幂级数的展开式来求, 这比较方便和简捷. 更重要的是要学会如何利用泰勒公式解决实际问题.

**例 6** 在点  $A(1,1,1)$  的邻域内依泰勒公式将下列函数展开至二次项:

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 3yz, & \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 - 3xz, & \frac{\partial f}{\partial z} &= 3z^2 - 3xy; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 6x, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 6y, & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= 6z; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -3z, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= -3x, & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} &= -3y. \end{aligned}$$

求出在点(1,1,1)的值,得

$$f(1,1,1) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -3,$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad f(x, y, z) &= 3[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - (x-1)(y-1) \\ &\quad - (x-1)(z-1) - (y-1)(z-1)] + o(\rho^2). \end{aligned}$$

事实上,高于三阶的偏导函数都等于零,故本例中, $o(\rho^2)=0$ .

**例 7** 求下列函数在指定点的二阶泰勒公式:

$$(1) f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5, \text{ 在点 } P(1, -2);$$

$$(2) f(x, y) = \sin x \sin y, \text{ 在点 } P(\pi/4, \pi/4).$$

$$\text{解} \quad (1) f_x(P) = (4x - y - 6)|_P = 0,$$

$$f_y(P) = (-x - 2y - 3)|_P = 0,$$

$$f_{xx}(P) = 4, \quad f_{xy}(P) = -1, \quad f_{yy}(P) = -2,$$

而所有三阶偏导数都为零. 所以,所求二阶泰勒公式为

$$f(x, y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2.$$

$$(2) \text{ 因为 } f(P) = \frac{1}{2}, \quad f_x(P) = \cos x \sin y|_P = \frac{1}{2},$$

$$f_y(P) = \sin x \cos y|_P = \frac{1}{2}, \quad f_{xx}(P) = -\sin x \sin y|_P = -\frac{1}{2},$$

$$f_{xy}(P) = \cos x \cos y|_P = \frac{1}{2}, \quad f_{yy}(P) = -\sin x \sin y|_P = -\frac{1}{2},$$

所以,所求二阶泰勒公式为

$$f(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$+ \frac{1}{2} \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \left( y - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{4} \left( y - \frac{\pi}{4} \right)^2 + o(\rho^2),$$

其中

$$\rho = \sqrt{\left( x - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \left( y - \frac{\pi}{4} \right)^2}.$$

**例 8** 依据麦克劳林公式将下列函数展开至四次项:

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

**解** 因为  $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$ , 所以

$$f(x, y) = [1 + (-x^2 - y^2)]^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{8}(x^2 + y^2)^2.$$

**例 9** 若  $|x| \ll 1, |y| \ll 1$ , 求下列函数的近似公式:

$$(1) \frac{\cos x}{\cos y}; \quad (2) \arctan \frac{1+x+y}{1-x+y}; \quad (3) (1+x)^m (1+y)^n.$$

**解** 利用一元函数的麦克劳林公式求解.

$$(1) \frac{\cos x}{\cos y} = \cos x (1 - \sin^2 y)^{-1/2}$$

$$\begin{aligned} &= \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \dots \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \sin^2 y + \dots \right) \\ &\approx \left( 1 - \frac{x^2}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \sin^2 y \right) \approx \left( 1 - \frac{x^2}{2} \right) \left( 1 - \frac{y^2}{2} \right) \\ &\approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

$$(2) \arctan \frac{1+x+y}{1-x+y} = \arctan \frac{1+x/(1+y)}{1-x/(1+y)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi}{4} + \arctan \frac{x}{1+y} = \frac{\pi}{4} + \left( \frac{x}{1+y} \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{x}{1+y} \right)^3 + \dots \\ &\approx \frac{\pi}{4} + x(1-y+y^2) \approx \frac{\pi}{4} + x - xy. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) (1+x)^m (1+y)^n &= (1+mx+\dots)(1+ny+\dots) \\ &\approx 1+mx+ny. \end{aligned}$$

**例 10** 求下列函数的麦克劳林级数:

$$(1) f(x, y) = (1+x)^m (1+y)^n; \quad (2) f(x, y) = e^x \cos y;$$

$$(3) f(x, y) = \sin(x^2 + y^2); \quad (4) f(x, y) = \int_0^1 (1+x)^{t^2 y} dt.$$

解 利用一元函数的麦克劳林级数求解.

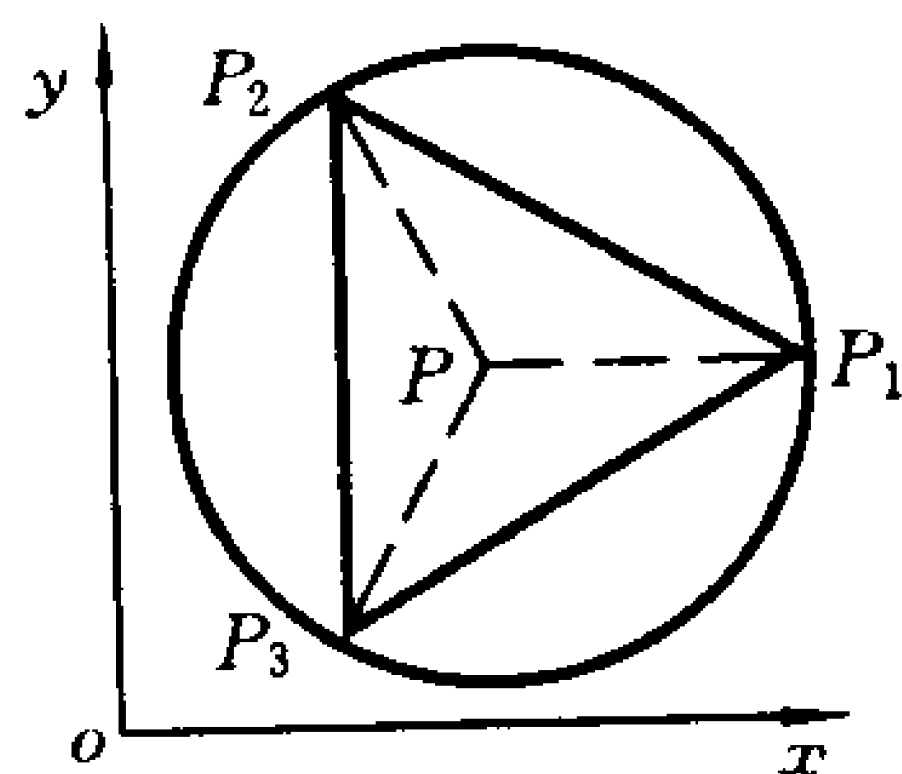
$$\begin{aligned}
 (1) \quad & (1+x)^m(1+y)^n \\
 &= \left[ 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots \right] \left[ 1+ny+\frac{n(n-1)}{2!}y^2+\cdots \right] \\
 &= 1+(mx+ny)+\frac{1}{2!}[m(m-1)x^2+2mnxy+n(n-1)y^2] \\
 &\quad +\cdots, |x|<1, |y|<1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad e^x \cos y &= \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \right] \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} \right] \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^m y^{2n}}{m!(2n)!}, \\
 &\quad |x|<+\infty, |y|<+\infty.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \sin(x^2+y^2) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2+y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^{2k} y^{2(2n+1-k)}}{k!(2n+1-k)!} \\
 &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left( \sin \frac{n+m}{2} \pi \right) \frac{x^{2n} y^{2m}}{m!n!}, \quad x^2+y^2<+\infty.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & (1+x)^{t^2 y} = e^{t^2 y \ln(1+x)} \\
 &\approx 1+t^2 y \ln(1+x) + [t^2 y \ln(1+x)]^2/2! \\
 &\approx 1+t^2 y(x-x^2/2) = 1+t^2 xy - t^2 x^2 y/2,
 \end{aligned}$$

$$\text{故 } f(x, y) \approx \int_0^1 \left( 1+t^2 xy - \frac{t^2}{2} x^2 y \right) dt = 1 + \frac{1}{3} y \left( x - \frac{x^2}{2} \right).$$



例 11 设圆心为  $P(x, y)$ , 半径为  $\rho$ ,  $f(P)=f(x, y)$ ,  $P_i(x_i, y_i)$ ,  $i=1, 2, 3$  为圆内接正三角形的三个顶点, 且  $x_1=x+\rho$ ,  $y_1=y$ . 依  $\rho$  的正整数幂把函数

$$F(\rho) = \frac{1}{3} [f(P_1) + f(P_2) + f(P_3)]$$

图 10.16 展开, 准确到  $\rho^3$ .

解 如图 10.16 可知

$$P_1(x + \rho, y), \quad P_2(x - \rho/2, y + \sqrt{3}\rho/2),$$

$$P_3(x - \rho/2, y - \sqrt{3}\rho/2),$$

$$\begin{aligned} F(\rho) &= \frac{1}{3} [f(P_1) + f(P_2) + f(P_3)] \\ &\approx \frac{1}{3} \left\{ \left[ f(P) + \rho \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\rho^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] + \left[ f(P) + \left( -\frac{\rho}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial x} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\sqrt{3}\rho}{2} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\rho^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{3\rho^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\sqrt{3}\rho^2}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[ f(P) - \frac{\rho}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\sqrt{3}\rho}{2} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\rho^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3\rho^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\sqrt{3}\rho^2}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right] \right\} \\ &= f(P) + \frac{\rho^2}{4} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right). \end{aligned}$$

**例 12** 求函数  $f(x, y) = x/y$  在点  $(1, 1)$  邻域的带皮亚诺余项的泰勒公式.

**解** 将函数变形后利用一元函数泰勒公式求解.

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{1 + (x - 1)}{1 + (y - 1)} = [1 + (x - 1)] \frac{1}{1 + (y - 1)} \\ &= [1 + (x - 1)] \left[ \sum_{k=0}^n (-1)^k (y - 1)^k + o(y - 1)^n \right] \\ &= 1 + (x - 1) - (y - 1) - (x - 1)(y - 1) \\ &\quad + (y - 1)^2 + \cdots + (-1)^{n-1} (x - 1)(y - 1)^{n-1} \\ &\quad + (-1)^n (y - 1)^n + o(\rho^n), \end{aligned}$$

其中  $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ .

### 三、无条件极值与最值

无条件极值又称为无约束极值,一般只要求出偏导数,确定稳定点,通过判别黑塞矩阵正定、负定或不定,即可确定函数的极大值、极小值或判定函数有无极值.最值问题要考虑闭区域和开区域情形.闭区域情形不仅要求出区域内极值,还要讨论边界上的最

值,通过比较确定闭区域上的最值;开区域情形只要比较区域内极值的大小就行.

**例 13** 求函数  $f(x, y) = 2(y - x^2)^2 - x^7/7 - y^2$  的极值,并证明在过点  $(0, 0)$  的直线上,点  $(0, 0)$  是直线上函数的极小值点.

**解** 因为  $f'_x = -8x(y - x^2) - x^6 = 0,$

$$f'_y = 4(y - x^2) - 2y = 0,$$

解得  $x_1 = 0, y_1 = 0$  和  $x_2 = -2, y_2 = 8$ .

由  $f''_{xx} = -8y + 24x^2 - 6x^5, f''_{xy} = -8x, f''_{yy} = 2$ , 得

$$H_f(-2, 8) = \begin{pmatrix} 224 & 16 \\ 16 & 2 \end{pmatrix}, \Delta_1 = 224 > 0, \Delta_2 = 192 > 0.$$

所以,点  $(-2, 8)$  为极小值点,极小值  $f(-2, 8) = -352/7$ .

对点  $(0, 0)$ , 黑塞矩阵无法判别,与周围点比较知,点  $(0, 0)$  不是极值点.

在直线  $y = kx$  上,  $f(x, kx) = x^2(k^2 - 4kx + 2x^2 - x^5/7)$ . 若  $k \neq 0$ , 则当  $x$  充分小时,有  $f(x, kx) \geq 0$ ; 若  $k = 0$ ,  $f(x, 0) = x^4(2 - x^3/7)$ , 则当  $x$  充分小时,也有  $f(x, 0) \geq 0$ . 故得出,在直线  $y = kx$  上,函数在点  $(0, 0)$  有极小值.

**例 14** 求下列函数的极值:

$$(1) z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}; \quad (2) z = xe^{y + xsiny};$$

$$(3) z = e^{2x}(x + y^2 + 2y).$$

**解** (1)  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x(1 - x^2 - y^2)e^{-(x^2 + y^2)},$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y(1 - x^2 - y^2)e^{-(x^2 + y^2)},$$

令  $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ , 求得稳定点为点  $(0, 0)$  及  $x^2 + y^2 = 1$  上的点. 因为,在点  $(0, 0)$ , 有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = C = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = B = 0,$$

由  $AC - B^2 = 4 > 0, A > 0$  知,  $z(0, 0) = 0$  为极小值.

令  $x^2 + y^2 = t$ , 则  $z = te^{-t}$ . 由于  $z'_t = e^{-t}(1-t)$ , 故  $t = x^2 + y^2 = 1$  为驻点. 又由于  $z''_t = (t-2)e^{-t}$ ,  $z''_t(1) = -e^{-1} < 0$ , 故  $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$  在  $x^2 + y^2 = 1$  取得极大值  $e^{-1}$ .

$$(2) \begin{cases} f'_x = e^{y+xsiny}(1+x\sin y) \stackrel{\text{令}}{=} 0, \\ f'_y = e^{y+xsiny}x(1+x\cos y) \stackrel{\text{令}}{=} 0, \end{cases} \quad \text{解得}$$

$$x_n = (-1)^{n+1} \sqrt{2}, \quad y_n = n\pi + \pi/4, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

在点  $(x_n, y_n)$ , 有

$$A_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2}} e^{y_n + x_n \sin y_n},$$

$$B_n = -e^{y_n + x_n \sin y_n}, \quad C_n = (-1)^{n+1} \sqrt{2} e^{y_n + x_n \sin y_n}.$$

而  $A_n C_n - B_n^2 = -2e^{2(y_n + x_n \sin y_n)} < 0$ .

故  $f(x, y)$  无极值.

$$(3) \begin{cases} f'_x = e^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1) \stackrel{\text{令}}{=} 0, \\ f'_y = e^{2x}(2y + 2) \stackrel{\text{令}}{=} 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1/2, \\ y_0 = -1. \end{cases}$$

在点  $(1/2, -1)$ , 有

$$A = 4e^{2x}(x + y^2 + 2y + 1)|_{(1/2, -1)} = 2e > 0,$$

$$B = 4e^{2x}(y + 1)|_{(1/2, -1)} = 0, \quad C = 2e^{2x}|_{(1/2, -1)} = 2e,$$

而  $AC - B^2 = 4e^2 > 0$ .

故  $f(x, y)$  在  $(1/2, -1)$  取得极小值,  $f(1/2, -1) = -e/2$ .

**例 15** 求多项式  $P(x) = x^2 + ax + b$ , 使得积分  $\int_{-1}^1 P^2(x) dx$  取得最小值.

**解** 记  $f(a, b) = \int_{-1}^1 P^2(x) dx = \int_{-1}^1 (x^2 + ax^2 + b)^2 dx$ , 则

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 2 \int_{-1}^1 (x^2 + ax + b)x dx = 4 \int_0^1 ax^2 dx = \frac{4}{3}a,$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 2 \int_{-1}^1 (x^2 + ax + b) dx = 4 \int_0^1 (x^2 + b) dx = \frac{4}{3}a + 4b.$$



令  $\frac{\partial f}{\partial a}=0, \frac{\partial f}{\partial b}=0$ , 解得  $a=0, b=-\frac{1}{3}$ .

又  $A=\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}=\frac{4}{3}, B=\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b}=0, C=\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}=4$ , 而  $AC-B^2=16/3>0, A=4/3>0$ , 故  $f(0, -1/3)$  是最小值,  $P(x)=x^2-1/3$ .

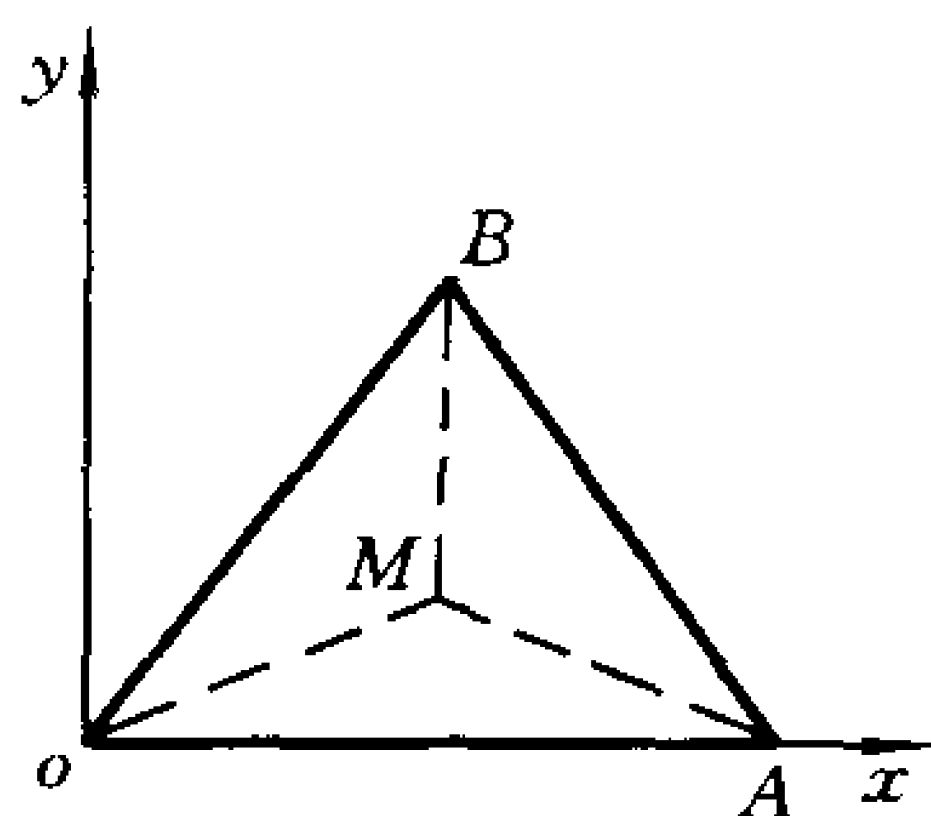


图 10.17

**例 16** 证明: 当任一锐角三角形内一点到三顶点连线成等角时, 该点到三顶点距离之和为最小.

**证** 如图 10.17 所示, 设三角形三顶点为  $O(0,0), A(a,0), B(b,c)$ .  $M(x,y)$  为三角形内任意点, 则距离之和可表示为

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{(x-b)^2 + (y-c)^2}.$$

设  $\vec{OM}, \vec{AM}, \vec{BM}$  与  $x$  轴正向夹角分别为  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ , 则

$$\begin{aligned} f'_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} \\ &\quad + \frac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2 + (y-c)^2}} \\ &= \cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_y &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} \\ &\quad + \frac{y-c}{\sqrt{(x-b)^2 + (y-c)^2}} \\ &= \sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3 = 0, \end{aligned}$$

故

$$\begin{cases} \cos\theta_1 + \cos\theta_2 = -\cos\theta_3, \\ \sin\theta_1 + \sin\theta_2 = \sin\theta_3. \end{cases}$$

将两式平方后相加, 得  $\cos(\theta_2 - \theta_1) = -1/2$ , 于是

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{2\pi}{3} \text{ 或 } \frac{4\pi}{3}, \quad \theta_3 - \theta_2 = \frac{2\pi}{3} \text{ 或 } \frac{4\pi}{3}.$$

所以  $\theta_2 - \theta_1 = \theta_3 - \theta_2 = \frac{2\pi}{3}$  时, 函数  $f(x, y)$  取得最小值.

**例 17** 求函数  $f(x, y) = x^2 + 2x^2y + y^2$  在圆域  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  上的最大值与最小值.

$$\text{解 } \begin{cases} f'_x = 2x(1+2y) = 0, \\ f'_y = 2(x^2+y) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, & 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, \\ y = 0, & -1/2, -1/2. \end{cases}$$

函数在  $D$  内有三个驻点  $P_1(0, 0)$ ,  $P_2(1/\sqrt{2}, -1/2)$ ,  $P_3(-1/\sqrt{2}, -1/2)$ , 且  $f(P_1) = 0$ ,  $f(P_2) = 1/4$ ,  $f(P_3) = 1/4$ .

在边界  $x^2 + y^2 = 1$  上,  $f$  变为一元函数

$$f_1 = 1 + 2(1 - y^2)y = 1 + 2y - 2y^3, \quad -1 \leq y \leq 1.$$

由  $f_{1y}' = 2 - 6y^2 \stackrel{\text{令}}{=} 0$  解得  $y = \pm 1/\sqrt{3}$ . 因此  $f_1(-1) = 1$ ,  $f_1(1) = 1$ ,  $f_1(1/\sqrt{3}) = 1 + 4\sqrt{3}/9$ ,  $f_1(-1/\sqrt{3}) = 1 - 4\sqrt{3}/9$ . 从而可知, 在  $D$  的边界上,  $f$  的最大值为  $f_1(1/\sqrt{3}) = 1 + 4\sqrt{3}/9$ ,  $f$  的最小值为  $f_1(-1/\sqrt{3}) = 1 - 4\sqrt{3}/9$ .

再与  $D$  内的极值比较可知,  $f$  的最小值与最大值分别为

$$\min_{(x,y) \in D} f(x, y) = f(0, 0) = 0,$$

$$\max_{(x,y) \in D} f(x, y) = f(1/\sqrt{3}) = 1 + 4\sqrt{3}/9.$$

**例 18** 设渠道的横截面为等腰梯形, 截面积为  $A$ , 等腰梯形的底与高各为多少时, 渠道的湿周(两腰与底之和)为最小?

**解** 如图 10.18 所示, 设等腰梯形下底长为  $x$ , 高为  $h$ , 湿周为  $L$ , 腰与底边延长线夹角为  $\theta$  ( $0 < \theta < \pi/2$ ), 则

$$L = x + 2h/\sin\theta, \quad A = (2x + 2h\cot\theta)h/2 \Rightarrow x = A/h - h\cot\theta,$$

则 
$$L(h, \theta) = \frac{A}{h} + \frac{h(2 - \cos\theta)}{\sin\theta}.$$

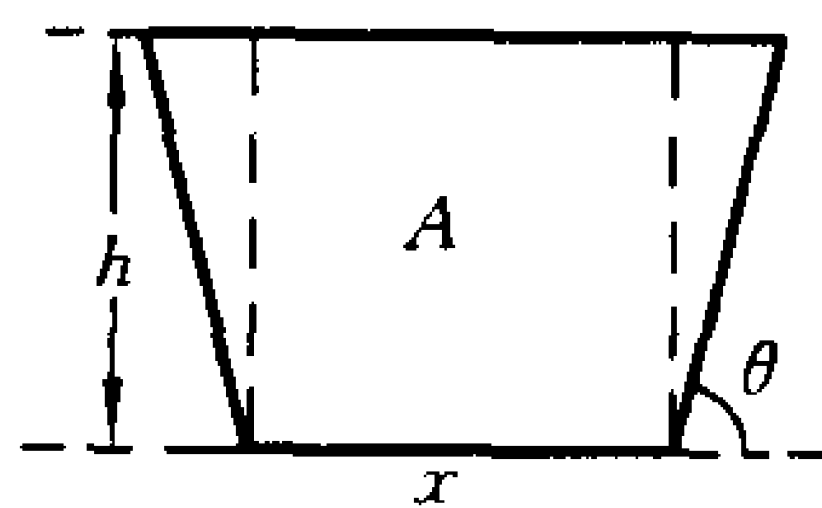


图 10.18

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad & \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial h} = -\frac{A}{h^2} + \frac{2 - \cos\theta}{\sin\theta} \stackrel{\text{令}}{=} 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{h\sin^2\theta - h(2 - \cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta} \stackrel{\text{令}}{=} 0, \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} h = \sqrt{A/\sqrt{3}}, \\ \theta = \pi/3. \end{cases} \end{aligned}$$

由此得惟一稳定点  $(\sqrt{A/\sqrt{3}}, \pi/3)$ . 而问题必有最小值, 所以  $L(h, \theta)$  在点  $(\sqrt{A/\sqrt{3}}, \pi/3)$  取得最小值. 从而可知, 等腰梯形当底  $x = A/h - h\cot\theta = 2\sqrt{A}/\sqrt[4]{27}$ , 高  $h = \sqrt{A}/\sqrt[4]{27}$  时, 渠道的湿周为最小.

**例 19** 某厂的一种产品同时在两个城市销售, 售价分别为  $q_1$  和  $q_2$ , 需求函数分别为

$$q_1 = 24 - 0.2p_1, \quad q_2 = 10 - 0.05p_2,$$

总成本函数为  $C = 35 + 40(q_1 + q_2)$ . 问: 厂方如何确定两个市场的售价, 才能使其获得的总利润最大? 最大总利润为多少?

**解** 先建立总收入函数  $R$  和总利润函数  $L$ .

$$R = p_1q_1 + p_2q_2 = 24p_1 - 0.2p_1^2 + 10p_2 - 0.05p_2^2,$$

$$L = R - C = 32p_1 - 0.2p_1^2 + 12p_2 - 0.05p_2^2 - 1395,$$

$$\text{求得} \quad \begin{cases} L_{p_1}' = 32 - 0.4p_1 \stackrel{\text{令}}{=} 0, \\ L_{p_2}' = 12 - 0.1p_2 \stackrel{\text{令}}{=} 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 80, \\ p_2 = 120, \end{cases}$$

由此得惟一稳定点  $(80, 120)$ . 而问题必有最大值, 所以确定售价分别为  $p_1 = 80, p_2 = 120$  时, 获得的总利润最大, 最大总利润为  $R = 605$ .

**例 20** 证明: 若  $x, y, z$  为实数, 且  $e^x + y^2 + |z| = 3$ , 则  $e^x y^2 |z| \leq 1$ .

**证** 设  $f(x, y) = e^x y^2 |z| = e^x y^2 (3 - e^x - y^2)$ ,  $f(x, y)$  的定义域以  $e^x + y^2 = 3$  为边界. 所以

$$\begin{cases} f'_x = e^x y^2 (3 - 2e^x - y^2) \stackrel{\text{令}}{=} 0, \\ f'_y = 2e^x y (3 - e^x - 2y^2) \stackrel{\text{令}}{=} 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = \pm 1, \end{cases}$$

故  $f(x, y)$  有两个稳定点  $(0, 1)$  与  $(0, -1)$ .

又由  $f''_{xx} = e^x y^2 (3 - 4e^x - y^2)$ ,  $f''_{xy} = 2e^x y (3 - 2e^x - 2y^2)$ ,  $f''_{yy} = 2e^x (3 - e^x - 6y^2)$ , 得

$f''_{xx}(0, \pm 1) = -2$ ,  $f''_{xy}(0, \pm 1) = \mp 2$ ,  $f''_{yy}(0, \pm 1) = -8$ ,  
故  $AC - B^2 > 0$ , 而  $A < 0$ , 知  $(0, 1)$  与  $(0, -1)$  均为极大值点, 极大值  $f(0, \pm 1) = 1$ . 而在边界  $e^x + y^2 = 3$  上  $f(0, y) = 0$ . 从而可知,  $f(0, \pm 1) = 1$  为最大值, 即  $e^x y^2 |z| \leq 1$ .

**例 21** 证明: 当  $0 < x < 1, 0 < y < +\infty$  时, 有

$$f(x, y) = yx^y(1 - x) < e^{-1}.$$

**证** 求  $f(x, y)$  在  $0 < x < 1, 0 < y < +\infty$  上的最大值.

在区域边界上,  $f(x, y)$  显然恒等于零, 而在区域内,  $f(x, y) > 0$ , 故  $f(x, y)$  的最大值在区域内, 最大值即极值.

$$\text{由} \begin{cases} f'_x = yx^{y-1}(y - xy - x) \stackrel{\text{令}}{=} 0, \\ f'_y = x^y(1 - x)(1 + y \ln x) \stackrel{\text{令}}{=} 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(1 - x) = x, \\ x^y = e^{-1}, \end{cases}$$

满足上述条件的点为极值点, 即最大值点, 有

$$f(x, y) = yx^y(1 - x) = xe^{-1} < e^{-1}.$$

从而知  $f(x, y)$  在域  $0 < x < 1, 0 < y < +\infty$  上的最大值小于  $e^{-1}$ .

**例 22** 设函数  $z = f(x, y)$  在  $U((x_0, y_0), \delta)$  内二阶偏导数连续, 且  $f'_x(x_0, y_0) = 0, f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ . 证明:  $\exists U(y_0; \delta)$ , 使得  $\forall y \in U(y_0; \delta), \exists f(x, y)$  关于  $x$  有一个极小值  $g(y)$ , 且  $g'(y) = f'_y(x_0, y_0)$ .

**证** 由题设条件知,  $\exists \delta_1 > 0$ , 使得在  $(x_0, y_0)$  的方形  $\delta_1$  邻域内, 有  $f''_{xx}(x, y) > 0$ . 又由题设条件知,  $f(x, y_0)$  在  $(x_0, y_0)$  取得极小值  $f(x_0, y_0)$ , 故  $\exists \delta_2 (\delta_1 > \delta_2 > 0)$ , 使得在  $(x_0, y_0)$  的方形  $\delta_2$  邻域内, 当  $x < x_0$  时,  $f'_x(x, y_0) < 0$ ; 当  $x > x_0$  时,  $f'_x(x, y_0) > 0$ . 所以  $\exists \delta > 0, \delta_2 > \delta > 0$ , 使得当  $y \in U(y_0, \delta)$  时,

$$f'_x(x_0 + \delta_2, y) > 0, \quad f'_x(x_0 - \delta_2, y) < 0.$$

因为  $\forall y \in U(y_0, \delta)$ ,  $f(x, y)$  关于  $x$  在  $[x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2]$  上连续, 且上述不等式成立, 从而由连续函数的介值定理知,  $\exists \xi \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ , 使得  $f'_x(\xi, y) = 0$ .

因为  $(\xi, y) \in U((x_0, y_0); \delta_2)$ , 所以  $f''_{xx}(\xi, y) > 0$ . 故  $f(x, y)$  关于  $x$  有极小值  $f(\xi, y) = g(y)$ .

而  $f(x, y_0)$  关于  $x$  的极小值是  $f(x_0, y_0) = g(y_0)$ .

设  $g(y_0 + \Delta y) = f(x'', y_0 + \Delta y)$  ( $|\Delta y| < \delta$ ), 由题设条件知,  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  可微, 故

$$\begin{aligned} & f(x'', y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= f'_x(x_0, y_0)(x'' - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\rho) \\ &= f'_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\rho) \quad (\rho = \sqrt{(x'' - x_0)^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{从而} \quad g'(y_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x'', y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \\ &= f'_y(x_0, y_0) + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\Delta y} = f'_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

**例 23** 设  $z = f(x, y)$  在有界闭域  $D$  上有二阶连续偏导数, 且  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \neq 0$ , 证明:  $z$  的最值只能在  $D$  的边界上取得.

**证** 由题设知,  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 故  $z = f(x, y)$  在  $D$  上必取得最值.

用反证法. 设  $z = f(x, y)$  在  $D$  内点  $(x_0, y_0)$  取得最值, 由题设条件知,  $f(x, y)$  在  $D$  内可微, 故  $(x_0, y_0)$  必为极值点. 由  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \leq 0$ , 于是  $AC - B^2 = \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} < 0$ . 此式在点  $(x_0, y_0)$  也应成立, 从而在点  $(x_0, y_0)$  无极值, 引出矛盾. 这样,  $z = f(x, y)$  在  $D$  内无极值点, 所以最值只能在  $D$  的边界取得.

# 第十一章 隐函数定理及其应用

## 第一节 隐函数与隐函数组

### 主要内容

1. 设  $X \subset \mathbf{R}, Y \subset \mathbf{R}$ , 函数  $F: X \times Y \rightarrow \mathbf{R}$  对于方程  $F(x, y) = 0$ , 若  $\exists I \subset X$  与  $J \subset Y$ , 使得  $\forall x \in I$ , 恒有惟一确定的  $y \in J$ , 满足  $F(x, y) = 0$ , 则称方程确定了一个定义在  $I$  上、值域含于  $J$  的隐函数  $y = f(x)$ . 恒等式  $F(x, f(x)) \equiv 0, x \in I$  成立.

2. 惟一性定理 若函数  $F$  满足下列三个条件:

- 在以  $P_0(x_0, y_0)$  为内点的某一区域  $D \subset \mathbf{R}^2$  上连续,
- $F(x_0, y_0) = 0$  (通常称为初始条件),
- 在  $D$  内存在连续偏导数  $F_y(x, y)$ , 且  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ ,

则在  $U(P_0) \subset D$  内, 方程  $F(x, y) = 0$  惟一地确定一个定义在某区域  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$  内的函数  $y = f(x)$ , 使得

- $f(x_0) = y_0, x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$  时,  $(x, f(x)) \in U(P_0)$  且  $F(x, f(x)) \equiv 0$ ,
- $f(x)$  在  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$  内连续.

3. 可微性定理 设  $F(x, y)$  满足惟一性定理中的三个条件, 且  $F_x(x, y)$  在  $D$  内连续, 则由  $F(x, y) = 0$  确定的隐函数  $y = f(x)$

在其定义域  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$  内有连续导函数  $f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$ .

4. 若函数  $F$  满足以下三个条件:

- $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$  在以点  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y^0)$  为内点的区域  $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$  上连续,

- $F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y^0) = 0$ ,

- 偏导数  $F_{x_1}, F_{x_2}, \dots, F_{x_n}, F_y$  在  $D$  内存在并连续, 且

$$F_y(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y^0) \neq 0,$$

则在  $U(P_0) \subset D$  内, 方程  $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$  惟一确定一个定义在  $Q_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  的某邻域  $U(Q_0) \subset \mathbf{R}^n$  内的  $n$  元连续函数  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 使得

- 当  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U(Q_0)$  时,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) \in U(P_0),$$

且

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0,$$

$$y^0 = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0);$$

- $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  在  $U(Q_0)$  内有连续偏导数  $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$ , 且

$$f_{x_1} = -\frac{F_{x_1}}{F_y}, \quad f_{x_2} = -\frac{F_{x_2}}{F_y}, \quad \dots, \quad f_{x_n} = -\frac{F_{x_n}}{F_y}.$$

5. 设  $F(x, y, u, v)$  与  $G(x, y, u, v)$  为定义在区域  $V \subset \mathbf{R}^4$  上的两个四元函数, 若  $\exists$  平面区域  $D, \forall (x, y) \in D$ , 有区间  $J$  和  $K$  上惟一一对值  $u \in J, v \in K$ , 与  $x, y$  一起满足方程组

$$F(x, y, u, v) = 0, \quad G(x, y, u, v) = 0,$$

则称方程组确定了两个定义在  $D \subset \mathbf{R}^2$  上. 值域分别含于  $J$  和  $K$  的隐函数组  $u = f(x, y), v = g(x, y)$ , 恒等式

$$F(x, y, f(x, y), g(x, y)) \equiv 0, \quad G(x, y, f(x, y), g(x, y)) \equiv 0$$

成立. 行列式  $\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$  称为函数  $F, G$  关于变量  $u, v$  的雅可比(Jacobi)行列式.

6. 若函数  $F, G$  满足以下三个条件:

- $F(x, y, u, v)$  与  $G(x, y, u, v)$  在以点  $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$  为内

点的区域  $V \subset \mathbb{R}^4$  内连续,

$$\bullet F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0,$$

• 在  $V$  内,  $F, G$  有一阶连续偏导数, 且  $J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}$  在点  $P_0$  不等于零,

则在  $U(P_0) \subset V$  内, 方程组惟一确定定义在  $Q_0(x_0, y_0)$  的某邻域  $U(Q_0)$  内的二元隐函数  $u = f(x, y), v = g(x, y)$ , 使得

$$\bullet u_0 = f(x_0, y_0), v_0 = g(x_0, y_0), \text{ 且当 } (x, y) \in U(Q_0) \text{ 时,}$$

$$(x, y, f(x, y), g(x, y)) \in U(P_0),$$

$$F(x, y, f(x, y), g(x, y)) \equiv 0,$$

$$G(x, y, f(x, y), g(x, y)) \equiv 0,$$

$$\bullet f(x, y), g(x, y) \text{ 在 } U(Q_0) \text{ 内连续,}$$

$$\bullet f(x, y), g(x, y) \text{ 在 } U(Q_0) \text{ 内有一阶连续偏导数}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}.$$

7. 函数组  $u = u(x, y), v = v(x, y)$  及其一阶偏导数在某区域  $D \subset \mathbb{R}^2$  上连续, 点  $P_0(x_0, y_0)$  是  $D$  的内点, 且  $u_0 = u(x_0, y_0), v_0 = v(x_0, y_0), \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \Big|_{P_0} \neq 0$ , 则在点  $P_0'(u_0, v_0)$  的某邻域  $U(P_0')$  内存在惟一一组反函数  $x = x(u, v), y = y(u, v)$ , 使得  $x_0 = x(u_0, v_0), y_0 = y(u_0, v_0)$ , 且当  $(u, v) \in U(P_0')$  时, 有  $(x(u, v), y(u, v)) \in U(P_0)$  及恒等式

$$u \equiv u(x(u, v), y(u, v)), \quad v \equiv v(x(u, v), y(u, v)).$$

反函数组在  $U(P_0')$  内存在一阶连续偏导数

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial v}{\partial y} \Big/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial u}{\partial y} \Big/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Big/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}.$$



互为反函数组的函数组  $u=u(x,y), v=v(x,y)$  与  $x=x(u,v), y=y(u,v)$  的雅可比行列式互为倒数, 即

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1.$$

## 疑难解析

### 1. 怎样理解惟一性定理的条件?

答 (1) 条件是充分的但不是必要的. 例如  $y^3 - x^3 = 0$  在点  $(0,0)$  不满足  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$  (事实上,  $F_y(0,0) = 0$ ), 但它惟一确定连续函数  $y=x$ .

而  $F(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$ , 满足其它条件, 仅因  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$  ( $F_y(0,0) = 0$ ), 而在  $P((0,0); \delta)$  内不存在惟一的隐函数.

(2) 第三个条件是为了保证在  $U(P_0)$  内  $F$  关于  $y$  严格单调而设立的, 可减弱为“ $F$  在  $U(P_0)$  关于  $y$  严格单调”.

(3) 若将第三个条件改为  $F_x(x,y)$  连续, 且  $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ , 则结论为: 存在惟一的连续函数  $x=g(y)$ .

惟一性定理是一个局部性定理, 只在点  $P(x_0, y_0)$  的某邻域内,  $F(x,y)=0$  惟一确定函数  $y=f(x)$ . 而在大范围内不一定惟一. 例如,  $F(x,y) = x^2 - y^2 = 0$ . 在  $-\infty < x < +\infty$  内, 若只要求  $y=f(x)$  连续, 有四个解:  $y=x, y=-x, y=|x|, y=-|x|$ . 若要求  $y=f(x)$  可微, 则有两个解:  $y=x, y=-x$ . 若要求满足  $f(1)=1$  且连续, 有两个解:  $y=x, y=|x|$ . 若要求满足  $f(0)=0$ , 则仍有四个解.

## 方法、技巧与典型例题分析

### 一、隐函数及其偏导数

讨论隐函数的存在主要是验证隐函数存在的条件是否满足,

对于有些问题,则可如疑难解析 1 所述去考虑. 隐函数的导数,可在确定存在连续可微隐函数的前提下,应用复合函数求导法求出;隐函数的高阶导数可用同样方法求得.

**例 1** 设  $x = x(y, z)$ ,  $y = y(z, x)$ ,  $z = z(x, y)$  为由方程  $F(x, y, z) = 0$  所确定的隐函数, 证明:  $\frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = -1$ .

**证** 依可微性定理,  $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_y}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$ , 所以

$$\frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{F_y}{F_x}\right) \left(-\frac{F_z}{F_y}\right) \left(-\frac{F_x}{F_z}\right) = -1.$$

**例 2** 设  $z = z(x, y)$  由方程  $y = z + x^2 z^3$  所确定, 求  $u = \sin z$  的偏导数  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

**解** 令  $F(x, y, z) = z + x^2 z^3 - 1$ , 则  $\frac{\partial F}{\partial z} = 1 + 3x^2 z^2 \neq 0$ , 故依惟一性定理, 对  $y = z + x^2 z^3$  两边微分, 有

$$dy = dz + 2xz^3 dx + 3x^2 z^2 dz,$$

故 
$$dz = \frac{dy - 2xz^3 dx}{1 + 3x^2 z^2}.$$

又 
$$du = \cos z dz = \frac{\cos z dy - 2xz^3 \cos z dx}{1 + 3x^2 z^2},$$

于是 
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2xz^3 \cos z}{1 + 3x^2 z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\cos z}{1 + 3x^2 z^2}.$$

**例 3** 证明: 设  $z = z(x, y)$  由方程  $F(x + z/y, y + z/x) = 0$  所确定, 且  $F(u, v)$  具有连续偏导数, 则  $z = xy + x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$ .

**证** 依隐函数求导公式, 设  $u = x + z/y$ ,  $v = y + z/x$ , 则  $F_x = F_u - \frac{z}{x^2} F_v$ ,  $F_y = -\frac{z}{y^2} F_u + F_v$ ,  $F_z = \frac{1}{y} F_u + \frac{1}{x} F_v$ , 故

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_u - (z/x^2) F_v}{F_u/y + F_v/x} = \frac{zF_v - x^2 F_u}{xF_u + yF_v} \cdot \frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-(z/y^2) F_u + F_v}{F_u/y + F_v/x} = \frac{zF_u - y^2 F_v}{xF_u + yF_v} \cdot \frac{x}{y},$$

于是

$$\begin{aligned} xy + x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} &= xy + \frac{yzF_v - x^2yF_u}{xF_u + yF_v} + \frac{xzF_u - xy^2F_v}{xF_u + yF_v} \\ &= xy + \frac{z(xF_u + yF_v) - xy(xF_u + yF_v)}{xF_u + yF_v} \\ &= xy + z - xy = z. \end{aligned}$$

例 4 在上半椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  ( $z > 0$ ) 上, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ .

解 设  $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ ,  $F_z = \frac{2z}{c^2} > 0$ , 故隐函数存在. 方程两边分别对  $x, y$  求导, 得

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2z}{c^2} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{2y}{b^2} + \frac{2z}{c^2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

解得  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2}{a^2} \frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2}{b^2} \frac{y}{z}$ .

例 5 设  $u = f(x, z)$ , 而  $z(x, y)$  是由方程  $z = x + y\varphi(z)$  所确定的函数, 求  $du$ .

解 先对  $u = f(x, z)$  求偏导数  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ , 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1 + f_2 \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f_2 \frac{\partial z}{\partial y}.$$

再令  $F(x, y, z) = x + y\varphi(z) - z$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ , 得

$$F_x = 1, \quad F_y = \varphi(z), \quad F_z = y\varphi'(z) - 1,$$

故  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{y\varphi'(z) - 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\varphi(z)}{y\varphi'(z) - 1},$

从而 
$$\begin{aligned} du &= \left( f_1 + f_2 \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + f_2 \frac{\partial z}{\partial y} dy \\ &= \left( f_1 - \frac{f_2}{y\varphi'(z) - 1} \right) dx - \frac{f_2 \varphi(z)}{y\varphi'(z) - 1} dy. \end{aligned}$$

例 6 证明: 由方程  $y = x\varphi(z) + \psi(z)$  所确定函数  $z = z(x, y)$  满足方程  $\left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ .

证 先对方程求一阶偏导数,有

$$\begin{cases} \varphi(z) + x\varphi'(z) \frac{\partial z}{\partial x} + \psi'(z) \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ x\varphi'(z) \frac{\partial z}{\partial y} + \psi'(z) \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \quad (x\varphi' + \psi' \neq 0). \end{cases}$$

再对上式求偏导,得

$$\begin{cases} 2\varphi' \frac{\partial z}{\partial x} + (x\varphi'' + \psi'') \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + (x\varphi' + \psi') \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, & \text{①} \\ \varphi' \frac{\partial z}{\partial y} + (x\varphi'' + \psi'') \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + (x\varphi' + \psi') \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, & \text{②} \\ (x\varphi'' + \psi'') \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + (x\varphi' + \psi') \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, & \text{③} \end{cases}$$

$$\text{①} \times \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - \text{②} \times 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \text{③} \times \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2, \text{得}$$

$$(x\varphi' + \psi') \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right] = 0.$$

因为  $x\varphi' + \psi' \neq 0$ , 故

$$\left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

例 7 设方程  $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$  确定  $z$  为  $x, y$  的函数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  和  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

解 对方程两边关于  $x$  求偏导, 得

$$2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 4 \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \text{④}$$

即

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{2 - z}. \quad \text{⑤}$$

对式④两边关于  $x$  求偏导, 得

$$2 + 2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1 + (\partial z / \partial x)^2}{2 - z}. \quad \text{⑥}$$

将式⑤代入式⑥,得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(2-z)^2 + x^2}{(2-z)^3}.$$

又对题给方程关于  $y$  求偏导,得

$$2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 4 \frac{\partial z}{\partial y}, \quad (7)$$

即

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{2-z}. \quad (8)$$

对式⑦两边关于  $y$  求偏导,得

$$2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z / \partial x \cdot \partial z / \partial y}{2-z}. \quad (9)$$

将式⑤、式⑧代入式⑨,得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x/(2-z) \cdot y(2-z)}{2-z} = \frac{xy}{(2-z)^3}.$$

**例 8** 设函数  $F(u, v)$  有二阶连续偏导数, 证明: 方程  $F\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}\right) = 0$  所确定的隐函数  $z=z(x, y)$  满足下列方程:

$$(x-x_0) \frac{\partial z}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial z}{\partial y} = z-z_0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

证

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(z-z_0)F_u}{(x-x_0)F_u + (y-y_0)F_v}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(z-z_0)F_v}{(x-x_0)F_u + (y-y_0)F_v}, \quad (11)$$

将  $(x-x_0) \times (10) + (y-y_0) \times (11)$ , 得

$$(x-x_0) \frac{\partial z}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial z}{\partial y} = z-z_0. \quad (12)$$

式⑫两边关于  $x$  或  $y$  求导, 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = - \frac{y - y_0}{x - x_0} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = - \frac{x - x_0}{y - y_0} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

将上述两式相乘, 即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

**例 9** 设函数  $\varphi(u, v)$  具有一阶连续偏导数, 证明: 方程  $\varphi(cx - az, cy - bz) = 0$  所确定的函数  $z = f(x, y)$  满足

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

**证** 设  $u = cx - az, v = cy - bz$ , 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\varphi_x}{\varphi_z} = - \frac{\varphi_u \cdot c - \varphi_v \cdot 0}{\varphi_u(-a) + \varphi_v(-b)} = \frac{c\varphi_u}{a\varphi_u + b\varphi_v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\varphi_y}{\varphi_z} = - \frac{\varphi_u \cdot 0 + \varphi_v \cdot c}{\varphi_u(-a) + \varphi_v(-b)} = \frac{c\varphi_v}{a\varphi_u + b\varphi_v},$$

故 
$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c(a\varphi_u + b\varphi_v)}{a\varphi_u + b\varphi_v} = c.$$

## 二、隐函数组及其偏导数

**例 10** 讨论方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = u^2 + v^2 - x^2 - y = 0, \\ G(x, y, u, v) = u + v - x^2 + y = 0 \end{cases}$$

确定的隐函数组  $u = u(x, y)$  与  $v = v(x, y)$  及其在点  $P(2, 1, 1, 2)$  的偏导数.

**解** 因为  $F'_u(P) = 2, F'_v(P) = 4, G'_u(P) = 1, G'_v(P) = 1$ , 所以

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

故方程组确定了一个隐函数组  $u = u(x, y), v = v(x, y)$ .

对方程组两边分别关于  $x, y$  求导, 得

$$\begin{cases} 2uu_x' + 2vv_x' - 2x \stackrel{\text{令}}{=} 0, \\ 2uu_y' + 2vv_y' - 1 \stackrel{\text{令}}{=} 0, \\ u_x' + v_x' - 2x \stackrel{\text{令}}{=} 0, \\ u_y' + v_y' + 1 \stackrel{\text{令}}{=} 0, \end{cases}$$

解得

$$\begin{aligned} u_x' &= \frac{x(1-2v)}{u-v}, & u_y' &= \frac{1+2v}{2(u-v)}, \\ v_x' &= \frac{x(2u-1)}{u-v}, & v_y' &= \frac{-2u-1}{2(u-v)}. \end{aligned}$$

例 11 设  $f(x, y, z) = xy^2z^3$ , 且  $x, y, z$  又满足

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0. \quad (13)$$

(1) 设  $z$  是由方程⑬确定的隐函数, 求  $f_x(1, 1, 1)$ ;

(2) 设  $y$  是由方程⑬确定的隐函数, 求  $f_x(1, 1, 1)$ .

解 (1) 因为  $z = z(x, y)$ , 所以  $f(x, y, z) = f(x, y, z(x, y))$ , 依复合函数求导法则, 有

$$f_x = y^2z^3 + xy^2 \cdot 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} = y^2z^2 \left( z + 3x \frac{\partial z}{\partial x} \right).$$

又对方程⑬两边关于  $x$  求偏导, 得

$$2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} - 3yz - 3xz \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

从而知  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3yz-2x}{2z-3xy} \Rightarrow f_x = y^2z^2 \left( z + 3x \frac{3yz-2x}{2z-3xy} \right),$

于是  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,1,1)} = -1, \quad f_x(1, 1, 1) = -2.$

(2) 此时,  $f(x, y, z) = f(x, y(x, z), z)$ , 有

$$f_x = y^2z^3 + xz^3 \cdot 2y \frac{\partial y}{\partial x} = yz^3 \left( y + 2x \frac{\partial y}{\partial x} \right).$$

将方程⑬两边关于  $x$  求偏导, 得

$$2x + 2y \frac{\partial y}{\partial x} - 3yz - 3xz \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

从而知  $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{3yz-2x}{2y-3xz} \Rightarrow f_x = yz^3 \left( y + 2x \frac{3yz-2x}{2y-3xz} \right)$ .

于是  $\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{(1,1,1)} = -1, \quad f_x(1,1,1) = -1$ .

**注意** 题(1),(2)条件不同,方程⑬关于  $x$  的偏导数也不同.

**例 12** 求下列方程组确定的隐函数组的导数:

$$(1) \begin{cases} u = f(ux, v+y), \\ v = g(u-x, v^2y), \end{cases} \quad \text{求 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$(2) \begin{cases} x = e^u + u \sin v, \\ y = e^u - u \cos v, \end{cases} \quad \text{求 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}.$$

**解** 设  $u = u(x, y), v = v(x, y)$ .

(1) 方程两边关于  $x$  求偏导,得

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = f_1' \left( u + x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f_2' \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = g_1' \left( \frac{\partial u}{\partial x} - 1 \right) + 2g_2' \frac{\partial v}{\partial x} yv. \end{cases}$$

解得 
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-uf_1'(2yvg_2' - 1) - f_2'g_1'}{(xf_1' - 1)(2yvg_2' - 1) - f_2'g_1'},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g_1'(xf_1' + uf_1' - 1)}{(xf_1' - 1)(2yvg_2' - 1) - f_2'g_1'}.$$

(2) 方程两边求微分,得

$$\begin{cases} e^u du + \sin v du + u \cos v dv = dx, \\ e^u du - \cos v du + u \sin v dv = dy, \end{cases}$$

即 
$$\begin{cases} (e^u + \sin v) du + u \cos v dv = dx, \\ (e^u - \cos v) du + u \sin v dv = dy, \end{cases}$$

解得 
$$du = \frac{\sin v dx - \cos v dy}{e^u(\sin v - \cos v) + 1},$$

$$dv = \frac{(\cos v - e^u) dx + (\sin v + e^u) dy}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]}.$$

从而 
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1},$$



$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{-\cos v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\cos v - e^u}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\sin v + e^u}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]}.\end{aligned}$$

**注意** 因为所求不同,所以题(1)只对  $x$  求偏导,题(2)是求微分.两者是有区别的.

**例 13** 设函数  $u=u(x,y)$  由方程  $u=f(x,y,z,t), g(y,z,t)=0, h(z,t)=0$  定义,求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ .

**解法 1** 先分析函数关系,分清哪个是因变量,哪个是中间变量,哪个是自变量.

由  $g(y,z,t)=0, h(z,t)=0$  解得,  $t, z$  为  $y$  的函数,代入  $u=f(x,y,z,t)$  得  $u=u(x,y)$ ,再分别对  $x$  和  $y$  求导,得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dy} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{dy}.$$

再由  $g(y,z,t)=0, h(z,t)=0$  对  $y$  求导,得

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{dz}{dy} + \frac{\partial g}{\partial t} \frac{dt}{dy} = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial z} \frac{dz}{dy} + \frac{\partial h}{\partial t} \frac{dt}{dy} = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial t}}{\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}}, \quad \frac{dt}{dy} = \frac{\frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial z}}{\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}}.$$

将  $\frac{dz}{dy}, \frac{dt}{dy}$  代入即得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dy} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{dy} = \frac{\partial(f,g,h)}{\partial(y,z,t)} \bigg/ \frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}.$$

**解法 2** 由方程组  $\begin{cases} f(x,y,z,t)-u=0, \\ g(y,z,t)=0, \\ h(z,t)=0 \end{cases}$  解得  $u, z, t$  为  $x, y$  的

函数,利用隐函数求导,得

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} + 0 \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} + 0 \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

把  $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial t}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}$  当做未知数, 利用克拉默法则可解出  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

例 14 设  $y=f(x,t)$ ,  $t$  是方程  $F(x,y,t)=0$  确定的  $x, y$  的函数,  $f, F$  都有一阶连续偏导数, 证明:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}}.$$

证 方程组  $\begin{cases} y=f(x,t), \\ F(x,y,t)=0 \end{cases}$  确定隐函数组

$$\begin{cases} y=y(x), \\ t=t(x). \end{cases}$$

方程两边关于  $x$  求导, 得

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{dx}, \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{dt}{dx} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{dt}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}. \end{cases}$$

解方程组, 在条件

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$$

下, 得 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial t} \\ -\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial y}}.$$

### 例 15 验证方程组

$$\begin{cases} x^2 - y\cos(uv) + z^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 = 2, \\ xy - \sin u \cos v + z = 0 \end{cases}$$

在  $P_0(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = (1, 1, 0, \pi/2, 0)$

的邻域满足隐函数组惟一性定理条件, 在点  $(\pi/2, 0)$  的邻域存在惟一的一组有连续偏导数的函数组

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v),$$

并求  $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}$  在点  $P$  的值.

证 设  $\begin{cases} F_1(x, y, z, u, v) = x^2 - y\cos(uv) + z^2, \\ F_2(x, y, z, u, v) = x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 - 2, \text{ 可知;} \\ F_3(x, y, z, u, v) = xy - \sin u \cos v + z, \end{cases}$

(1)  $F_1, F_2, F_3$  的所有偏导数在点  $P_0$  的邻域连续;

(2)  $F_1(P_0) = F_2(P_0) = F_3(P_0) = 0$ ;

$$(3) J = \frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(x, y, z)} \Big|_{P_0} = \begin{vmatrix} 2x & -\cos(uv) & 2z \\ 2x & 2y & 4z \\ y & x & 1 \end{vmatrix} \Big|_{P_0} = 6 \neq 0.$$

故由定理知, 方程组确定惟一的有连续偏导数的隐函数组

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

对原方程组中每个方程分别关于  $u, v$  求偏导数, 则(对  $u$  的)

$$\begin{cases} 2x \frac{\partial x}{\partial u} - \cos(uv) \frac{\partial y}{\partial u} + yv \sin(uv) + 2z \frac{\partial z}{\partial u} = 0, \\ 2x \frac{\partial x}{\partial u} + 2y \frac{\partial y}{\partial u} - v \cos uv + 4z \frac{\partial z}{\partial u} = 0, \\ y \frac{\partial x}{\partial u} + x \frac{\partial y}{\partial u} - \cos u \cos v + \frac{\partial z}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

将  $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$  当未知数, 用克拉默法则求得

$$\frac{\partial x}{\partial u} \Big|_{P_0} = \frac{\begin{vmatrix} -yvsin(uv) & -\cos(uv) & 2z \\ v\cos(uv) & 2y & 4z \\ \cos u \cos v & x & 1 \end{vmatrix}_{P_0}}{\begin{vmatrix} 2x & -\cos(uv) & 2z \\ 2x & 2y & 4z \\ y & x & 1 \end{vmatrix}_{P_0}} = 0.$$

类似可求得  $\frac{\partial x}{\partial v} \Big|_{P_0} = \frac{\pi}{12}.$

**例 16** 设  $x=e^v+u^3, y=e^u-v^3$ , 求反函数的偏导数  $\frac{\partial v}{\partial x}$ .

**解** 本题可看做对方程组

$$\begin{cases} F_1(x, y, u, v) = x - e^v - u^3 = 0, \\ F_2(x, y, u, v) = y - e^u - v^3 = 0 \end{cases}$$

所确定的隐函数组  $u=u(x, y), v=v(x, y)$  求偏导数. 由于  $J = \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, v)}$  处处不为零, 故对方程组两边关于  $x$  求偏导数, 有

$$\begin{cases} 1 = e^v v_x' + 3u^2 u_x', \\ 0 = e^u u_x' - 3v^2 v_x', \end{cases}$$

解方程组, 得

$$e^u = (e^{u+v} + 9u^2 v^2) v_x',$$

故

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{e^u}{e^{u+v} + 9u^2 v^2}.$$

**例 17** 设  $x=u\cos \frac{v}{u}, y=u\sin \frac{v}{u}$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ .

**解** 方程组  $x=u\cos \frac{v}{u}, y=u\sin \frac{v}{u}$  确定隐函数组  $u=u(x, y), v=v(x, y)$ . 对方程两边关于  $x$  求导, 得

$$\begin{cases} 1 = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \frac{v}{u} + u \left( -\sin \frac{v}{u} \right) \left[ \left( u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) / u^2 \right], \\ 0 = \frac{\partial u}{\partial x} \sin \frac{v}{u} + u \cos \frac{v}{u} \left[ \left( u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) / u^2 \right], \end{cases}$$

即 
$$\begin{cases} \left( \cos \frac{v}{u} + \frac{v}{u} \sin \frac{v}{u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \sin \frac{v}{u} \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \\ \left( \sin \frac{v}{u} - \frac{v}{u} \cos \frac{v}{u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \cos \frac{v}{u} \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

因为 
$$D = \begin{vmatrix} \cos \frac{v}{u} + \frac{v}{u} \sin \frac{v}{u} & -\sin \frac{v}{u} \\ \sin \frac{v}{u} - \frac{v}{u} \cos \frac{v}{u} & \cos \frac{v}{u} \end{vmatrix} = 1,$$

用克拉默法则解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & -\sin \frac{v}{u} \\ 0 & \cos \frac{v}{u} \end{vmatrix} = \cos \frac{v}{u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \cos \frac{v}{u} + \frac{v}{u} \sin \frac{v}{u} & 1 \\ \sin \frac{v}{u} - \frac{v}{u} \cos \frac{v}{u} & 0 \end{vmatrix} = \frac{v}{u} \cos \frac{v}{u} - \sin \frac{v}{u}.$$

类似地, 方程两边关于  $y$  求导, 得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin \frac{v}{u}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v}{u} \sin \frac{v}{u} + \cos \frac{v}{u}.$$

**例 18** 设  $z=f(x,y)$ , 作变量代换  $x=uv, y=(u^2-v^2)/2$ , 将方程  $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1$  用  $z$  关于新变量的导数表示.

**解** 设变换公式的逆变换  $u=u(x,y), v=v(x,y)$  存在, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y},$$

对逆变换组分别关于  $x$  和  $y$  求导, 得

$$\begin{cases} 1 = \frac{\partial u}{\partial x} v + \frac{\partial v}{\partial x} u, & 1 = \frac{\partial u}{\partial y} u - \frac{\partial v}{\partial y} v, \\ 0 = \frac{\partial u}{\partial x} u - \frac{\partial v}{\partial x} v, & 0 = \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial y} u, \end{cases}$$

由克拉默法则解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v}{u^2 + v^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u}{u^2 + v^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-v}{u^2 + v^2},$$

代入得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{u^2 + v^2} \left( v \frac{\partial z}{\partial u} + u \frac{\partial z}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{u^2 + v^2} \left( u \frac{\partial z}{\partial u} - v \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

从而原方程变换为

$$\left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 = u^2 + v^2.$$

## 第二节 几何应用与条件极值

### 主要内容

#### 一、几何应用

1. 平面曲线方程  $F(x, y) = 0$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的邻域内满足隐函数定理条件, 在  $P_0$  附近确定隐函数  $y = f(x)$ , 则曲线在点  $P_0$  有

切线方程:  $F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$ ,

法线方程:  $F_x(x_0, y_0)(x - x_0) - F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$ .

2. 空间曲线方程  $L: \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$  在点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  的邻域满足隐函数组定理的条件, 则在点  $P_0$  附近确定隐函数组  $x = \varphi(z)$ ,  $y = \psi(z)$ , 于是曲线在点  $P_0$  有

切线方程:  $\frac{x - x_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_{P_0}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \Big|_{P_0}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \Big|_{P_0}},$

$$\text{法平面方程: } \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} \Big|_{P_0} (x-x_0) + \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)} \Big|_{P_0} (y-y_0) + \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \Big|_{P_0} (z-z_0) = 0.$$

3. 曲面方程  $F(x,y,z)=0$  在  $P_0(x_0,y_0,z_0)$  的邻域满足隐函数定理条件, 在  $P_0$  附近确定隐函数  $z=f(x,y)$ , 使得当  $z_0=f(x_0,y_0)$  时, 曲面在点  $P_0$  有

$$\text{切平面方程: } F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0,$$

$$\text{法线方程: } \frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

## 二、条件极值

1. 附有约束条件的极值问题称为条件极值问题, 其一般形式是: 在条件组

$$\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (m < n)$$

的限制下, 求目标函数  $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的极值.

2. 一般条件的拉格朗日函数是

$$L(x_1, x_2, \dots, x_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_m) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  称为拉格朗日乘数.

3. 求以上第 1 点所述的条件极值问题.

若  $f$  和  $\varphi_k (k=1, 2, \dots, m)$  在域  $D$  内有一阶连续偏导数,  $P_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  是上述问题的极值点, 雅可比矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

的秩为  $m$ , 则存在  $m$  个常数  $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)}$ , 使得  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}; \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)})$  为拉格朗日函数的稳定点, 即  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}; \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)})$  为下面  $n+m$  个方程的解:

$$\begin{cases} L_{x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ L_{x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} = 0, \\ L_{\lambda_1} = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ L_{\lambda_m} = \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

## 疑难解析

### 1. 拉格朗日乘数法在求条件极值时有什么意义?

答 过去, 我们都是用消元(减元)的方式来求解问题的, 即把约束条件中的变量解出代入目标函数, 减少目标函数中变量的个数, 然后用求偏导数的办法来确定函数的稳定点. 但是, 从条件组中解出  $n$  个变量非常麻烦, 而且不总能实现. 所以, 用消元法解条件极值问题不一定能成功.

拉格朗日乘数法是一种升元法. 在拉格朗日函数中变量增加了  $m$  个(即  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ). 这是一种求解条件极值的有效方法. 拉格朗日乘数法只给出了取条件极值的必要条件, 因此, 满足条件的点只是稳定点, 不一定是条件极值点或最值点. 导数不存在的点也可能是极值点.

条件极值通常都用来解决最大值和最小值问题, 所以在用拉格朗日乘数法求得稳定点后, 一般只需通过比较函数值, 即可确定是最大值还是最小值. 当稳定点惟一时, 可以根据问题的实际意义



来确定它是最大值点还是最小值点.

## 方法、技巧与典型例题分析

### 一、隐函数的几何应用问题

当所给曲线和曲面的方程是以隐函数或隐函数组形式出现时,求它们的切线或切平面时就要用隐函数或隐函数组的微分法.因此,要求我们首先审视它是否满足惟一性定理条件,是否存在隐函数或隐函数组;再看是否满足可微分定理,并求出偏导数;最后依公式求出方程.

例 1 已知曲线  $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} = 1, \\ x - 2y + z = 0, \end{cases}$  求其在点  $P(1,1,1)$  的切线

方程与法平面方程.

解 设  $\begin{cases} F(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} - 1, \\ G(x,y,z) = x - 2y + z, \end{cases}$  求偏导数,得

$$F_x = 2x, \quad F_y = 2y, \quad F_z = z;$$

$$G_x = 1, \quad G_y = -2, \quad G_z = 1.$$

则曲线在点  $P$  的切线的方向向量

$$\begin{aligned} s &= \left( \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \right) \Big|_P \\ &= \left( \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = \left( \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right), \end{aligned}$$

故 切线方程:  $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-3},$

法平面方程:  $5(x-1) + (y-1) - 3(z-1) = 0,$

即  $5x + y - 3z - 3 = 0.$

例 2 求笛卡儿叶形线  $2(x^3 + y^3) - 9xy = 0$  在点  $(2,1)$  的切线

方程与法线方程.

解 设  $F(x, y) = 2(x^3 + y^3) - 9xy$ , 则  $F_x = 6x^2 - 9y$ ,  $F_y = 6y^2 - 9x$  在全平面连续, 且  $F_x(2, 1) = 15$ ,  $F_y(2, 1) = -12 \neq 0$ . 故依公式知

切线方程:  $15(x-2) - 12(y-1) = 0$ , 即  $5x - 4y - 6 = 0$ ,

法线方程:  $-12(x-2) - 15(y-1) = 0$ , 即  $4x + 5y - 13 = 0$ .

例 3 求曲线  $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 4, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$  在点  $(1, 1, -2)$  的切线方程与法平面方程.

解 用推导公式的方法求解. 方程两边对  $x$  求导, 得

$$\begin{cases} 2x + 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} - 2 \frac{dy}{dx} = 0, \\ 1 + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

解方程组, 得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z-x}{y-z-1}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1-y+x}{y-z-1},$$

于是  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,1,-2)} = -\frac{3}{2}$ ,  $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{(1,1,-2)} = \frac{1}{2}$ .

即切线在点  $(1, 1, -2)$  的切向量  $s = (1, -3/2, 1/2)$ . 故

$$\text{切线方程: } \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{1},$$

$$\text{法平面方程: } 2x - 3y + z + 3 = 0.$$

例 4 求球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$  与抛物面  $z = x^2 + y^2$  的交线在点  $(1, 1, 2)$  的切线方程.

解 设  $\begin{cases} F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z, \end{cases}$  求偏导数, 得

$$F_x = 2x, \quad F_y = 2y, \quad F_z = 2z;$$

$$G_x = 2x, \quad G_y = 2y, \quad G_z = -1.$$

则求得切线在点  $(1, 1, 2)$  的方向向量

$$s = \left( \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \right) = (-10, 10, 0).$$

故切线在点(1,1,2)的切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{0}.$$

**例 5** 已知曲面  $F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0$ , 求:

(1) 此两方程能确定一条过点  $P(x_0, y_0, z_0)$  的曲线的条件;

(2) 上述曲线在点  $P$  有切线的条件;

(3) 上述切线平行于  $z$  轴的条件.

**解** (1) 当函数  $F$  和  $G$  在点  $P$  邻域内有连续偏导数, 且  $(F_x, F_y, F_z) \cdot (G_x, G_y, G_z) \neq 0$  时, 两方程能确定一条过点  $P$  的曲线. 因此, 此时

$$\left( \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \right)$$

的三个分量中至少有一个不为零, 隐函数存在.

(2) 在题(1)的条件下, 切向量  $s$  存在, 故曲线在点  $P$  有切线.

(3) 当  $\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \neq 0$  时, 切线向量为  $(0, 0, a)$ , 切线平行于  $z$  轴.

**例 6** 求曲面  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  过直线  $l$  的切平面方程.

$$l: \begin{cases} 4x + 2y + 3z = 6, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$$

**解** 设切点为  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , 曲面在点  $P_0$  的法向量

$$n = (2x_0, 2y_0, 2z_0),$$

而过直线  $l$  的平面束方程为

$$4x + 2y + 3z - 6 + \lambda(2x + y) = 0,$$

即

$$(4 + 2\lambda)x + (2 + \lambda)y + 3z - 6 = 0,$$

依题意, 得联立方程组

$$\begin{cases} \frac{4+2\lambda}{2x_0} = \frac{2+\lambda}{2y_0} = \frac{3}{2z_0} = t, \\ (4+2\lambda)x_0 + (2+\lambda)y_0 + 3z_0 - 6 = 0, \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 4. \end{cases}$$

解得  $2t(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = 6, \quad t = 3/4, \quad \lambda = -2.$

于是, 切点为  $P_0(0, 0, 2)$ , 切平面方程为  $z = 2$ .

**例 7** 在椭球面  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$  上求一点, 使得过该点的切平面与平面  $x - y + 2z = 0$  平行.

**解** 设  $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ , 则  $F_x = 2x, F_y = 4y, F_z = 2z$ , 则在点  $(x_0, y_0, z_0)$  的法向量  $\mathbf{n} = (x_0, 2y_0, z_0)$ .

又已知平面的法向量  $\mathbf{n}_1 = (1, -1, 2)$ , 由平行关系, 得

$$\frac{x_0}{1} = \frac{2y_0}{-1} = \frac{z_0}{2} = \lambda \Rightarrow x_0 = \lambda, y_0 = -\frac{\lambda}{2}, z_0 = 2\lambda.$$

于是, 由  $\lambda^2 + 2(-\lambda/2)^2 + (2\lambda)^2 = 1$  得  $\lambda^2 = 2/11$ , 即  $\lambda = \pm \sqrt{2/11}$ .  
故所求点为  $(\pm \sqrt{2/11}, \mp \sqrt{2/11}/2, \pm 2\sqrt{2/11})$ .

**例 8** 证明: 所有与曲面  $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$  相切的平面都相交于一点.

**证** 设  $F(x, y, z) = xf\left(\frac{y}{x}\right) - z$ , 则  $F_x = f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)$ ,  
 $F_y = f'\left(\frac{y}{x}\right), F_z = -1$ . 所以, 在曲面上任一点  $(x_0, y_0, z_0)$  的切平面方程为

$$\left[ f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \right](x - x_0) + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

即

$$\begin{aligned} & \left[ f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \right]x + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)y - z \\ &= -x_0f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) + y_0f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - y_0f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) + z_0 \\ &= -z_0 + z_0 = 0. \end{aligned}$$

显然, 点  $(0, 0, 0)$  满足上述平面. 所以曲面在任一点的切平面都相交于一点 (例如原点).

**例 9** 证明: 曲面  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$  ( $a > 0$ ) 上任一点的切平面在各坐标轴上的截距之和等于常数  $a$ .

**证** 设  $F(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{a}$ , 则

$$F_x = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad F_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad F_z = \frac{1}{2\sqrt{z}},$$

故在曲面上任一点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  的法向量为

$$\mathbf{n} = (1/\sqrt{x_0}, 1/\sqrt{y_0}, 1/\sqrt{z_0}).$$

从而过点  $P_0$  的切平面方程为

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0,$$

$$\text{即 } \frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = \sqrt{a},$$

$$\text{化简, 得 } \frac{x}{\sqrt{ax_0}} + \frac{y}{\sqrt{ay_0}} + \frac{z}{\sqrt{az_0}} = 1.$$

所以, 截距之和为

$$d = \sqrt{a}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a.$$

**例 10** 设  $F(u, v)$  具有一阶连续偏导数,  $a, b, c$  为非零常数. 证明: 曲面  $F(ax+bz, by+cz)=0$  的任一切平面都平行于某定直线  $l$ .

**证** 只需证切平面的法向量与一常向量正交. 令  $u=ax+bz$ ,  $v=by+cz$ , 则曲面  $F$  在任一点  $P(x, y)$  的切平面的法向量为

$$\mathbf{n} = (F_x, F_y, F_z) = (aF_u, bF_y, bF_u + cF_v)|_P,$$

显然  $\mathbf{n} \cdot (b/a, c/b, -1) = 0$ .

即  $\mathbf{n}$  与  $\mathbf{s} = (b/a, c/b, -1)$  正交. 也就是过曲面  $F$  上任一点的切平面与方向向量为  $\mathbf{s}$  的直线平行.

$$l: \frac{x}{b/a} = \frac{y}{c/b} = \frac{z}{-1}.$$

## 二、条件极值问题

条件极值的求解问题一般是求函数的最大值与最小值问题, 所以, 我们通常只需求出稳定点, 然后由实际问题来确定它所对应的函数值是否最值, 是最大值还是最小值. 为了易于求解, 目标函数要取得尽量简单. 例如, 目标函数  $f=xyz$  可取作  $g=\ln x+\ln y+\ln z$ ,  $f=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$  可取作  $g=(x-a)^2+(y-b)^2$ . 详见例题.

**例 11** 将正数  $a$  分解为三个正数, 使其的倒数之和为最小.

**解** 设三个正数为  $x, y, z$ , 则问题即为求目标函数

$$f(x, y, z) = 1/x + 1/y + 1/z \quad (x, y, z \in (0, a))$$

在约束条件  $x+y+z=a$  下的最小值.

建立拉格朗日函数

$$L(x, y, z; \lambda) = 1/x + 1/y + 1/z + \lambda(x + y + z - a),$$

对各变量求偏导数, 得

$$\begin{cases} L_x = -1/x^2 + \lambda = 0, \\ L_y = -1/y^2 + \lambda = 0, \\ L_z = -1/z^2 + \lambda = 0, \\ L_\lambda = x + y + z - a = 0. \end{cases}$$

显然  $x=y=z$ , 解方程组, 得

$$x = y = z = \sqrt[3]{a}, \quad \lambda = a^{-2/3}.$$

因稳定点惟一, 而实际问题必有最小值, 故点  $(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a})$  为最小值点, 最小值  $f(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}) = 3/\sqrt[3]{a}$ .

**例 12** 在过点  $(2, 1, 1/3)$  的所有平面中, 求出与三坐标面围成立体体积最小的平面.

**解** 设所求平面方程为  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ , 则必有  $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{3c} =$

1 为约束条件. 故问题即为函数  $V=abc/6$  在条件  $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{3c} = 1$  下的条件极值. 因为  $V=abc/6$  与  $f=\ln a + \ln b + \ln c$  有相同的极值点, 故取拉格朗日函数为

$$L(a, b, c; \lambda) = \ln a + \ln b + \ln c + \lambda \left( \frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{3c} - 1 \right).$$

求偏导数, 得方程组

$$\begin{cases} L_a = \frac{1}{a} - \frac{2\lambda}{a^2} = 0, \\ L_b = \frac{1}{b} - \frac{\lambda}{b^2} = 0, \\ L_c = \frac{1}{c} - \frac{\lambda}{3c^2} = 0, \\ L_\lambda = \frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{3c} - 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2\lambda, \\ b = \lambda, \\ c = \lambda/3. \end{cases}$$

将  $a, b, c$  代入第四式, 得  $\lambda=3$ , 故  $a=6, b=3, c=1$ , 所求平面方程为  $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{1} = 1$ . 最小值  $V(6, 3, 1) = (6 \times 3 \times 1)/6 = 3$ .

**例 13** 有一座小山, 设其底面为  $xoy$  平面, 底部所占区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 - xy \leq 75\}$ , 小山的高度函数为  $h(x, y) = 75 - x^2 - y^2 + xy$ .

(1) 设  $P_0(x_0, y_0)$  为  $D$  上一点, 问  $h(x, y)$  在该点沿平面上什么方向的方向导数最大, 写出最大方向导数  $g(x_0, y_0)$  的表达式.

(2) 在  $D$  的边界线  $x^2 + y^2 - xy \leq 75$  上找出使  $g(x, y)$  达到最大值的点, 作为攀登该山的起点.

**解** (1) 因为, 沿梯度

$$\text{grad} h(x, y)|_{(x_0, y_0)} = (y_0 - 2x_0)\mathbf{i} + (x_0 - 2y_0)\mathbf{j}$$

方向的方向导数最大, 最大值为梯度的模, 故

$$\begin{aligned} g(x_0, y_0) &= \sqrt{(y_0 - 2x_0)^2 + (x_0 - 2y_0)^2} \\ &= \sqrt{5x_0^2 + 5y_0^2 - 8x_0y_0}. \end{aligned}$$

(2) 令  $f(x, y) = g^2(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy$ , 约束条件为  $x^2 + y^2 - xy = 75$ , 建立拉格朗日函数

$L(x, y, \lambda) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy + \lambda(x^2 + y^2 - xy - 75)$ ,  
求偏导数, 得

$$\begin{cases} L_x = 10x - 8y + \lambda(y - 2x) = 0, \\ L_y = 10y - 8x + \lambda(x - 2y) = 0, \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - xy - 75 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = \pm \sqrt{75}, \\ x = -y = \pm 5. \\ \lambda = 2. \end{cases}$$

得到四个稳定点  $P_1(5, -5), P_2(-5, 5), P_3(5\sqrt{3}, 5\sqrt{3}), P_4(-5\sqrt{3}, -5\sqrt{3})$ . 求得

$$f(P_1) = f(P_2) = 450, \quad f(P_3) = f(P_4) = 150,$$

故选择点  $P_1(5, -5)$  或  $P_2(-5, 5)$  为攀登的起点.

**例 14** 在第一卦限内作椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的切平面, 使得切平面与三坐标面所围四面体体积为最小, 求切点坐标.

**解** 设切点为  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , 则切平面方程为

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{a^2/x_0} + \frac{y}{b^2/y_0} + \frac{z}{c^2/z_0} = 1,$$

则目标函数为  $V = \frac{a^2 b^2 c^2}{6x_0 y_0 z_0}$ , 约束条件  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ . 建立拉格朗日函数

$$L(x, y, z; \lambda) = xyz + \lambda \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right),$$

**注意** 这里化为求最大值问题了. 求偏导数, 得

$$\begin{cases} L_x = yz + \frac{2\lambda}{a^2}x = 0, \\ L_y = xz + \frac{2\lambda}{b^2}y = 0, \\ L_z = xy + \frac{2\lambda}{c^2}z = 0, \\ L_\lambda = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \end{cases}$$



将第一、第二、第三式分别乘以  $x, y, z$ , 可解得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{-3xyz}{2\lambda},$$

代入第四式, 解得  $xyz = -\frac{2}{3}\lambda$ , 从而解得  $x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{b}{\sqrt{3}}, z =$

$\frac{c}{\sqrt{3}}$ . 由于稳定点惟一, 实际问题又必有最小值, 故所求点为

$$P_0\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right).$$

**例 15** 证明不等式  $\frac{x^n + y^n}{2} \geq \frac{(x+y)^n}{2}$ , 其中  $n \geq 1, x \geq 0, y \geq 0$ .

**证** 将不等式证明化为求最值问题.

设目标函数  $f(x, y) = (x^n + y^n)/2$ , 约束条件为:  $x + y = c$  ( $c > 0, x \geq 0, y \geq 0$ ), 则拉格朗日函数为

$$L(x, y; \lambda) = (x^n + y^n)/2 + \lambda(x + y - c).$$

求偏导数, 得

$$\begin{cases} L_x = nx^{n-1}/2 + \lambda = 0, \\ L_y = ny^{n-1}/2 + \lambda = 0, \\ L_\lambda = x + y - c = 0. \end{cases} \Rightarrow x = y = c/2.$$

因为  $f(x, y)$  在第一象限内有界闭线段  $x + y = c, x \geq 0, y \geq 0$  上连续, 故问题必有最大值和最小值. 比较点  $(c/2, c/2)$  和两端点  $(0, c), (c, 0)$  上函数值, 有

$$f(c, 0) = f(0, c) = c^n/2 \geq f(c/2, c/2) = (c/2)^n,$$

所以, 函数  $f(x, y)$  在点  $(c/2, c/2)$  取得最小值, 即

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{c}{2}\right)^n = \left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

**例 16** 求二次型  $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy$  在球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  上的最大值和最小值.

**解** 球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  上的点可表示为

$$x = \cos\theta\sin\varphi, \quad y = \sin\theta\sin\varphi, \quad z = \cos\varphi,$$

其中  $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi$ , 则  $F(x, y, z)$  化为  $g(\theta, \varphi)$ , 且  $g(\theta, \varphi)$  在  $D = \{(\theta, \varphi) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$  上连续, 故  $g(\theta, \varphi)$  存在最大值与最小值. 建立拉格朗日函数

$$L(x, y, z; \lambda) = F(x, y, z) + \lambda(1 - x^2 + y^2 + z^2).$$

对  $L$  求偏导数, 得方程组

$$\begin{cases} L_x = 2(ax + fy + ez) - 2\lambda x = 0, \\ L_y = 2(fx + by + dz) - 2\lambda y = 0, \\ L_z = 2(ex + dy + cz) - 2\lambda z = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (a - \lambda)x + fy + ez = 0, \\ fx + (b - \lambda)y + dz = 0, \\ ex + dy + (c - \lambda)z = 0. \end{cases}$$

线性方程组有非零解的条件是方程的系数行列式等于零, 即

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & f & e \\ f & b - \lambda & d \\ e & d & c - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{或} \quad A = \begin{pmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{pmatrix}$$

有特征值  $\lambda$ .

将  $x = x_0, y = y_0, z = z_0$  代入线性方程组, 并以  $x_0, y_0, z_0$  分别乘以方程组第一、第二、第三式后相加, 得

$$\begin{aligned} ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 + 2dy_0z_0 + 2ex_0z_0 + 2fx_0y_0 \\ = \lambda(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2). \end{aligned}$$

因为  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$ , 即得  $\lambda = F(x_0, y_0, z_0)$ , 函数值恰为  $f(x, y, z)$  在单位球面上的最大(小)值. 即证明二次型  $f(x, y, z)$  在单位球面上的最大(小)值正好是其矩阵的特征值.

反之, 设  $\bar{\lambda}$  为矩阵  $A$  的一个特征值, 设其对应特征向量  $\alpha = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , 则

$$\begin{cases} (a - \bar{\lambda})\bar{x} + f\bar{y} + e\bar{z} = 0, \\ f\bar{x} + (b - \bar{\lambda})\bar{y} + d\bar{z} = 0, \\ e\bar{x} + d\bar{y} + (c - \bar{\lambda})\bar{z} = 0. \end{cases}$$

以  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  分别乘以第一、第二、第三式后相加, 得

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \bar{\lambda}.$$

证明  $A$  的任一特征值等于  $f(x, y, z)$  在单位球面某点处的值.

从而知, 二次型  $f(x, y, z)$  在单位球面上的最大值与最小值确实存在, 分别是其矩阵的最大特征值与最小特征值.

**例 17** 求抛物线  $y=x^2$  与直线  $x-y-2=0$  间的最小距离.

**解** 设  $(x, y)$  是  $y=x^2$  上任意点,  $(u, v)$  为  $u-v-2=0$  上任意点, 则两点间距离  $d = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$ .

因为  $d$  与  $d^2$  有相同的最值点, 故拉格朗日函数为

$$L(x, y, u, v; \lambda_1, \lambda_2)$$

$$= (x-u)^2 + (y-v)^2 + \lambda_1(y-x^2) + \lambda_2(u-v-2).$$

对  $L$  求偏导数, 得

$$\begin{cases} L_x = 2(x-u) - 2\lambda_1 x = 0, \\ L_y = 2(y-v) - \lambda_1 = 0, \\ L_u = -2(x-u) + \lambda_2 = 0, \\ L_v = -2(y-v) - \lambda_2 = 0, \\ L_{\lambda_1} = y - x^2 = 0, \\ L_{\lambda_2} = u - v - 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/2, \\ y = 1/4, \\ u = 11/8, \\ v = -5/8. \end{cases}$$

由于稳定点惟一, 而问题必有最小值. 故点  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{11}{8}, -\frac{5}{8}\right)$  即为最小值点, 最小值  $d = \frac{7}{4\sqrt{2}}$ .

**例 18** 求原点到曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$  的最大距离和最小距离.

**解** 设  $P(x, y, z)$  为曲线上任意点, 则目标函数  $d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 约束条件为  $x^2 + y^2 = z$  和  $x + y + z = 1$ . 建立拉格朗日函数

$$L(x, y, z; \lambda, \mu)$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + z - 1).$$

对  $L$  求偏导数, 得

$$\begin{cases} L_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0, \\ L_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0, \\ L_z = 2z - \lambda + \mu = 0, \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - z = 0, \\ L_\mu = x + y + z - 1 = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = (-1 - \sqrt{3})/2 \text{ 或 } (-1 + \sqrt{3})/2, \\ y = (-1 - \sqrt{3})/2 \text{ 或 } (-1 + \sqrt{3})/2, \\ z = 2 + \sqrt{3} \text{ 或 } 2 - \sqrt{3}, \\ \lambda = -3 - 5\sqrt{3}/3 \text{ 或 } -3 + 5\sqrt{3}/3, \\ \mu = -7 - 11\sqrt{3}/3 \text{ 或 } -7 + 11\sqrt{3}/3. \end{cases}$$

得两个稳定点. 而问题必有最大值与最小值, 经比较, 得最大距离

$$d\left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}, 2 + \sqrt{3}\right) = \sqrt{9 + 5\sqrt{3}},$$

最小距离

$$d\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, 2 - \sqrt{3}\right) = \sqrt{9 - 5\sqrt{3}}.$$

## 第十二章 向量函数微分学

### 第一节 $n$ 维欧几里德空间与向量函数

#### 主要内容

##### 一、 $n$ 维欧几里德空间

1. 一个  $n$  ( $n \geq 2$ ) 个有序实数组  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  称为一个  $n$  维实向量(点), 全体  $n$  维实向量的集合称为  $n$  维实向量空间, 记作

$$\mathbf{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

2. 在实向量空间上定义了加法、数乘和内积运算.

对  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , 两向量之和  $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ .

数  $\alpha$  与向量  $x$  的数乘为  $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$ .

向量  $x$  与  $y$  的内积定义为  $x^T y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ .

内积有以下性质:

(1)  $x^T x \geq 0$ , 当  $x = 0$  时,  $x^T x = 0$ ;      (2)  $x^T y = y^T x$ ;

(3)  $\alpha(x^T y) = (\alpha x)^T y = x^T(\alpha y)$ ,  $\alpha$  为实数;

(4)  $(x + y)^T z = x^T z + y^T z$ .

3. 向量  $x \in \mathbf{R}^n$  的长度(范数, 模)定义为

$$\|x\| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

向量的长度有以下性质:

- (1)  $\|x\| \geq 0$ , 仅当  $x=0$  时,  $\|x\|=0$ ;
- (2)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ,  $\alpha$  为实数;
- (3)  $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (三角不等式);
- (4)  $\|x^T y\| \leq \|x\| \|y\|$  (柯西-施瓦兹不等式).

4.  $\mathbf{R}^n$  中任意两点  $x$  与  $y$  的距离定义为

$$\begin{aligned}\rho(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.\end{aligned}$$

有

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

5.  $U(\alpha; \delta)$  表示点  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$  的邻域, 其中  $\{x \mid \|x - \alpha\| < \delta\} \subset \mathbf{R}^n$  表示以  $\alpha$  为中心、 $\delta$  为半径的  $n$  维球形邻域,  $\{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid |x_i - \alpha_i| < \delta, i=1, 2, \cdots, n\}$  表示  $n$  维方形邻域.

6.  $\mathbf{R}^n$  中有类似平面点集中内点、界点、聚点、开集、闭集、凸集、区域、直径等概念.

7. 设点列  $\{P_k\} \subset \mathbf{R}^n$ , 则  $\{P_k\}$  为收敛点列的充要条件是:  $\forall \epsilon > 0, \exists K > 0$ , 当  $k > K$  时,  $\forall q \in \mathbf{N}$ , 有  $\rho(P_k, P_{k+q}) < \epsilon$ .

## 二、向量函数、极限与连续性

1. 设  $X \subset \mathbf{R}^n, Y \subset \mathbf{R}^m$ ,  $f$  是  $X \times Y$  的一个子集, 对每一个  $x \in X$ , 都有惟一的  $y \in Y$ , 使得  $(x, y) \in f$ , 则称  $f$  是  $X$  到  $Y$  的向量函数, 记作  $f: X \rightarrow Y, x \mapsto y$ .

2. 两个向量函数  $f$  与  $g$  的复合函数是

$$g \circ f: x \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \quad (X \subset \mathbf{R}^n, f(x) \subset Y \subset \mathbf{R}^m, Z \subset \mathbf{R}^r).$$

3. 设  $D \subset X \subset \mathbf{R}^n, \alpha$  是  $D$  的聚点,  $f: X \rightarrow \mathbf{R}^m$ . 若  $\exists l \in \mathbf{R}^m, \forall$  任意小  $U(l, \epsilon) \subset \mathbf{R}^m$ , 总有  $U^\circ(\alpha; \delta) \in \mathbf{R}^n$ , 使得  $f(U^\circ(\alpha; \delta) \cap D) \subset U(l; \epsilon)$ , 则称在集合  $D$  上, 当  $x \rightarrow \alpha$  时,  $f$  以  $l$  为极限, 记作

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x \in D}} f(x) = \alpha.$$

4. 设  $D \subset X \subset \mathbf{R}^n, \alpha \in D, f: X \rightarrow \mathbf{R}^m$ . 若  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得  $f(U(\alpha; \delta) \cap D) \subset U(f(\alpha), \epsilon)$ , 则称  $f$  在点  $\alpha$  (关于集合  $D$ ) 连续.

如果  $f$  在  $D$  上每一点连续, 则称  $f$  为  $D$  上的连续函数.

5. 设  $f, g: X \rightarrow Y (X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m); h: Y \rightarrow Z \subset \mathbb{R}^r; \alpha: X \rightarrow \mathbb{R}; a \in X, b = f(a) \in Y$ . 若  $f, g, \alpha$  在点  $a$  连续,  $h$  在  $b$  连续, 则向量函数  $f+g, \alpha f$  及  $h \circ g$  均在点  $a$  连续.

6. 若  $D \subset \mathbb{R}^n$  是有界闭集,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  是  $D$  上的连续函数, 则  $f(D) \subset \mathbb{R}^m$  也是有界闭集.

7. 若  $D \subset \mathbb{R}^n$  是有界闭集,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  是  $D$  上的连续函数, 则  $f(D)$  的直径是可达的, 即  $\exists P', P'' \in D$ , 使得

$$\|f(P') - f(P'')\| = \max_{x', x'' \in D} \|f(x') - f(x'')\|.$$

8. 若  $D \subset \mathbb{R}^n$  是有界闭集,  $f$  是  $D$  上的连续函数, 则  $f$  在  $D$  上一致连续. 即  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ , 只要  $x', x'' \in D$ , 且  $\|x' - x''\| < \delta$ , 就有  $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$ .

9. 若  $D \subset \mathbb{R}^n$  是道路连通集,  $f$  是  $D$  上的连续函数, 则  $f(D) \subset \mathbb{R}^m$  也是道路连通集.

## 方法、技巧与典型例题分析

本节的问题是辨析概念, 如何将一维区域中的概念拓广到  $n$  维空间. 这需要认真分析, 回顾、利用单变量函数中的结论和证明.

例 1 设  $A \subset \mathbb{R}^m, B \subset \mathbb{R}^m$ , 证明:

$$(1) (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ; \quad (2) \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

这里  $A^\circ$  是  $A$  的内点集,  $B^\circ$  是  $B$  的内点集.

证 (1) 因为  $A^\circ \subset A, B^\circ \subset B$ , 所以  $A^\circ \cap B^\circ \subset A \cap B$ , 而  $A^\circ \cap B^\circ$  为开集, 故  $A^\circ \cap B^\circ = (A^\circ \cap B^\circ)^\circ = (A \cap B)^\circ$ .

反之, 由  $A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$ , 故  $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ, (A \cap B)^\circ \subset B^\circ$ , 得出  $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$ .

综上所述, 得  $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ .

(2) 由于  $\overline{E} = ((E^c)^\circ)^c$ , 故

$$\overline{A} \cup \overline{B} = ((A^c)^\circ)^c \cup ((B^c)^\circ)^c = ((A^c)^\circ \cap (B^c)^\circ)^c$$

$$= ((A^c \cap B^c)^{\circ})^c = (((A \cup B)^c)^{\circ})^c = \overline{A \cup B}.$$

**例 2** 设  $\{P_k\}$  为  $\mathbf{R}^n$  中的点列,  $a \in \mathbf{R}^n$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = a$ , 证明:  
 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|P_k\| = \|a\|$ .

**证** 由  $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = a$  知,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$ , 使得  $\forall k > N$ , 恒有  $\|P_k - a\| < \varepsilon$ . 又由三角不等式  $\|P_k - a\| \geq \|P_k\| - \|a\|$ , 所以  
 $|\|P_k\| - \|a\|| < \varepsilon$ , 即  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|P_k\| = \|a\|$ .

**例 3** 设  $F_1, F_2$  是  $\mathbf{R}^n$  中的闭集, 且  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ . 证明: 存在开集  $G_1$  和  $G_2$ , 使得  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ , 而  $G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2$ .

**证** 由题设, 对  $x \in F_1$ , 有  $\rho(x, F_2) > 0$ ; 对  $y \in F_2$ , 有  $\rho(y, F_1) > 0$ . 作邻域  $U(x, \delta_1)$  与  $U(y, \delta_2)$ , 其中  $\delta_1 = \frac{1}{2} \rho(x, F_2), \delta_2 = \frac{1}{2} \rho(y, F_1)$ , 再令  $G_1 = \bigcup_{x \in F_1} U(x, \delta_1), G_2 = \bigcup_{y \in F_2} U(y, \delta_2)$ . 可知,  $G_1, G_2$  是开集, 且  $G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2$ .

用反证法. 设  $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ , 则有  $\alpha \in G_1 \cap G_2$ , 使得  $x_0 \in F_1, y_0 \in F_2$ , 且  $\alpha \in U(x_0, \delta_1), \alpha \in U(y_0, \delta_2)$ . 不妨设  $\delta_1 \geq \delta_2$ , 则

$$\begin{aligned} \rho(x_0, F_2) &\leq \rho(x_0, y) \leq \rho(x_0, \alpha) + \rho(\alpha, y_0) \\ &< \delta_1 + \delta_1 \leq 2\delta_1 = 2\rho(x_0, F_2). \end{aligned}$$

引出矛盾, 故  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ .

**例 4** 设  $E \subset \mathbf{R}^m$  是闭集,  $x \in \mathbf{R}^m$ , 证明:

- (1)  $\exists y \in E$ , 使得  $\rho(x, E) = \rho(x, y)$ ;
- (2) 若  $x \notin E$ , 则  $\rho(x, E) > 0$ .

**证** (1) 由距离的定义,  $\exists y_n \in E (n = 1, 2, \dots)$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x, y_n) = \rho(x, E)$ .

又  $|y_n| \leq |y_n - x| + |x| = \rho(x, y_n) + |x|$ , 所以数列  $\rho(x, y_n)$  有界, 从而  $|y_n|$  有界. 于是存在子列  $\{y_{n_k}\}$ , 使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y$ . 由于  $E$  是闭集, 所以  $y \in E$ , 则由  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(y, y_{n_k}) = 0$  及  $|\rho(x, y_{n_k}) - \rho(x, y)| \leq \rho(y, y_{n_k})$ , 得  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x, y_{n_k}) = \rho(x, y) \Rightarrow \rho(x, y) = \rho(x, E)$ .



(2) 因  $x \neq y$ , 由题(1)得  $\rho(x, E) = \rho(x, y) > 0$ .

**例 5** 设集列  $\{A_n\}$  为一非空闭集套, 即  $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ , 且满足  $\rho(A_n) \triangleq \sup_{x, y \in A_n} |x - y| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ . 证明: 交集  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  非空且仅含惟一点  $x$ .

**证** 因为  $A_n$  非空, 故可取  $x_n \in A_n, n=1, 2, \cdots$ . 则  $\{x_n\}$  为柯西基本收敛点列. 事实上, 因为  $A_n \supset A_{n+1}$ , 所以  $x_{n+m} \in A_{n+m} \subset A_n, m=0, 1, \cdots$ , 于是

$$|x_{n+m} - x_n| \leq \sup_{x, y \in A_n} |x - y| = \rho(A_n) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty).$$

由柯西审敛原理知, 存在惟一的  $x$ , 使得当  $n \rightarrow \infty$  时,  $x_n \rightarrow x$ . 而  $A_n$  为闭集, 故  $x \in A_n$ , 即  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ , 非空.

若另有一  $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ , 则  $x, y \in A_n, n=1, 2, \cdots$ , 且  $|x - y| \leq \rho(A_n) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ , 即  $y = x$ . 从而  $x$  惟一.

**例 6** 设  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  为一点集,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$  为  $n$  元向量函数. 证明:  $f$  在  $A$  上连续等价于它的每个分量在  $A$  上连续.

**证** 设  $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m), \forall x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \cdots, x_{0,n}) \in A$ ,  $f(x)$  在  $x_0$  连续的充要条件是  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 而  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  等价于  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) = f_k(x_0)$ , 即每个  $f_k(x)$  在  $x_{0,k}$  连续 ( $k=1, 2, \cdots, m$ ). 故  $f$  在  $A$  上连续等价于它的每个分量在  $A$  上连续.

**例 7** 设  $f$  是集合  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  上的  $n$  元向量函数, 证明:  $f$  在  $x_0 \in A$  连续  $\Leftrightarrow$  对  $A$  中任何收敛于  $x_0$  的点列  $\{x_k\}$ , 都有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0).$$

**证** 设  $f = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_m), \forall x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ , 则  $f$  在  $x_0$  连续  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f_l(x) = f_l(x_0) \ (x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \cdots, x_{0,n}), l=1, 2, \cdots, m)$ .

由海涅(Heine)定理知,  $\forall$  任何收敛于  $x_0$  的点列  $\{x_k\}$  都有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_l(x_k) = f_l(x_0) \quad (l=1, 2, \dots, m).$$

故命题得证.

**例 8** 设  $f(x)$  在  $\mathbf{R}^n$  上连续, 并满足:

(1)  $x \neq \theta$  时,  $f(x) > 0$ ; (2)  $\forall x$  和  $c > 0$ ,  $f(cx) = cf(x)$ .

证明:  $\exists a > 0, b > 0$ , 使得  $a|x| \leq f(x) \leq b|x|$ .

证 设有有界闭集  $A = \{x \mid |x| = 1\}$ . 由于  $f(x)$  在  $A$  上连续, 则在  $S$  上点  $x_1$  和  $x_2$ ,  $f(x)$  有最大值  $f(x_1) > 0$  和最小值  $f(x_2) > 0$ . 记  $f(x_1) = b, f(x_2) = a$ . 于是,  $\forall x \in \mathbf{R}^n \setminus \theta, x/|x| \in S$ , 有

$$a \leq f\left(\frac{x}{|x|}\right) \leq b, \quad \text{即} \quad a|x| \leq f(x) \leq b|x|.$$

**例 9** 设非空子集  $A \subset \mathbf{R}^n$ , 定义  $x$  到  $A$  的距离

$$f_A(x) = \inf_{y \in A} \rho(x, y) = \rho(x, A),$$

证明:  $f_A(x)$  是  $\mathbf{R}^n$  上的一致连续函数.

证  $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n, \forall y \in A$ , 有

$$\rho(x_1, y) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, y).$$

故  $\inf_{y \in A} \rho(x_1, y) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, y) \quad (\forall y \in A),$

从而  $\inf_{y \in A} \rho(x_1, y) \leq \rho(x_1, x_2) + \inf_{y \in A} \rho(x_2, y),$

即  $\inf_{y \in A} \rho(x_1, y) - \inf_{y \in A} \rho(x_2, y) \leq \rho(x_1, x_2).$

类似地, 有

$$\inf_{y \in A} \rho(x_2, y) - \inf_{y \in A} \rho(x_1, y) \leq \rho(x_2, x_1) = \rho(x_1, x_2),$$

因此  $|\inf_{y \in A} \rho(x_2, y) - \inf_{y \in A} \rho(x_1, y)| \leq \rho(x_1, x_2).$

所以,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$ , 当  $\rho(x_1, x_2) < \delta$  时, 有

$$\begin{aligned} |\rho(x_2, A) - \rho(x_1, A)| &= \left| \inf_{y \in A} \rho(x_2, y) - \inf_{y \in A} \rho(x_1, y) \right| \\ &\leq \rho(x_1, x_2) < \varepsilon, \end{aligned}$$

即  $\rho(x, A)$  在  $\mathbf{R}^n$  上一致连续.

**例 10** 设  $f(x)$  在  $D \subset \mathbf{R}^n$  内连续. 证明:  $f(x)$  在  $D$  内一致连续  $\Leftrightarrow \forall x_0 \in \partial D, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D}} f(x)$  存在. 这里  $\partial D$  表示  $D$  的全体边界点组成

的集合.

**证 必要性** 因为  $f(x)$  在  $D$  上一致连续, 则  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $x, y \in D, \rho(x, y) < \delta$  时, 有  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ .

设  $x_0 \in \partial D$ , 而  $D$  为开区域, 故  $x_0$  为  $D$  的聚点, 设  $x_n \in D, x_n \rightarrow x_0$  (当  $n \rightarrow \infty$ ) 为任一趋向于  $x_0$  的序列, 则对上述  $\delta > 0, \exists N > 0$ , 当  $n, m > N$  时, 有  $\rho(x_n, x_m) < \delta$ , 从而  $|f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$ . 依柯西收敛原理,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  存在, 由  $x_n$  的任意性, 依海涅定理,  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D}} f(x)$  存在.

**充分性** 设  $\forall x_0 \in \partial D, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D}} f(x)$  存在. 定义  $f(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D}} f(x)$ .

于是,  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $x \in D, \rho(x, x_0) < \delta$  时, 有  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ . 又对于  $x_1 \in \partial D$ , 若  $\rho(x_1, x_0) < \delta$ , 则对前式取  $x \rightarrow x_1$  的极限, 得到  $|f(x_1) - f(x_0)| \leq \epsilon$ .

故  $\forall x \in \bar{D} = D \cup \partial D$ , 当  $\rho(x, x_0) < \delta$  时, 恒有  $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$ . 因为  $f$  在  $D$  内连续, 则  $f$  在  $\bar{D}$  连续. 从而  $f$  在  $\bar{D}$  上也就是在  $D$  上一致连续.

**例 11** 设点集  $A \subseteq \mathbf{R}^n, f: A \rightarrow \mathbf{R}^m$  是  $n$  元向量值函数, 证明下列命题等价:

(1)  $f$  在  $A$  上连续;

(2) 开集  $B \subseteq \mathbf{R}^m$ , 则  $B$  关于  $f$  的原像  $f^{(-1)}(B) = \{x | x \in A, f(x) \in B\}$  是  $\mathbf{R}^n$  中的开集.

**证** 设  $f$  在  $A$  上连续, 则  $f$  是  $A$  上的连续函数. 又  $B \subseteq \mathbf{R}^m$  是开集, 当  $f^{(-1)}(B) \neq \emptyset$  时,  $\forall x_0 \in f^{(-1)}(B)$ , 因为  $B$  是开集, 所以  $\exists \epsilon > 0$ , 使得  $U(f(x_0); \epsilon) \subset B$ . 同时, 由  $f$  的连续性,  $\exists \delta > 0$ , 使得  $f(U(x_0, \delta)) \subset U(f(x_0); \epsilon)$ . 此时,  $x \in U(x_0, \delta); f(x) \in U(f(x_0), \epsilon) \subset B$ , 从而  $U(x_0, \delta) \subset f^{(-1)}(B)$ . 即  $f^{(-1)}(B)$  中每一点都是内点, 故  $f^{(-1)}(B)$  是开集.

反之, 设  $f$  是  $\mathbf{R}^n$  到  $\mathbf{R}^m$  的映射, 且对  $\mathbf{R}^m$  中任何开集,  $f^{(-1)}(B)$  是开集.  $\forall x_0 \in \mathbf{R}^n, \epsilon > 0$ , 取  $\mathbf{R}^m$  中开集  $B = U(f(x_0), \epsilon)$ , 其原像

$f^{-1}(B)$  必为开集. 因为  $x_0 \in f^{-1}(B)$ , 故  $x_0$  是  $f^{-1}(B)$  的内点, 从而存在  $\delta > 0$ , 使得  $U(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B)$ . 这等价于  $f(U(x_0; \delta)) \subset B$ . 故  $f(U(x_0; \delta)) \subset U(f(x_0); \varepsilon)$ .

## 第二节 向量函数的微分

### 主要内容

1. 设  $D \subset \mathbb{R}^n$  为开集,  $x_0 \in D, f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ . 如果存在某个线性变换  $A$  (只依赖于  $x_0$ ), 使得  $x \in U(x_0) \subset D$  时, 有

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

或  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0,$

则称向量函数  $f$  在点  $x_0$  可微 (或可导). 若线性变换  $A$  相联系的矩阵为  $A(m \times n)$ , 则称  $A \cdot (x - x_0) = A(x - x_0)$  为  $f$  在点  $x_0$  的微分, 并称  $A$  为  $f$  在点  $x_0$  的导数, 记作  $Df(x_0)$  或  $f'(x_0)$ .

如果  $f$  在  $D$  中任何点可微, 则称  $f$  是  $D$  上的可微函数.

2. 若向量函数  $f$  在  $x_0$  可微, 则  $f$  在  $x_0$  连续.

3. 若向量函数  $f$  在  $x_0$  可微, 则  $f$  的所有  $m$  个坐标函数  $f_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) 在  $x_0$  关于每个自变量  $x_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) 的一阶偏导数  $\left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{x=x_0}$  都存在. 由这些偏导数组成的矩阵便是  $f$  在  $x_0$  的导数.

4. 设  $D \subset \mathbb{R}^n$  为开集,  $x \in D, f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ , 则  $f$  在  $x_0$  可微的充要条件是: 存在一个 ( $m$  行  $n$  列的) 矩阵函数  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ , 它在  $x_0$  连续 (相当于它的  $n$  个列向量函数都在  $x_0$  连续), 并使得

$$f(x) - f(x_0) = F(x)(x - x_0), \quad x \in D.$$

以下所设  $D \subset \mathbf{R}^n$  均为开集.

5. 设  $f, g: D \rightarrow \mathbf{R}^m$  是在  $x_0 \in D$  可微的函数,  $c$  为任意实数, 则  $cf$  和  $f \pm g$  在  $x_0$  也可微, 且有

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0), \quad (f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0).$$

6. 设  $f: D \rightarrow \mathbf{R}^m$  在  $x_0 \in D$  可微;  $D' \subset \mathbf{R}^m$  也是开集,  $f(D) \subset D'$ ;  $g: D' \rightarrow \mathbf{R}^r$  在  $y_0 = f(x_0)$  可微. 则复合函数  $h = g \circ f: D \rightarrow \mathbf{R}^r$  在  $x_0$  可微, 且  $h'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$ .

7. 微分中值不等式 设  $D \subset \mathbf{R}^n$  是凸开集,  $f: D \rightarrow \mathbf{R}^m$ . 若  $f$  在  $D$  可微, 则对任何两点  $a, b \in D$ , 必存在点  $\xi = a + \theta(b-a)$ ,  $0 < \theta < 1$ , 使得  $\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(\xi)\| \|b-a\|$ .

8. 对于  $n$  元实值函数  $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $D \subset \mathbf{R}^n$  为开集, 如果  $f$  在  $D$  可导, 则由  $f'(x) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$  确定  $f$  的导函数  $f': D \rightarrow \mathbf{R}^n$  是一个向量函数. 若  $f'$  还在  $D$  (或  $D$  上某点) 可微, 则称  $f$  在  $D$  上二阶可微. 定义  $(f')^T$  的导数为  $f$  的二阶导数, 记作  $f''(x)$ .

$$f''(x) (= D^2 f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

矩阵称为函数  $f$  的黑塞矩阵.

9. 极值必要条件 设  $D \subset \mathbf{R}^n$  为开集, 实值函数  $f: D \rightarrow \mathbf{R}$  在  $x_0 \in D$  可微, 且取极值, 则

(1)  $x_0$  必为  $f$  的稳定点, 即有  $f'(x_0) = 0$ .

(2) 若  $f$  在  $x_0$  的邻域存在二阶偏导数, 则当  $f(x_0)$  为极小值时, 黑塞矩阵  $f''(x_0)$  为正定或正半定; 当  $f(x_0)$  为极大值时, 黑塞矩阵  $f''(x_0)$  为负定或负半定.

若  $f$  在  $x_0$  的黑塞矩阵  $f''(x_0)$  是不定的, 则  $f$  在  $x_0$  无极值.

10. 极值充分条件 实值函数  $f:D \rightarrow \mathbf{R}$  若在  $U(x_0) \subset D$  存在二阶连续偏导数, 且  $f'(x_0) = \mathbf{0}$ , 则当  $f''(x_0)$  为正定(或负定)时,  $f$  在  $x_0$  取严格极小值(或极大值); 当  $f''(x_0)$  为正半定(或负半定)时,  $f$  在  $x_0$  取极小值(或极大值).

## 疑难解析

1. 数量函数的导数与向量函数的导数有何不同?

答 数量函数的导函数是一个数量函数, 数量函数在某一点的导数是一个数值. 但是向量函数的导数仍是一个向量函数, 向量函数在某一点的导数是一个数量矩阵. 例如

若向量函数  $f:X \rightarrow \mathbf{R}^4$  ( $X = \{(x_1, x_2) \mid -\infty < x_1 < +\infty, x_2 > 0\} \subset \mathbf{R}^2$ ) 为  $f(x) = f(x_1, x_2) = (x_1^2 x_2^3, e^{x_1+x_2}, x_2, x_1 \ln x_2)^T$ , 则

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 x_2^3 & 3x_1^2 x_2^2 \\ e^{x_1+x_2} & e^{x_1+x_2} \\ 0 & 1 \\ \ln x_2 & x_1/x_2 \end{bmatrix}, \quad f'(1, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ e^2 & e^2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## 方法、技巧与典型例题分析

向量函数与数量函数的导数与微分虽然在形式上有较大的差异, 但其概念本质上是一致的. 所以, 我们仍然可以利用数量函数导数与微分的方法与技巧来解向量函数的题目.

**例 1** 设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $a_{ij}$  为常数,  $f(x) = Ax + \alpha$ ,  $\alpha$  为常向量, 求  $f'(x)$ .

**解**  $f(x + \Delta x) - f(x) = A(x + \Delta x) + \alpha - (Ax + \alpha) = A\Delta x + \mathbf{0}$ .  
故依定义, 有  $f'(x) = A = (a_{ij})_{m \times n}$ .

**例 2** 求下列向量函数的雅可比矩阵:

(1)  $f(x, y) = (x^2 + \sin y, 2xy)^T$ ;

$$(2) f(x, y) = (x^2, xy, y^2)^T;$$

$$(3) f(x, y, z) = (x \cos y, ye^x, \sin(xz))^T.$$

解 求雅可比矩阵, 即求  $f'(x)$  (或  $A$ ).

$$(1) Df(x, y)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + \sin y) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + \sin y) \\ \frac{\partial}{\partial x}(2xy) & \frac{\partial}{\partial y}(2xy) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & \cos y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}.$$

$$(2) Df(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x^2) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(xy) & \frac{\partial}{\partial y}(xy) \\ \frac{\partial}{\partial x}(y^2) & \frac{\partial}{\partial y}(y^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ y & x \\ 0 & 2y \end{bmatrix}.$$

$$(3) Df(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x \cos y) & \frac{\partial}{\partial y}(x \cos y) & \frac{\partial}{\partial z}(x \cos y) \\ \frac{\partial}{\partial x}(ye^x) & \frac{\partial}{\partial y}(ye^x) & \frac{\partial}{\partial z}(ye^x) \\ \frac{\partial}{\partial x}(\sin(xz)) & \frac{\partial}{\partial y}(\sin(xz)) & \frac{\partial}{\partial z}(\sin(xz)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos y & -x \sin y & 0 \\ ye^x & e^x & 0 \\ z \cos(xz) & 0 & x \cos(xz) \end{bmatrix}.$$

例 3 求下列函数的导数和微分:

$$(1) f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)^T, \text{ 求 } f'(1, 1), df(1, 1);$$

$$(2) f(x, y) = (x \sin y, (x - y)^2, 2y^2)^T, \text{ 求 } f'(x, y), f(0, \pi/2);$$

$$(3) f(x, y, z) = (x^2 + y, ye^{x+z})^T, \text{ 求 } f'(1, 0, 1) \text{ 和 } df(1, 0, 1).$$

解 (1)  $f'(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}, f'(1, 1) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = A,$

$$df(1, 1) = A \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \Delta x - \Delta y \\ \Delta x + \Delta y \end{bmatrix}.$$

$$(2) f'(x, y) = \begin{bmatrix} \sin y & x \cos y \\ 2(x-y) & -2(x-y) \\ 0 & 4y \end{bmatrix},$$

$$f'\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\pi & \pi \\ 0 & 2\pi \end{bmatrix}.$$

$$(3) f'(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 1 & 0 \\ ye^{x+z} & e^{x+z} & ye^{x+z} \end{bmatrix},$$

$$f'(1, 0, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \end{bmatrix} = A,$$

$$df(1, 0, 1) = A \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\Delta x + \Delta y \\ e^2 \Delta y \end{bmatrix}.$$

$$\text{例 4 } w = f(u) = \begin{bmatrix} u_1^2 - u_2 u_3 \\ u_1 u_3 - u_2^2 \end{bmatrix}, u = g(x) = \begin{bmatrix} x_1 \cos x_2 \\ x_2 \sin x_1 \\ x_1^2 e^{x_2} \end{bmatrix},$$

其中  $x = (x_1, x_2)^T, u = (u_1, u_2, u_3)^T, w = (w_1, w_2)^T$ ,

求  $D(f \circ g) \Big|_{(1,0)^T}, \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \Big|_{(1,0)^T}, \frac{\partial(w_1, w_2)}{\partial(x_1, x_2)} \Big|_{(1,0)^T}.$

解 由复合函数导数公式,得

$$D(f \circ g)(x) = \begin{bmatrix} 2u_1 & -u_3 & -u_2 \\ u_3 & -2u_2 & u_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos x_2 & -x_1 \sin x_2 \\ x_2 \cos x_1 & \sin x_1 \\ 2x_1 e^{x_2} & x_1^2 e^{x_2} \end{bmatrix},$$

而当  $(x_1, x_2)^T = (1, 0)^T$  时,  $(u_1, u_2, u_3)^T = (1, 0, 1)^T$ , 故

$$D(f \circ g) \Big|_{(1,0)^T} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\sin 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1} \Big|_{(1,0)^T} = 2, \quad \frac{\partial(w_1, w_2)}{\partial(x_1, x_2)} \Big|_{(1,0)^T} = \begin{vmatrix} 2 & -\sin 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3\sin 1.$$

例 5 求下列向量函数在指定点的导数:



- (1)  $f(x, y) = (\arctan x, e^{xy})^T$ , 求  $f'(1, 0)$ ;  
 (2)  $f(x, y, z) = (x^2 y, y^2 + z^2)^T$ , 求  $f'(1, 1, 1)$ ;  
 (3)  $f(x, y, z) = (\sin(x^2 - y^2), \ln(x^2 + y^2), 1/\sqrt{x^2 + y^2})^T$ , 求  $f'(1, 1, 1)$ .

解 先求  $f'(x)$ , 再求具体值.

$$(1) Df(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+x^2} & 0 \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{bmatrix}, \quad f'(1, 0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}.$$

$$(2) Df(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 0 & \frac{-2y}{(y^2+z^2)^2} & \frac{-2z}{(y^2+z^2)^2} \end{bmatrix},$$

$$f'(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

$$(3) Df(x, y, z)$$

$$= \begin{bmatrix} 2x\cos(x^2-y^2) & -2y\cos(x^2-y^2) & 0 \\ \frac{2x}{x^2+y^2} & 0 & \frac{2z}{x^2+z^2} \\ 0 & -\frac{y}{(y^2+z^2)^{3/2}} & -\frac{z}{(y^2+z^2)^{3/2}} \end{bmatrix},$$

$$f'(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

例 6 设向量函数  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  的坐标分量函数

$$\begin{cases} x = \cos u \sin v, \\ y = \sin u \cos v, \end{cases}$$

向量函数  $g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  的坐标分量函数  $u = s + t, v = s - t$ . 求  $D(f \circ g)$ .

$$\text{解 } f \circ g = \begin{bmatrix} \cos(s+t)\sin(s-t) \\ \sin(s+t)\cos(s-t) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
D(f \circ y) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\sin u \sin v & \cos u \cos v \\ \cos u \cos v & -\sin u \sin v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\cos(u+v) & -\cos(u-v) \\ \cos(u+v) & \cos(u-v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos 2s & \cos 2t \\ \cos 2s & \cos 2t \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

例 7 设  $D \subset \mathbf{R}^n$  为开域,  $f: D \rightarrow \mathbf{R}^m$  为可微函数, 证明:

- (1) 若在  $D$  上  $f'(x)$  恒为零矩阵, 则  $f(x)$  为常向量函数;
- (2) 若在  $D$  上  $f'(x) \equiv c$  (常数阵), 则  $f = cx + e, x \in D, e \in \mathbf{R}^m$ .

$\mathbf{R}^m$ .

证 当  $D$  为凸开集,  $f$  在  $D$  可微时,  $\forall a, b \in D, \exists \xi = a + \theta(b - a), 0 < \theta < 1$ , 使得

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(\xi)\| \|b - a\|.$$

(1) 若  $f'(x) \equiv 0$ , 则  $\|f'(\xi)\| = 0$ , 由上式得  $\|f(b) - f(a)\| = 0$ , 即  $f(a) = f(b)$ . 由  $a, b$  的任意性,  $f(x)$  为常向量函数.

(2) 若  $f'(x) \equiv c$ , 则  $\|f'(\xi)\| = d$  ( $d$  为常数). 于是

$$\|f(b) - f(a)\| \leq d \|b - a\|,$$

显然  $f(x)$  是  $x$  的线性函数. 设  $f(x) = cx + e$ , 则由本节例 1 知

$$\begin{aligned}
f(x + \Delta x) - f(x) &= c(x + \Delta x) + e - (cx + e) \\
&= c\Delta x + 0 \Rightarrow f'(x) = c.
\end{aligned}$$

例 8 设  $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2, g(x) = (\sin x, \cos x)^T, s(x_1, x_2) = (x_1^2, 2x_2, x_2 + 4)^T, t(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 x_3, x_1 + x_2 + x_3)$ . 求 (1)  $(f \circ g)'$ ; (2)  $(g \circ f)'$ ; (3)  $(s \circ t)'$ ; (4)  $(t \circ s)'$ .

解 (1)  $(f \circ g) = \sin x - \cos x, (f \circ g)' = \cos x + \sin x$ .

(2)  $(g \circ f) = (\sin(x_1 - x_2), \cos(x_1 - x_2))^T$ ,

$$(g \circ f)' = \begin{bmatrix} \cos(x_1 - x_2) & -\cos(x_1 - x_2) \\ -\sin(x_1 - x_2) & \sin(x_1 - x_2) \end{bmatrix}.$$

(3)  $(s \circ t) = (x_1^2 x_2^2 x_3^2, 2(x_1 + x_2 + x_3), x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^T$ ,

$$(s \circ t)' = \begin{bmatrix} 2x_1x_2^2x_3^2 & 2x_1^2x_2x_3^2 & 2x_1^2x_2^2x_3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(4) (t \circ s) = (2x_1^2x_2(x_2+4), x_1^2+3x_2+4)^T,$$

$$(t \circ s)' = \begin{bmatrix} 4x_1x_2(x_2+4) & 4x_1^2x_2+8x_1^2 \\ 2x_1 & 3 \end{bmatrix}.$$

**例 9** 设  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  为凸有界闭域,  $f(x)$  在  $D$  上有一阶连续偏导数. 证明:  $f(x)$  在  $D$  上满足李卜希兹条件. 即  $\exists L > 0, \forall x_1, x_0 \in D$ , 有  $|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0|$ .

**证** 由条件知,  $\exists M > 0$ , 使得

$$|f'_{x_i}(x)| \leq M, \quad \forall x \in D, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

因为  $D$  是凸区域, 依泰勒公式,  $\forall x, x_0 \in D, \exists x^* \in \overline{xx_0} \subset D$ , 使得

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)(x_i - x_{0,i}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) \right| |x_i - x_{0,i}| \leq Mn\rho(x, x_0). \end{aligned}$$

其中  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n})$ . 令  $L = Mn$ , 则

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0|.$$

**例 10** 设  $f, g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  是可微函数, 用复合函数求导法则证明向量内积的求导公式:

$$D(f(x) \cdot g(x)) = f^T(x)Dg(x) + g^T(x)Df(x)$$

**证** 设  $F: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F(u) = F(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n}) = \sum_{i=1}^n u_i u_{n+i},$$

$$G: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{2n},$$

$$u = G(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x), g_1(x), \dots, g_n(x)),$$

则  $(F \circ G)(x) = f(x) \cdot g(x)$ . 因为  $F$  的  $2n$  个偏导数连续, 所以  $F$  可微. 又  $G$  的每个分量可微, 所以  $G$  也可微. 从而由复合函数求导

法则与分块矩阵乘法法则,得

$$\begin{aligned} D(f(x) \cdot g(x)) &= D(F \circ G)(x) = DF(u)DG(x) \\ &= (u_{n+1}, \dots, u_{2n}, u_1, \dots, u_n) \begin{pmatrix} Df(x) \\ Dg(x) \end{pmatrix} \\ &= (u_{n+1}, \dots, u_{2n})Df(x) + (u_1, \dots, u_n)Dg(x) \\ &= g^T(x)Df(x) + f^T(x)Dg(x). \end{aligned}$$

例 11 设  $f$  是定义在区域  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  上的向量值函数,  $f$  在  $x_0 \in D$  可微, 证明:  $f$  在  $x_0$  处沿任何方向  $l$  的向量导数存在, 且

$$D_l f(x_0) = Df(x_0)(e_l) \quad (e_l \text{ 为向量 } l \text{ 的单位向量}).$$

证 因为  $f$  在  $x_0$  可微, 所以  $f$  的分量  $f_i$  在  $x_0$  可微. 故  $f_i$  在  $x_0$  沿任何方向  $l$  的方向导数存在, 且  $\frac{\partial f_i(x)}{\partial l} = \text{grad } f(x_0) \cdot e_l$ .

由此知,  $f$  在  $x_0$  沿任何方向  $l$  的方向导数存在, 且  $D_l f(x_0) = Df(x_0)(e_l)$ .

例 12  $f$  是定义在  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  上的向量值函数,  $x_0 \in D$ , 若  $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$  ( $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$ ) 在  $x_0$  的某邻域存在, 且在  $x_0$  连续. 证明:  $f$  在  $x_0$  可微.

证 因为  $f(x)$  的每个分量  $f_i(x)$  都是数量值函数, 由于数量值函数  $f_i$  在  $x_0$  可微的充要条件是  $f_i$  在  $x_0$  的邻域内存在偏导数  $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ), 且所有偏导数都在  $x_0$  连续. 所以由题设知,  $f(x)$  的所有分量  $f_i(x)$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) 都在  $x_0$  可微. 从而, 由向量值函数可微的充要条件知,  $f(x)$  在点  $x_0$  可微.

例 13 设  $D \subset \mathbb{R}^m$  是凸域,  $f(x) \in C^2(D, \mathbb{R})$ , 且满足  $f(x) \geq f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$  ( $\forall x, x_0 \in D$ ). 证明:  $f(x)$  的黑塞矩阵  $H_f(x)$  是正半定的.

证  $\forall x_0 \in D, x \in \mathbb{R}^m$  为任一向量, 当  $t$  充分小时, 点  $x_0 + t(x - x_0) \in D$ . 由泰勒公式, 得

$$f(x_0) + t(x - x_0)$$

$$= f(x_0) + Df(x_0)t(x - x_0) + \frac{t^2}{2}(x - x_0)^T H_f(x_0)(x - x_0) + o(t^2|x - x_0|^2).$$

由题设条件可以得出

$$\frac{t^2}{2}(x - x_0)^T H_f(x_0)(x - x_0) + o(t^2|x - x_0|^2) \geq 0,$$

消去  $t^2$ , 令  $t \rightarrow 0$ , 得

$$(x - x_0)^T H_f(x_0)(x - x_0) \geq 0.$$

即知  $H_f(x_0)$  是正半定的. 由于  $x_0$  的任意性, 所以  $f(x)$  的黑塞矩阵在  $D$  上是正半定的.

**例 14** 证明: 设  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $S$  是连接  $x_0, y_0$  的线段,  $D$  是包含  $S$  的区域,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  连续, 在  $S(x_0, y_0$  可除外) 上可微, 则存在  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in S$ , 使得

$$f(y_0) - f(x_0) = \left[ \frac{\partial f_i(\xi_i)}{\partial x_j} \right]_{m \times n} (y_0 - x_0)$$

成立. 该式称为向量值函数的拉格朗日公式.

**证** 设  $f(x) = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ ,  $f_i(x) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是数量值函数. 在  $f_i(x)$  中, 固定  $x_2, x_3, \dots, x_n$ , 则

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - f_i(x_{0,1}, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial f_i(\xi_{i,1})}{\partial x_1} (x_1 - x_{0,1}).$$

事实上, 此时  $f_i$  为一元函数, 由一元函数的拉格朗日公式即可得到结果. 同样可以得到  $f_i(x)$  关于各个变量  $x_i$  的拉格朗日公式. 令

$$\xi_i = (\xi_{i,1}, \xi_{i,2}, \dots, \xi_{i,n}), (x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) = y_0,$$

取  $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ , 即得  $n$  元向量值函数的拉格朗日公式

$$f(y_0) - f(x_0) = \left[ \frac{\partial f_i(\xi_i)}{\partial x_j} \right]_{m \times n} (y_0 - x_0).$$

**例 15** 讨论二次函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$  的极值. 其中  $x \in \mathbb{R}^n$  为变量,  $A$  为  $n \times n$  矩阵,  $b$  为  $n \times 1$  向量,  $c$  为实数.

解 因为  $f'(x) = x^T A + b^T \stackrel{\text{令}}{=} 0$ , 故  $f(x)$  的稳定点为  $x_0 = -A^{-1}b$  (设  $A$  可逆). 再求得  $f$  的黑塞矩阵  $f''(x) = A$ . 所以

当  $A$  为正定时,  $f(x_0)$  为极小值.

当  $A$  为负定时,  $f(x_0)$  为极大值.

由极值点的惟一性知,  $f(x_0)$  为  $f$  的最大值或最小值, 有

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \frac{1}{2} (A^{-1}b)^T A (A^{-1}b) - b^T (A^{-1}b) + c \\ &= \frac{1}{2} b^T A^{-1}b - b^T A^{-1}b + c = -\frac{1}{2} b^T A b + c. \end{aligned}$$

例 16 求下列函数的黑塞矩阵, 依例 15 求该函数的极值点.

(1)  $f(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2 - x_2x_3 + x_1 + 3x_2 - x_3$ ;

(2)  $f(x) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_2x_3 + 6x_1x_3$ .

解 先写成  $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b x + c$  形式, 再求出稳定点, 然后讨论  $A$ , 确定其是否极值点.

(1)  $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b x$ , 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} x_0 &= -A^{-1}b = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \left( -\frac{17}{6}, -\frac{7}{3}, -\frac{2}{3} \right)^T. \end{aligned}$$

因为  $|2| = 2 > 0$ ,  $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 > 0$ ,  $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0$ ,

所以  $A$  正定,  $x_0 = (-17/6, -7/3, -2/3)^T$  是极小值点.

(2)  $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b x$ , 其中

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 4 & -4 & -6 \\ 6 & -6 & 8 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

显然  $x_0 = (0, 0, 0)^T$ .

因为 
$$\begin{aligned} |-2| &= -2 < 0, & \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} &= -8 < 0, \\ \begin{vmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 4 & -4 & -6 \\ 6 & -6 & 8 \end{vmatrix} &= -136 < 0, \end{aligned}$$

所以  $A$  负定,  $x_0$  是极小值点.

### 第三节 隐函数定理与反函数定理

#### 主要内容

1. 设  $X \subset \mathbf{R}^n, Y \subset \mathbf{R}^m, \Omega = X \times Y \subset \mathbf{R}^{n+m}, F: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$  对向量函数方程  $F(x, y) = 0, x \in X, y \in Y$ , 如果存在向量函数  $f: U \rightarrow Y (U \subset X)$ , 使得  $F(x, f(x)) \equiv 0, x \in U$ , 则称函数  $f$  是由  $F(x, y) = 0$  所确定的  $U$  上的隐函数.

$F$  关于  $x$  的偏导数记作  $F'_x(x, y)$ , 为  $m \times n$  矩阵; 关于  $y$  的偏导数记作  $F'_y(x, y)$ , 为  $m \times m$  矩阵.

2. 隐函数定理 设  $X \subset \mathbf{R}^n, Y \subset \mathbf{R}^m$  都是开集,  $\Omega = X \times Y \subset \mathbf{R}^{m+n}$  (开集),  $F: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$ . 如果  $F$  满足以下条件:

- $\exists x_0 \in X, y_0 \in Y$ , 使得  $F(x_0, y_0) = 0$ ,
- $F$  在  $\Omega$  上可微, 且  $F'$  连续,
- $\det F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ ,

则存在点  $x_0$  的  $n$  维邻域  $U = U(x_0) \subset X$  和点  $y_0$  的  $m$  维邻域  $V = U(y_0) \subset Y$ , 使得在点  $(x_0, y_0)$  的  $n+m$  维邻域  $W = U \times V \subset \Omega$  内, 由

$F(x, y) = 0$  惟一确定隐函数  $f: U \rightarrow V$ , 满足

- $y_0 = f(x_0)$ ;
- 当  $x \in U$  时,  $(x, f(x)) \in W$ , 且有  $F(x, f(x)) \equiv 0$ ;
- $f$  在  $U$  内存在连续导数, 且
$$f'(x) = -[F_y'(x, y)]^{-1}F_x'(x, y), (x, y) \in W.$$

3. 若在开集  $D \subset \mathbb{R}^n$  上定义了向量函数  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , 如果  $f$  是一一对应的映射, 则  $f(x) = y$  能确定一个定义在  $f(D)$  上的函数  $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$ , 称为函数  $f$  的反函数.  $f$  与  $f^{-1}$  有以下关系:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, x \in D; \quad (f \circ f^{-1})(y) = y, y \in f(D).$$

4. 反函数定理 设  $D \subset \mathbb{R}^n$  是开集, 函数  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  满足以下条件:

- $f$  在  $D$  上可微, 且  $f'$  连续,
- 存在  $x_0 \in D$ , 使得  $\det f'(x_0) \neq 0$ ,

则存在邻域  $U = U(x_0) \subset D$ , 使得

- $f$  在  $U$  是一一对应的映射, 存在  $f^{-1}: V \rightarrow U$ , 其中  $V = f(U)$ ;
- $f^{-1}$  在  $V$  存在连续导数  $(f^{-1})'$ , 且
$$(f^{-1})'(y) = [f'(x)]^{-1}, x = f^{-1}(y), y \in V.$$

推论 若  $f$  在  $D$  上处处满足反函数定理条件, 则  $f(D)$  是一开集.

## 方法、技巧与典型例题分析

求向量函数的隐函数, 首先是验证向量函数是否满足隐函数定理条件, 然后利用定理中的公式计算隐函数确定函数的导数.

例 1 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^4, F, G: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . 若向量函数  $H = (F, G)^T$  在点  $(z_0, w_0)^T \in \Omega$  (其中  $z_0 = (x_0, y_0)^T, w_0 = (u_0, v_0)^T$ ) 的邻域内满足隐函数定理条件, 且  $\det H_w'(z_0, w_0) \neq 0$ , 求方程  $H(x, y, u, v) = 0$  在  $z_0$  某邻域内确定的隐函数  $w = f(z)$  的导数.



解  $f'(z) = -[H_w'(z, w)]^{-1} H_z'(z, w).$

即 
$$\begin{aligned} f'(z) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial v} & -\frac{\partial F}{\partial v} \\ -\frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} & \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} \\ \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)} & \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

例 2 设  $u = u(x, y)$  由方程组  $\begin{cases} u = f(x, y, z, t), \\ g(y, z, t) = 0, \\ h(z, t) = 0 \end{cases}$  确定, 其中

$f, g, h$  都是  $C^{(1)}$  类函数, 且  $J = \frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)} \neq 0$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

解 将方程组写成

$$\begin{cases} F(x, y, z, t, u) \equiv f(x, y, z, t) - u = 0, \\ g(y, z, t) = 0, \\ h(z, t) = 0, \end{cases}$$

则 
$$\begin{aligned} \frac{\partial(F, g, h)}{\partial(z, t, u)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial t} & \frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial t} & \frac{\partial g}{\partial u} \\ \frac{\partial h}{\partial z} & \frac{\partial h}{\partial t} & \frac{\partial h}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial t} & -1 \\ \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial t} & 0 \\ \frac{\partial h}{\partial z} & \frac{\partial h}{\partial t} & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)} = -J \neq 0, \end{aligned}$$

故由隐函数定理、方程组确定  $z, t, u$  是  $x, y$  隐函数.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{\frac{\partial(F, g, h)}{\partial(z, t, y)}}{\frac{\partial(F, g, h)}{\partial(z, t, u)}} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} f_3' & f_4' & f_2' \\ \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial t} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial t} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{J} \left( -f_3 \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial t} + f_4 \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial z} + J f_2 \right).\end{aligned}$$

例 3 设由方程组

$$\begin{cases} u + v + w + x + y = a, \\ u^2 + v^2 + w^2 + x^2 + y^2 = b^2, \\ u^3 + v^3 + w^3 + x^3 + y^3 = c^3 \end{cases}$$

确定  $u, v, w$  为  $x, y$  的隐函数, 求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}$ .

解 方程组化为

$$\begin{cases} F(u, v, w, x, y) = u + v + w + x + y - a = 0, \\ G(u, v, w, x, y) = u^2 + v^2 + w^2 + x^2 + y^2 - b^2 = 0, \\ H(u, v, w, x, y) = u^3 + v^3 + w^3 + x^3 + y^3 - c^3 = 0, \end{cases}$$

则在

$$\begin{aligned}\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, v, w)} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2u & 2v & 2w \\ 3u^2 & 3v^2 & 3w^2 \end{vmatrix} \\ &= 6(v - u)(w - v)(w - u) \neq 0\end{aligned}$$

时, 依隐函数定理确定  $(u, v, w)$  为  $(x, y)$  的向量函数. 对方程组关于  $x$  求偏导数, 得

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} + 1 = 0, \\ 2u \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x} + 2w \frac{\partial w}{\partial x} + 2x = 0, \\ 3u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3v^2 \frac{\partial v}{\partial x} + 3w^2 \frac{\partial w}{\partial x} + 3x^2 = 0, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(v-x)(w-x)}{(v-u)(w-u)}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{(u-x)(w-x)}{(u-v)(w-v)}, \\ \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{(u-x)(v-x)}{(w-u)(w-v)}. \end{cases}$$

例 4 求下列方程组所确定隐函数的导数:

$$\begin{aligned} (1) & \begin{cases} yu + xv = 1, \\ xu + yv = 0, \end{cases} \text{ 求 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}; \\ (2) & \begin{cases} u + v + w = x, \\ uv + vw + wu = y, \\ uvw = z, \end{cases} \text{ 求 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned}$$

解 (1) 方程组关于  $x$  求偏导数, 得

$$\begin{cases} y \frac{\partial u}{\partial x} + v + x \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ u + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{yv - xu}{x^2 - y^2}.$$

方程组关于  $y$  求偏导数, 得

$$\begin{cases} u + y \frac{\partial u}{\partial y} + x \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ x \frac{\partial u}{\partial y} + v + y \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{yv - xu}{x^2 - y^2}.$$

(2) 方程组每个方程关于  $x$  求偏导数, 得

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 1, \\ v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ vw \frac{\partial u}{\partial x} + uw \frac{\partial v}{\partial x} + uv \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

用克拉默法则解方程组, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & u+w & v+u \\ 0 & uw & uv \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v+w & u+w & v+u \\ vw & uw & uv \end{vmatrix}} = \frac{u^2}{(u-v)(u-w)}.$$

类似可得  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{(u-v)(w-u)}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{(u-v)(u-w)}.$

**例 5** 设在直角坐标系下, 函数  $z=z(x, y)$  有二阶连续偏导数, 并满足方程  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

作变量代换  $u=x+y, v=x-y$ , 因变量也换作  $w=xy-z$ , 试导出  $w$  关于  $u, v$  的偏导数所满足的方程.

**解** 由变量代换得  $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}$ , 故确定  $w$  也是  $u, v$  的函数. 对  $z=xy-w$  关于  $x$  和  $y$  求一阶和二阶偏导数, 得

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = y - \left( \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = y - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x - \left( \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = x - \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}, \\ \begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \end{cases} \end{cases}$$

将上述结果代入题给方程即得  $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{2}.$

**例 6** 设  $f=(f_1, f_2)^T, x_0=(3, 2, 7)^T, y_0=(0, 1)^T,$

$$f_1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = 2e^{y_1} + x_1 y_2 - 4x_2 + 3,$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = y_2 \cos y_1 - 6y_1 + 2x_1 - x_3.$$

求由向量方程  $f(x, y)=0$  确定隐函数  $y=g(x)$  在点  $x_0$  的导数.

解 对  $f=(x, y)$  关于  $x_1$  求偏导数, 得

$$\begin{cases} 2e^{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + y_2 + x_1 \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0, \\ -y_2 \sin y_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \cos y_1 \frac{\partial y_2}{\partial x_1} - 6 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + 2 = 0, \end{cases}$$

解得

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \end{bmatrix} \bigg|_{(x_0, y_0)} = \frac{\begin{bmatrix} 2x_1 - y_2 \cos y_1 \\ -y_2(\sin y_1 + 6) - 4e^{y_1} \end{bmatrix} \bigg|_{(x_0, y_0)}}{\begin{vmatrix} 2e^{y_1} & x_1 \\ -(y_2 \sin y_1 + 6) & \cos y_1 \end{vmatrix}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

类似可得

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \bigg|_{(x_0, y_0)} = \frac{\begin{bmatrix} 4 \cos y_1 \\ 4(y_2 \sin y_1 + 6) \end{bmatrix} \bigg|_{(x_0, y_0)}}{\begin{vmatrix} 2e^{y_1} & x_1 \\ -(y_2 \sin y_1 + 6) & \cos y_1 \end{vmatrix}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} \bigg|_{(x_0, y_0)} = \frac{\begin{bmatrix} -x_1 \\ 2e^{y_1} \end{bmatrix} \bigg|_{(x_0, y_0)}}{\begin{vmatrix} 2e^{y_1} & x_1 \\ -(y_2 \sin y_1 + 6) & \cos y_1 \end{vmatrix}} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{20} \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

例 7 设  $w=(x, y, z)^T$ ,  $p=(r, \theta, \varphi)^T$ , 求函数

$$w = f(p) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$$

的反函数的导数.

解 依反函数定理知反函数存在, 由公式

$$(f^{-1})'(w) = [f'(p)]^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi & r^2 \sin \theta \sin \varphi & \frac{r^2}{2} \sin 2\theta \\ \frac{r}{2} \sin 2\theta \cos \varphi & \frac{r}{2} \sin 2\theta \sin \varphi & -r \sin^2 \theta \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} & \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} & -\frac{\sin \theta}{r} \\ -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} & \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (r^2 \sin \theta \neq 0).
\end{aligned}$$

**例 8** 设  $x=x(u,v), y=y(u,v)$  在点  $(u,v)$  的邻域内有连续偏导数, 且  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ .

(1) 证明: 方程组  $x=x(u,v), y=y(u,v)$  在点  $(x,y)$  某邻域内惟一确定反函数组  $u=u(x,y), v=v(x,y)$ ;

(2) 求  $u=u(x,y), v=v(x,y)$  关于  $x, y$  的偏导数;

(3) 证明:  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$ .

**解** (1) 将方程组写成

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = x - x(u,v) = 0, \\ G(x,y,u,v) = y - y(u,v) = 0, \end{cases}$$

由  $J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ , 依反函数存在定理知, 存在惟一的反函数组  $u=u(x,y), v=v(x,y)$ .

(2) 对下列恒等式两边对  $x$  求偏导数, 即

$$\begin{cases} x = x[u(x,y), v(x,y)], \\ y = y[u(x,y), v(x,y)], \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}$$

解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial u}.$$

类似可得  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial u}.$

(3) 利用向量值函数的复合函数求导的矩阵形式, 取  $n=2$ , 有

$$\frac{\partial(w_1, w_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u_1, u_2)} \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x_1, x_2)}$$

由于  $u_i = g_i(x_1, x_2)$  ( $i=1, 2$ ), 从而得

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = 1.$$

## 第十三章 重 积 分

### 第一节 二重积分的概念

#### 主要内容

1. 设  $f$  为定义在矩形域  $D=[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  上的函数,  $J$  是一个确定的数. 若  $\forall \epsilon > 0$ , 总  $\exists \delta > 0$ , 使得对  $D$  上任何分割  $T$ , 只要  $\|T\| < \delta$ , 对属于分割  $T$  的所有积分和, 都有

$$\left| \sum_{i,j} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j - J \right| < \epsilon,$$

则称  $f$  在  $D$  上可积, 数  $J$  称为  $f$  在  $D$  上的二重积分, 记作

$$J = \iint_D f(x, y) dx dy \quad \text{或} \quad \int_D f.$$

2. 设  $f$  为矩边域  $D$  上的有界函数,  $T = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$  为  $D$  上一个矩形网分割, 记  $M_i = \sup_{\sigma_i} \{f(x, y)\}$ ,  $m_i = \inf_{\sigma_i} \{f(x, y)\}$ , 分别称

$$S(T) = \sum_i M_i \Delta \sigma_i \quad \text{和} \quad s(T) = \sum_i m_i \Delta \sigma_i$$

为  $f$  关于分割  $T$  的上和与下和. 具有性质:

$$(1) \quad \forall T, \text{ 总有 } s(T) \leq \sum_i (T) \leq S(T);$$

$$(2) \quad \forall T, T', \text{ 都有 } s(T) \leq S(T');$$

$$(3) \quad \text{对 } T \text{ 加密后的分割 } T', \text{ 有 } s(T) \leq s(T'), S(T) \geq S(T');$$

$$(4) \quad \text{分别称 } s = \sup_T \{s(T)\} \text{ 和 } S = \inf_T \{S(T)\} \text{ 为 } f \text{ 在 } D \text{ 上的下}$$



积分与上积分,有  $s \leq S$ ,  $\lim_{\|T\| \rightarrow 0} S(T) = S$ ,  $\lim_{\|T\| \rightarrow 0} s(T) = s$ .

3. 有界函数  $f$  在矩形域  $D$  上可积  $\Leftrightarrow f$  在  $D$  上的上积分等于下积分,且  $s = S = \int_D f$ .

4. 有界函数  $f$  在矩形域  $D$  上可积  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$  某  $T \in D$ , 使得  $S(T) = s(T) = \sum_i \omega_i \Delta \sigma_i < \varepsilon$ .

$\omega_i = M_i - m_i$  称为  $f$  在  $\sigma_i$  上的振幅.

5. 若  $f$  在矩形域  $D$  上连续,则  $f$  在  $D$  上可积.

6. 设  $\varphi: [c, d] \rightarrow \mathbf{R}$  为可积函数,  $E = \{(x, y) \mid y = \varphi(x), x \in [c, d]\} \subset D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  ( $[c, d] \subset [a_1, b_1]$ ). 若  $f$  为  $D$  上有界函数,且在  $D \setminus E$  上连续,则  $f$  在  $D$  上可积.

7. 设  $D \subset \mathbf{R}^2$  为有界闭域,  $f$  在  $D$  上有界函数,矩形域  $\hat{D} \subset D$ , 则称

$$\hat{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in \hat{D} \setminus D \end{cases}$$

为  $f$  在  $\hat{D}$  上的延拓函数.

8. 若  $f$  在延拓函数  $\hat{f}$  在  $\hat{D}$  上可积,则  $f$  在  $D$  上可积,且

$$\int_D f = \int_{\hat{D}} \hat{f}.$$

9. 设  $D$  是平面有界点集(平面图形),函数  $f(x, y)$  在  $D$  上可积,则称  $D$  是可求面积的,且  $D$  的面积  $\Delta D = \int_D 1$ .

10. 二重积分有与定积分类似的七条性质.

## 疑难解析

### 1. 二重积分与定积分有哪些异同?

答 二重积分与定积分都是以积分和式的极限来定义的,要求区域(区间)是有界的,函数  $f$  在区域上有界. 它们有相同的积

分性质.

不同的是,定积分中积分区域是数轴上的区间,被积函数是一元函数;二重积分中积分区域是平面区域,被积函数是二元函数.

2. 若  $f$  在  $D$  内除有限条面积为零的曲线外连续,  $f$  是否在  $D$  上可积?

答  $f$  在  $D$  上可积. 利用积分的区域可加性,将  $D$  分割为有限个小区域. 因为这些曲线面积为零,不影响小区域上的积分值,

所以  $\int_D f = \sum_{i=1}^k \int_{D_i} f$ , 且  $f$  在  $D$  上可积.

### 方法、技巧与典型例题分析

理解二重积分作为积分和的极限并认识  $\sigma_i$  的意义,掌握在二重积分存在的条件下,利用对区域的特殊分法和点的特殊取法来计算积分值,是我们全面理解二重积分概念的必要条件,希望读者通过例题切实掌握.

例 1 证明:若函数  $f(x, y)$  在有界的区域  $D$  上连续,且  $f(x, y) > 0$ , 则  $\iint_D f(x, y) dx dy > 0$ .

证 由题设条件知,  $0 < m \leq f(x, y) \leq M$ , 所以,  $f(x, y)$  在  $D$  上的积分和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i \geq \sum_{i=1}^n m \Delta \sigma_i = m \sum_{i=1}^n \Delta \sigma_i = m D_S,$$

其中  $D_S$  是  $D$  的面积. 而  $D_S > 0$ , 故

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i \geq m D_S > 0.$$

例 2 证明:若函数  $f$  在矩形域  $D$  上可积,则  $f$  在  $D$  上有界.

证 由定义,若  $f(x, y)$  在矩形域上可积,则  $\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0, \forall T \in D$ , 当  $\|T\| < \delta$  时,有

$$\left| \sum_{i,j} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j - J \right| < \epsilon,$$

所以

$$|f(x, y)| \leq M.$$

若  $f(x, y)$  无界, 则对  $T = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ , 至少在某  $\sigma_i$  上, 有

$$f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j = f(\xi_i, \eta_j) \Delta \sigma_i \rightarrow \infty.$$

从而

$$\left| \sum_{i,j} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j - J \right| \rightarrow \infty,$$

引出矛盾.

**例 3** 把积分  $\iint_D xy dx dy$  当做积分和的极限, 用直线网  $x = i/n, y = j/n$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) 分割  $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ , 并取被积函数在小正方形之右上顶点的值为  $f(\xi_i, \eta_j)$ , 计算积分值.

**解** 此时, 积分和式为

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j &= \sum_{i,j=1}^n \frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n i \sum_{j=1}^n j \\ &= \frac{1}{n^4} \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

所以 
$$\iint_D xy dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j = \frac{1}{4}.$$

**例 4** 用直线  $x = 1 + i/n, y = 1 + 2j/n$  ( $i, j = 0, 1, \dots, n$ ) 将域  $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3$  分为小矩形. 作出函数  $f(x, y) = x^2 + y^2$  在域上的积分上和  $S$  与积分下和  $s$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时, 求上和与下和的极限.

**解** 求上和时, 取  $f(\xi_i, \eta_j)$  为小矩形右上顶点的值; 求下和时, 取  $f(\xi_i, \eta_j)$  为小矩形左下顶点的值. 故

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \left( 1 + \frac{i}{n} \right)^2 + \left( 1 + \frac{2j}{n} \right)^2 \right] \frac{1}{n} \frac{2}{n} = \frac{40}{3} + \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2},$$

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \left( 1 + \frac{i}{n} \right)^2 + \left( 1 + \frac{2j}{n} \right)^2 \right] \frac{1}{n} \frac{2}{n} = \frac{40}{3} - \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}.$$

当  $n \rightarrow \infty$  时, 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S = \lim_{n \rightarrow \infty} s = \frac{40}{3} = 13 \frac{1}{3}.$$

**例 5** 设  $f(x, y)$  为连续函数, 证明:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} f(x,y) dx dy = f(0,0).$$

证 由二重积分中值定理,有

$$\iint_{x^2+y^2 \leq r^2} f(x,y) dx dy = f(\xi, \eta) \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} dx dy = \pi r^2 \cdot f(\xi, \eta).$$

因为  $(\xi, \eta)$  是域  $x^2+y^2 \leq r^2$  内一点, 当  $r \rightarrow 0$  时,  $f(\xi, \eta) \rightarrow f(0,0)$ . 由连续性, 得

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} f(x,y) dx dy = \lim_{r \rightarrow 0} f(\xi, \eta) = f(0,0).$$

一般地, 若  $f(x,y)$  在方形域  $D$  可积, 在  $(x_0, y_0)$  连续, 对  $(x_0, y_0) \in G \subset D$ , 有

$$\lim_{d(G) \rightarrow 0} \frac{1}{\bar{G}} \iint_G f(x,y) dx dy = f(x_0, y_0).$$

其中  $d(G)$  为  $G$  的直径,  $\bar{G}$  为  $G$  的面积.

例 6 证明: 若函数  $f(x,y), g(x,y)$  在有界闭区域  $D$  上连续, 且  $g(x,y) \geq 0$ , 则  $\exists (\xi, \eta) \in D$ , 使得

$$\iint_D f(x,y)g(x,y) dx dy = f(\xi, \eta) \iint_D g(x,y) dx dy.$$

证 由  $f(x,y)$  在  $D$  上连续, 必有  $m \leq f(x,y) \leq M$ , 故  $\forall (x,y) \in D$ , 有

$$mg(x,y) \leq f(x,y)g(x,y) \leq Mg(x,y),$$

从而, 有

$$m \iint_D g(x,y) dx dy \leq \iint_D f(x,y)g(x,y) dx dy \leq M \iint_D g(x,y) dx dy.$$

因为  $g(x,y) \geq 0$ , 设  $\iint_D g(x,y) dx dy = 0$ , 则

$$\iint_D f(x,y)g(x,y) dx dy = f(\xi, \eta) \iint_D g(x,y) dx dy = 0.$$

若  $\iint_D g(x,y) dx dy > 0$ , 则

$$m \leq \frac{\iint_D f(x,y)g(x,y)dxdy}{\iint_D g(x,y)dxdy} \leq M.$$

由连续函数的介值定理,  $\exists (\xi, \eta) \in D$ , 使得

$$\frac{\iint_D f(x,y)g(x,y)dxdy}{\iint_D g(x,y)dxdy} = f(\xi, \eta),$$

从而  $\iint_D f(x,y)g(x,y)dxdy = f(\xi, \eta) \iint_D g(x,y)dxdy$ .

例 7 若函数  $f(x,y)$  在  $D$  上连续, 且对任何  $D' \subset D$ , 都有

$$\iint_{D'} f(x,y)dxdy = 0, \text{ 证明: } \forall (x,y) \in D, f(x,y) = 0.$$

证 用反证法. 设在某  $P_0(x_0, y_0) \in D, f(x_0, y_0) \neq 0$ , 不妨设  $f(x_0, y_0) > 0$ , 则依连续函数的局部保号性, 存在  $U(P_0; r)$ , 使得  $\forall (x,y) \in U(P_0; r) \cap D$ , 有  $f(x,y) > \frac{f(x_0, y_0)}{2} > 0$ , 于是

$$\iint_G f(x,y)dxdy \geq \frac{f(x_0, y_0)}{2} \iint_G dxdy = \frac{f(x_0, y_0)}{2} D_G > 0,$$

其中  $G = U(P_0; r)$ ,  $D_G$  是  $G$  的面积. 上式与题设矛盾, 故  $\forall (x,y) \in D$ , 必有  $f(x,y) = 0$ .

例 8 函数  $f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \text{ 为有理点,} \\ -1, & (x,y) \text{ 为无理点} \end{cases}$

在  $D[0,1;0,1]$  上是否可积?

解 不可积. 因为对区域的任一分割, 若在每一小区域  $\Delta\sigma_i$  上总取有理点  $(\xi_i, \eta_i)$ , 则

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i = D_S = 1.$$

若在每一小区域  $\Delta\sigma_i$  上总取无理点  $(\xi_i, \eta_i)$ , 则

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = - \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i = -D_S = -1.$$

从而知  $\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$  不存在.

**例 9** 估计  $\iint_{|x|+|y| \leq 10} \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} dx dy$  的值.

**解** 因为  $0 \leq \cos^2 x \leq 1, 0 \leq \cos^2 y \leq 1, D_S = 200$ , 故

$$\frac{1}{102} \leq f(x, y) = \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100}.$$

于是  $\frac{100}{51} \leq \iint_{|x|+|y| \leq 10} \frac{dx dy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq 2.$

**例 10** 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{2n} \frac{2}{n^2} \left[ \frac{2i+j}{n} \right]$ , 这里  $[x]$  是不超过  $x$  的最大整数.

**解**  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{2n} \frac{2}{n^2} \left[ \frac{2i+j}{n} \right]$  是函数  $f(x, y) = [x+y]$  在方形域  $D = [0, 2; 0, 2]$  上的一个积分和. 将  $x$  轴上区间  $n$  等分,  $y$  轴上区间  $2n$  等分, 故  $\Delta\sigma_i = \frac{2}{n^2}$ ; 取小区间  $\Delta\sigma_i$  右上顶点  $\left( \frac{2i}{n}, \frac{j}{n} \right)$  的函数值, 即构造出下列和式. 函数  $f(x, y) = [x+y]$ .

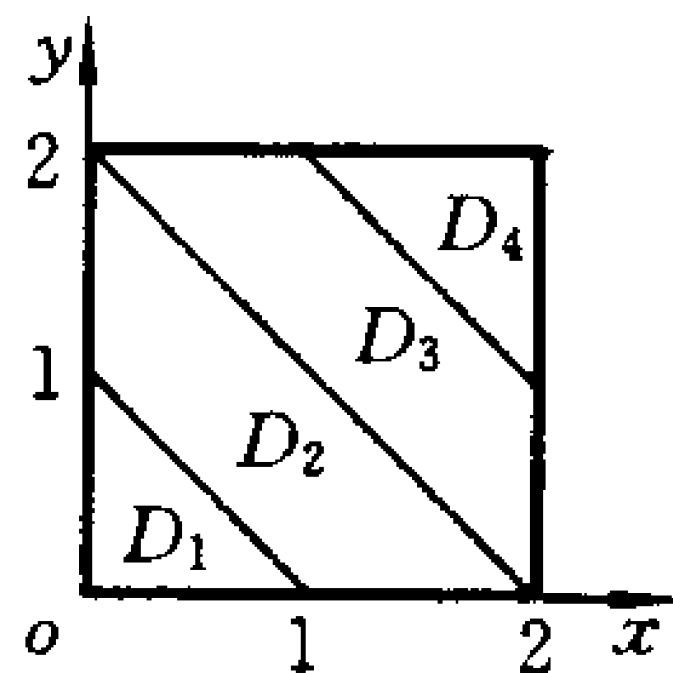


图 13.1

将  $D$  分为  $D_1, D_2, D_3, D_4$ , 其面积分别为  $1/2, 3/2, 3/2, 1/2$ , 各小区域内函数值分别为  $0, 1, 2, 3$ . 于是

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{2n} \frac{2}{n^2} \left[ \frac{2i+j}{n} \right] \\ &= \iint_{D_1} 0 dx dy + \iint_{D_2} 1 dx dy + \iint_{D_3} 2 dx dy + \iint_{D_4} 3 dx dy \\ &= 0 + \iint_{D_2} dx dy + 2 \iint_{D_3} dx dy + 3 \iint_{D_4} dx dy \\ &= 1 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 6. \end{aligned}$$

## 第二节 二重积分的计算

### 主要内容

1. 设  $f$  定义在矩形域  $D = [a, b] \times [c, d]$  上, 当  $x$  取  $[a, b]$  上某定值时,  $f(x, y)$  是  $[c, d]$  上的一元函数, 则积分(若存在)

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad x \in [a, b]$$

是定义在  $[a, b]$  上的函数, 称为含参变量  $x$  的积分.

2. 若  $f$  在矩形域  $D = [a, b] \times [c, d]$  上连续, 则函数  $I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$  在  $[a, b]$  上连续.

3. 设  $f$  在矩形域  $D = [a, b] \times [c, d]$  上可积, 若  $\forall x \in [a, b], f(x, y)$  在  $[c, d]$  上可积, 则含参变量积分  $I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$  在  $[a, b]$  上可积, 且

$$\int_a^b I(x) dx = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

4. 若  $f$  在  $D = [a, b] \times [c, d]$  上连续, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx,$$

即累次积分与顺序无关.

5. 平面点集  $D = \{(x, y) \mid y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\}$  称为  $x$ -型区域,  $D = \{(x, y) \mid x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d\}$  称为  $y$ -型区域.

6. 设  $f$  在  $x$ -型区域上连续,  $y_1(x), y_2(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则

$G(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$  在  $[a, b]$  上连续, 且

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

7. 用极坐标变换  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  时, 有

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr, \end{aligned}$$

其中  $D' = \{(r, \theta) | r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta), \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$ ,

或  $\iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta = \int_{r_1}^{r_2} r dr \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta,$

其中  $D' = \{(r, \theta) | r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta), r_1 \leq r \leq r_2\}.$

8. 对一般的变量代换  $u = u(x, y), v = v(x, y)$ , 若  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0$ , 则有逆变换  $x = x(u, v), y = y(u, v)$ , 且有  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ . 那么有换元公式

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D'} f(x(u, v), \\ &\quad y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv, \end{aligned}$$

其中  $D'$  为  $D$  变换后对应的区域.

9. 设函数  $f$  及  $f_x$  都在矩形域  $D = [a, b] \times [c, d]$  上连续, 则  $I(x) = \int_a^b f(x, y) dy$  在  $[a, b]$  上可微, 且

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x) dx = \int_c^d f_x(x, y) dy.$$

10. 设函数  $f$  及  $f_x$  都在矩形域  $D = [a, b] \times [c, d]$  上连续,  $y_1, y_2$  为定义在  $[a, b]$  上, 其值域含于  $[c, d]$  的两个可微函数, 则函数  $F(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$  在  $[a, b]$  上可微, 且



$$F'(x) = \int_{y_2(x)}^{y_1(x)} f'_x(x, y) dy + f(x, y_2(x)) y_2'(x) - f(x, y_1(x)) y_1'(x).$$

## 疑 难 解 析

1. 用累次积分来计算二重积分应注意什么问题? 怎样解决这些问题?

答 解题的关键是画出积分区域的草图, 确定是  $x$ -型区域还是  $y$ -型区域.

(1) 若积分区域既是  $x$ -型区域又是  $y$ -型区域, 则两种积分顺序都可以. 但一般选择里层积分限简单的或积分区域分块少的一种, 以减少计算工作量.

(2) 被积函数含有绝对值符号、最值符号或“ $[\ ]$ ”符号时, 要将积分区域适当分块, 以去掉这些符号, 直接进行累次积分.

(3) 被积函数是分片函数时, 要分片求解.

(4) 有些累次积分要化为重积分来求解.

(5) 若被积函数是抽象函数, 要依函数的特点来处理积分.

2. 怎样选择是用直角坐标系还是用极坐标系计算二重积分?

答 主要从被积函数与积分区域来考虑.

(1) 当积分区域为圆域、环形域、扇形域及极坐标曲线包围区域时, 可选择极坐标系.

当积分区域为多边形或直线与一般曲线围成图形时, 可选择直角坐标系.

有些图形分块后可能要用不同的坐标系.

(2) 当被积函数形如  $f(x^2 + y^2)$  或  $f(y/x)$  时, 可选择极坐标系.

(3) 当积分区域为椭圆或被积函数形如  $f\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$  时, 可选

择广义极坐标系,  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ . 此时,  $|J| = rab$ .

## 方法、技巧与典型例题分析

除疑难解析中所讲的问题外, 我们还知道累次积分可看做两次定积分, 因此, 定积分中的方法和技巧在二重积分中仍可使用. 但是被积函数的奇偶性与积分区域的对称性表现得可能比定积分复杂些. 读者应很好地加以辨析, 应用得当可以简化积分计算.

### 一、二重积分的计算

例 1 计算下列二重积分:

(1)  $\iint_D x^2 y dx dy$ ,  $D$  由  $x = 0, y = 1$  与  $x = \sqrt{y}$  所围成;

(2)  $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$ ,  $D$  由  $xy = 1, y = x$  与  $x = 2$  所围成;

(3)  $\iint_D (x + y)^2 dx dy$ ,  $D$  由  $|x| + |y| = 1$  所围成;

(4)  $\iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy$ ,  $D$  由  $x = 0, y = x$  与  $y = 1$  所围成.

解 先画草图, 用不等式组确定区域(包括确定积分顺序); 然后配置积分限, 逐层积分.

(1) 如图 13.2 所示,  $D$  表示为:  $x^2 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1$ , 故

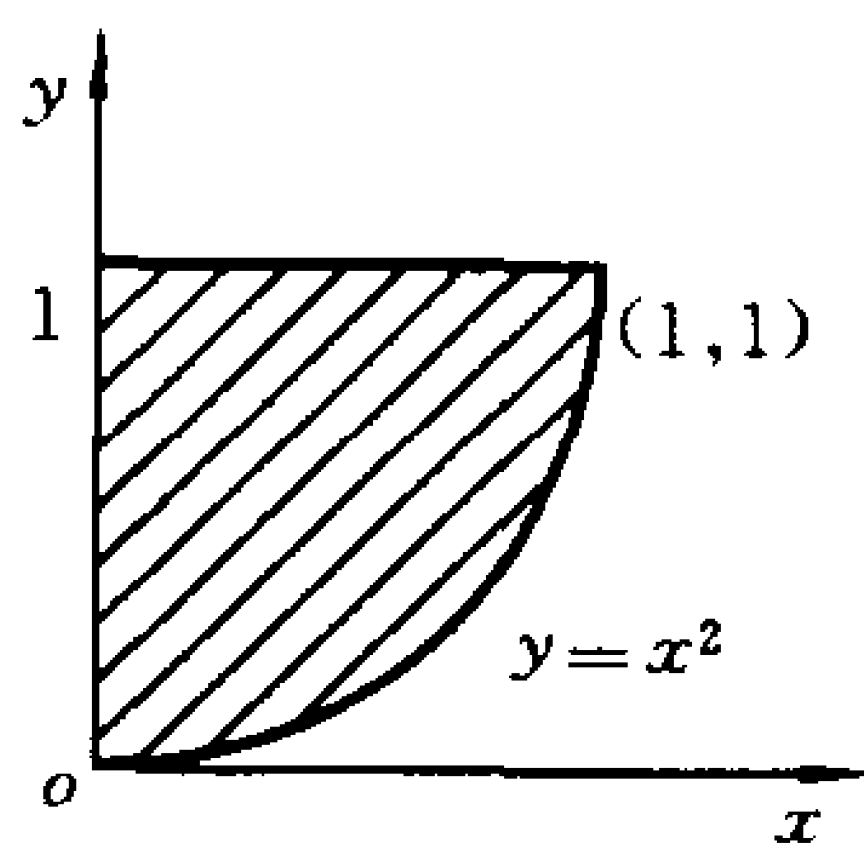


图 13.2

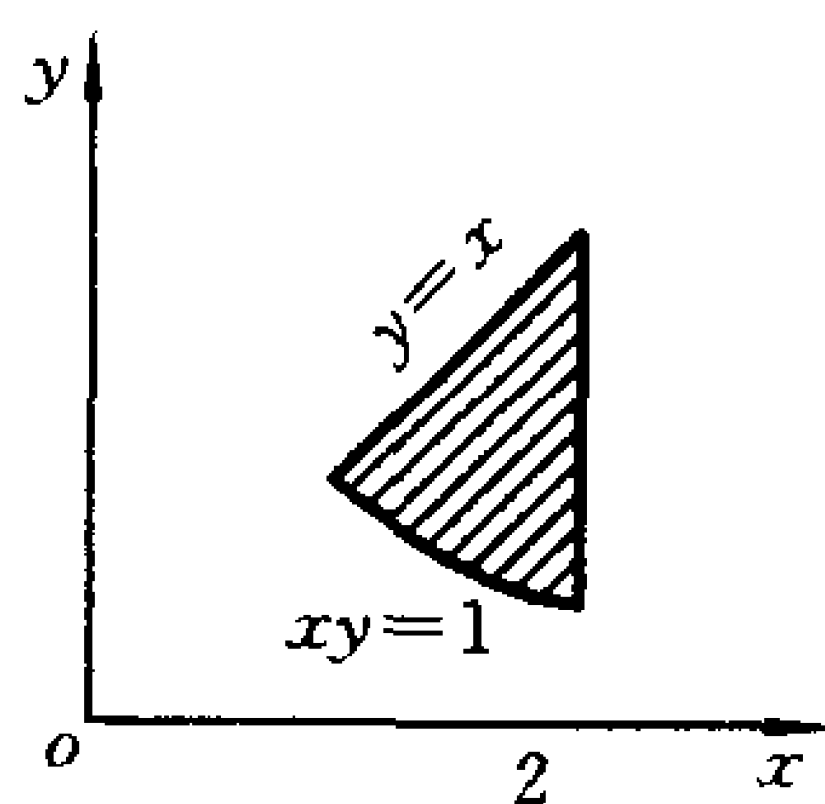


图 13.3

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 x^2 y dy = \int_0^1 x^2 \frac{1-x^4}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{7} x^7 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{21}.$$

(2) 如图 13.3 所示,  $D$  表示为:  $1/x \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2$ , 故

$$I = \int_1^2 dx \int_{1/x}^x \frac{dy}{x^2 y^2} = \int_1^2 x^2 \left( x - \frac{1}{x} \right) dx = \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{9}{4}.$$

(3) 如图 13.4 所示,  $D_1$  表示为:  $0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1-x$ ;  $D_2$  表示为:  $-1 \leq x \leq 0, -1-x \leq y \leq 1+x$ . 故

$$I = \iint_{D_1} (x+y)^2 dx dy + \iint_{D_2} (x+y)^2 dx dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} (x+y)^2 dx + \int_{-1}^0 dx \int_{-1-x}^{1+x} (x+y)^2 dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 [1 - (2x-1)^3] dx + \frac{1}{3} \int_{-1}^0 [(2x+1)^3 + 1] dx$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

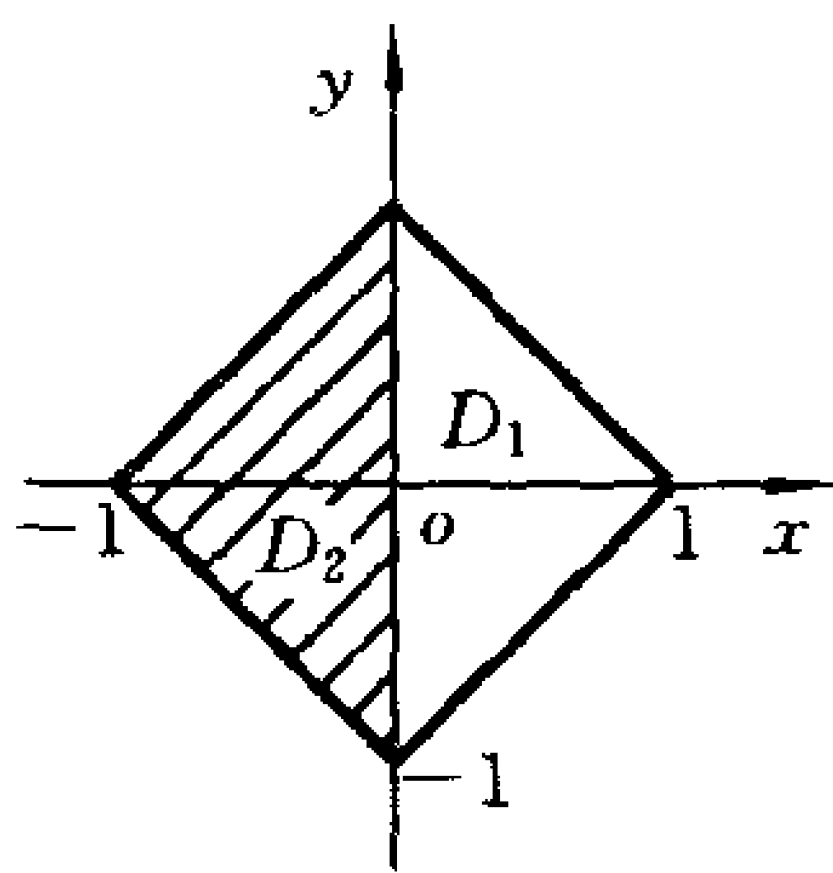


图 13.4

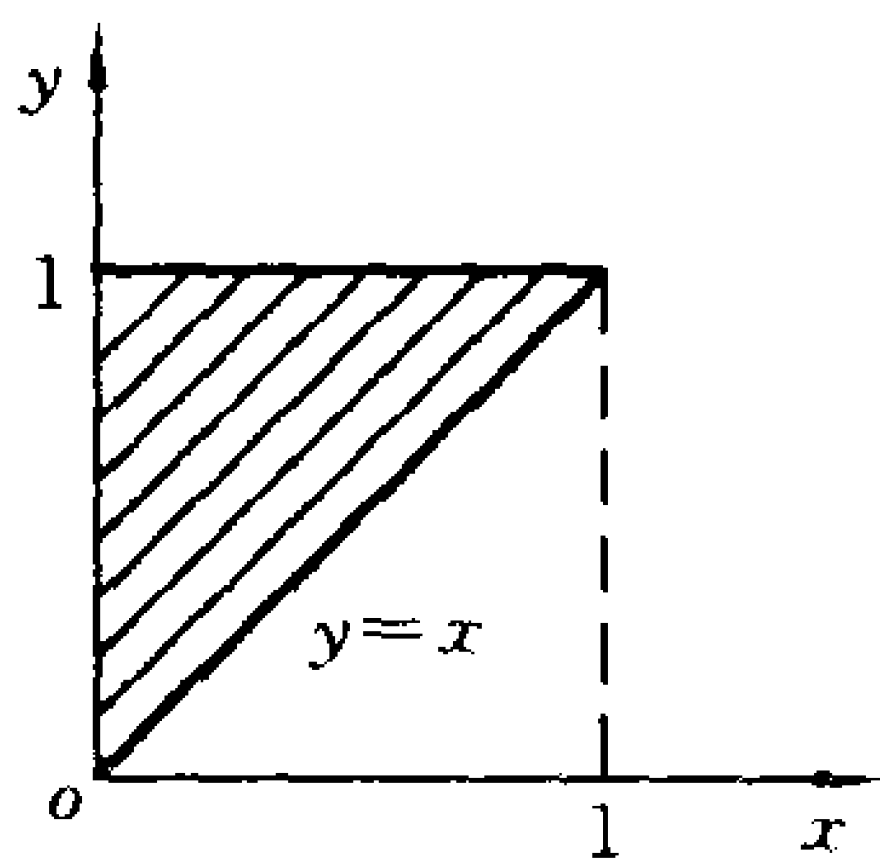


图 13.5

(4) 如图 13.5 所示,  $D$  表示为:  $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y$ , 故

$$I = \int_0^1 e^{-y^2} dy \int_0^y x^2 dx = \int_0^1 \frac{y^3}{3} e^{-y^2} dy$$

$$= -\frac{1}{6} \left( y^2 e^{-y^2} - 2 \int_0^1 y e^{-y^2} dy \right) = \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{2}{e} \right).$$

本题若先对  $y$  积分, 则  $\int e^{-y^2} dy$  不能用有限形式积出. 积分中还使

用了分部积分法.

**例 2** 改变下列积分中累次积分的顺序:

$$(1) \int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy; \quad (2) \int_0^2 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy;$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{(3-x)/2} f(x, y) dy;$$

$$(4) \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy.$$

**解** 先依据原积分限画出积分区域的草图, 然后按新次序写出区域的不等式组表示(包括区域分块), 配置积分限.

(1) 如图 13.6 所示, 积分区域分为  $D_1$  和  $D_2$ ,  $D_1$  表示为:  $0 \leq y \leq 2, y/2 \leq x \leq y$ ;  $D_2$  表示为:  $2 \leq y \leq 4, y/2 \leq x \leq 2$ . 故

$$I = \int_0^2 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x, y) dx.$$

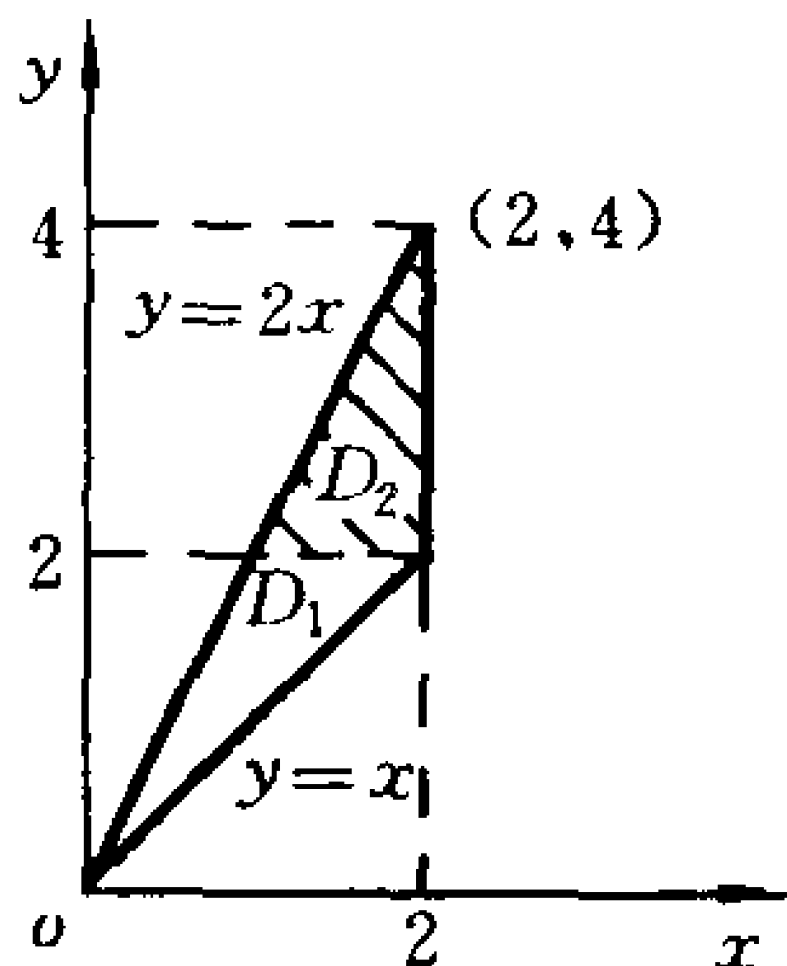


图 13.6

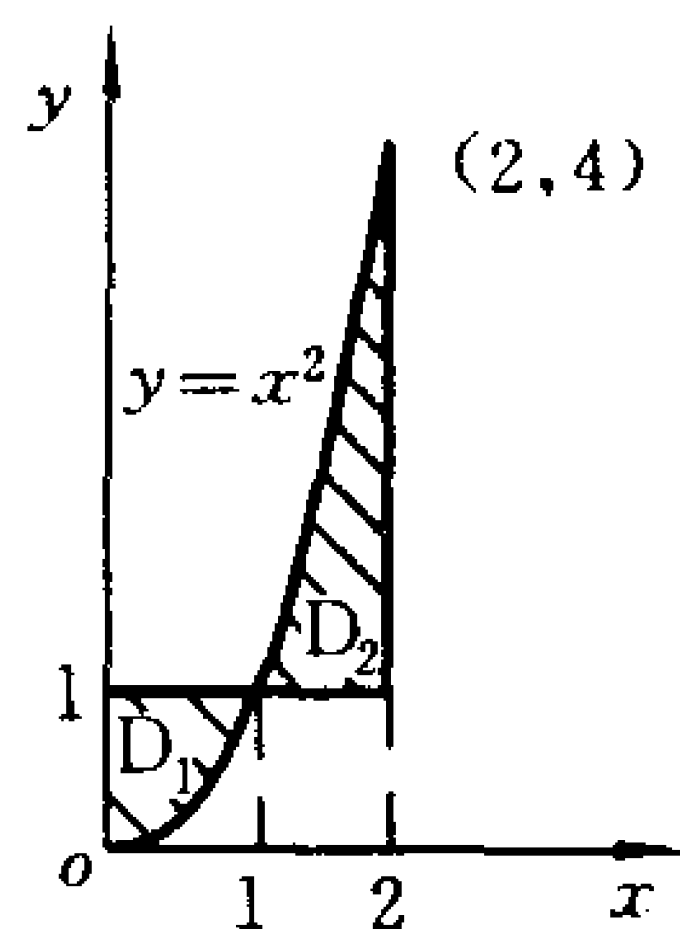


图 13.7

(2) 如图 13.7 所示, 积分区域分为  $D_1$  和  $D_2$ ,  $D_1$  表示为:  $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{y}$ ;  $D_2$  表示为:  $1 \leq y \leq 4, \sqrt{y} \leq x \leq 2$ . 故

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_1^{x^2} f(x, y) dy \\ &= \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y) dx. \end{aligned}$$

(3) 如图 13.8 所示,  $D$  表示为:  $0 \leq y \leq 1, \sqrt{y} \leq x \leq 3-2y$ , 故

$$I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx.$$

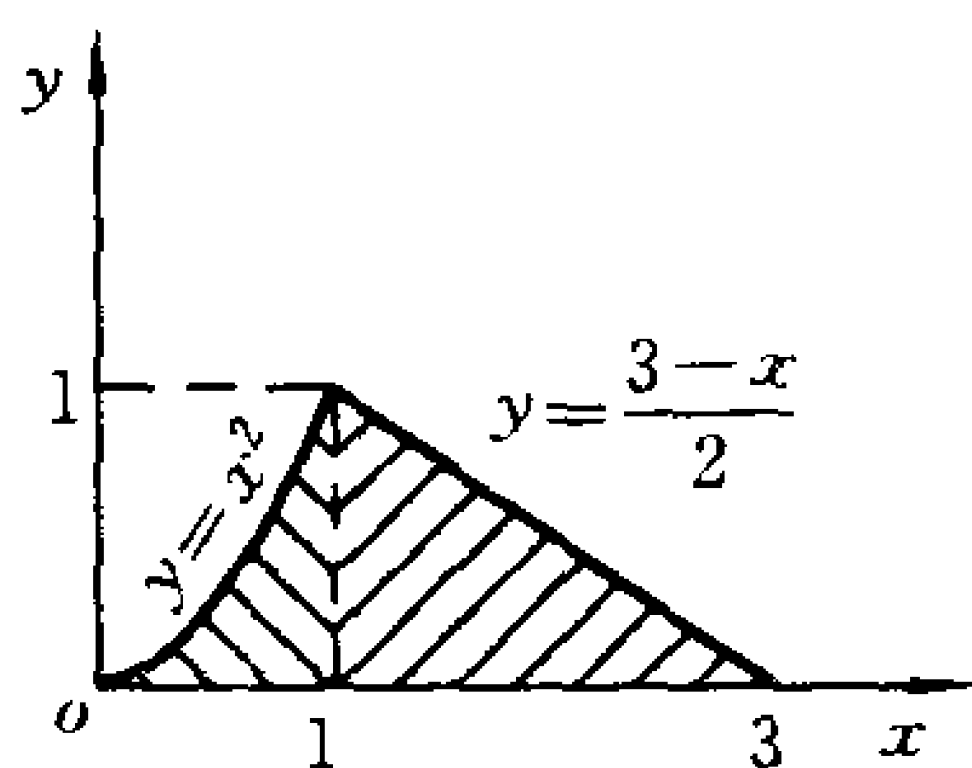


图 13.8

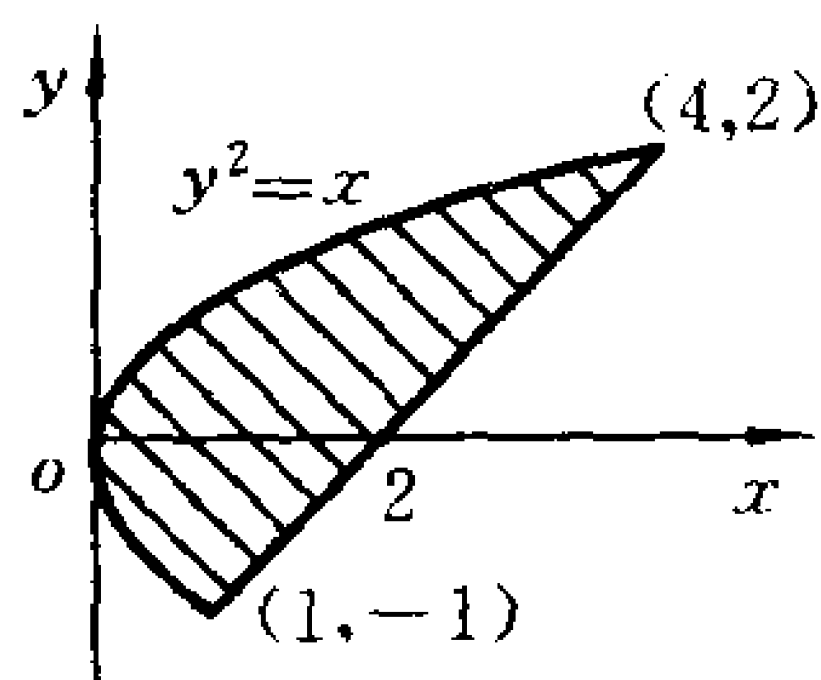


图 13.9

(4) 如图 13.9 所示,  $D$  表示为:  $-1 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq y+2$ , 故

$$I = \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} f(x, y) dx.$$

**例 3** 计算下列积分:

$$(1) \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy;$$

$$(2) \iint_D \sin x \sin y \cdot \max(xy) dx dy, D: 0 \leq x, y \leq \pi;$$

$$(3) \iint_D |xy| dx dy, D: x^2 + y^2 \leq a^2.$$

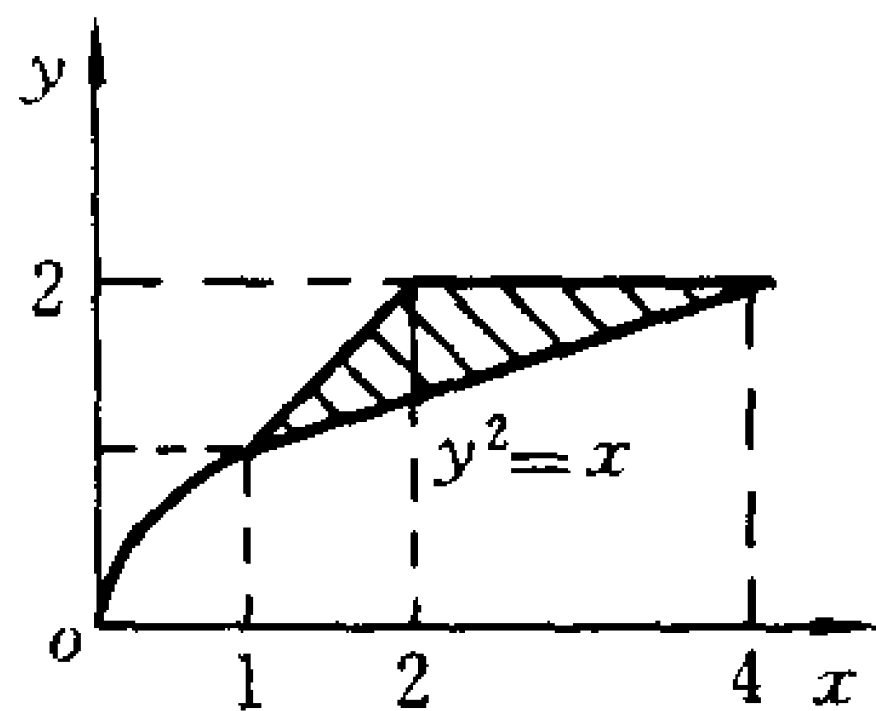


图 13.10

**解** (1)  $D$  如图 13.10 所示, 显然先对  $y$  求积较困难, 需改变积分次序. 因此

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 dy \int_y^{y^2} \sin \frac{\pi x}{2y} dx = -\frac{2}{\pi} \int_1^2 y \cos \frac{\pi y}{2} dy \\ &= -\frac{4}{\pi^2} \left( y \sin \frac{\pi y}{2} - \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi y}{2} \right) \Big|_1^2 \\ &= 4(2 + \pi)/\pi^3. \end{aligned}$$

(2) 被积函数含  $\max(x, y)$ , 需利用直线  $y=x$  将  $D$  分为  $D_1$  和  $D_2$ .  $D_1$  表示为:  $0 \leq x \leq \pi, x \leq y \leq \pi$ ;  $D_2$  表示为:  $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq x$ . 故

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi dx \int_x^\pi \sin x \sin y \cdot y dy + \int_0^\pi dx \int_0^x \sin x \sin y \cdot x dy \\ &= \int_0^\pi \sin x (-\cos y \cdot y + \sin y) \Big|_x^\pi dx + \int_0^\pi x \sin x (-\cos y) \Big|_0^x dx \end{aligned}$$

$$= 5\pi/2.$$

(3) 用直线  $x=0$  与  $y=0$  将  $D$  分为四块, 得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy dy - \int_0^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^0 xy dy \\ &\quad - \int_{-a}^0 dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy dy + \int_{-a}^0 dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^0 xy dy \\ &= \frac{a^4}{8} + \frac{a^4}{8} + \frac{a^4}{8} + \frac{a^4}{8} = \frac{a^4}{2}. \end{aligned}$$

对含绝对值符号的积分, 要根据函数的特点, 将区域分块, 去掉绝对值符号.

**例 4** 计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D (x^2 - 2x + 3y + 2) dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq a^2;$$

$$(2) \iint_D (x + y) dx dy, \quad D \text{ 由 } y = x^2, y = 4x^2, y = 1 \text{ 所围成}.$$

**解** 考虑积分区域的对称性, 化简积分.

(1) 区域  $D$  关于  $x$  轴,  $y$  轴与原点对称, 故

$$\begin{aligned} \iint_D -2x dx dy &= 0, \quad \iint_D 3y dx dy = 0, \quad \iint_D x^2 dx dy = \iint_D y^2 dx dy, \\ I &= \iint_D x^2 dx dy + 2 \iint_D dx dy. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \iint_D x^2 dx dy &= \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2 \cdot r dr \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{\pi}{4} a^4, \end{aligned}$$

$$\iint_D dx dy = \pi a^2.$$

从而

$$I = \pi a^4/4 + 2\pi a^2.$$

$$(2) \text{ 积分区域关于 } y \text{ 轴对称, 故 } \iint_D x dx dy = 0.$$

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D y dx dy = 2 \int_0^1 y dy \int_{\sqrt{y}/2}^{\sqrt{y}} dx \\
 &= 2 \int_0^1 y \left( \sqrt{y} - \frac{\sqrt{y}}{2} \right) dy = 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{y}}{2} y dy = \frac{2}{5}.
 \end{aligned}$$

**例 5** 计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2-y^2}} dx dy, D: x^2 + y^2 \leq a^2;$$

$$(2) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, D: \sqrt{2x-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}.$$

**解** 本例用直角坐标系计算是困难的,要变换为极坐标系来计算,并注意区域的封闭性.

(1)  $D$  表示为:  $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a$ , 故

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} \cdot r dr \quad (\text{令 } r^2 = t) \\
 &= \pi \int_0^{a^2} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt = \pi \int_0^{a^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \pi \int_0^{a^2} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
 &= \pi \arcsin t \Big|_0^{a^2} + \pi \sqrt{1-t^2} \Big|_0^{a^2} \\
 &= \pi(\arcsin a + \sqrt{1-a^2} - 1).
 \end{aligned}$$

(2)  $D$  应添加条件  $0 \leq x \leq 2$ , 则变换后区域可表示为:  $2\cos\theta \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi/2$ , 故

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{2\cos\theta}^2 r^2 \cdot r dr = 4 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^4\theta) d\theta \\
 &= 4 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{5}{4} \pi \quad (\text{瓦里士公式}).
 \end{aligned}$$

**例 6** 计算  $\iint_D (|x-y| + 2) dx dy, D: x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ .

**解** 为了将绝对值符号去掉,用直线  $y=x$  将  $D$  分为  $D_1: y \leq$

$x$  和  $D_2: y > x$ , 再化为极坐标计算. 故

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{D_1} (x - y) dx dy + \iint_{D_2} (y - x) dx dy + \iint_D 2 dx dy \\
 &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^2 (\cos\theta - \sin\theta) dr \\
 &\quad + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^2 (\sin\theta - \cos\theta) dr + 2 \iint_D r dr d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/4} (\cos\theta - \sin\theta) d\theta \\
 &\quad + \frac{1}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin\theta - \cos\theta) d\theta + 2 \cdot \frac{\pi}{4} \\
 &= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} (\sqrt{2} - 1).
 \end{aligned}$$

例 7 计算

$$\iint_D dx dy, D: x^2 + y^2 \leq 2(x + y).$$

解  $x^2 + y^2 \leq 2x + 2y$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2.$$

(1) 如图 13.11 所示,  $D$  表示为:  $0 \leq r \leq 2(\cos\theta + \sin\theta)$ ,  $-\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$ .

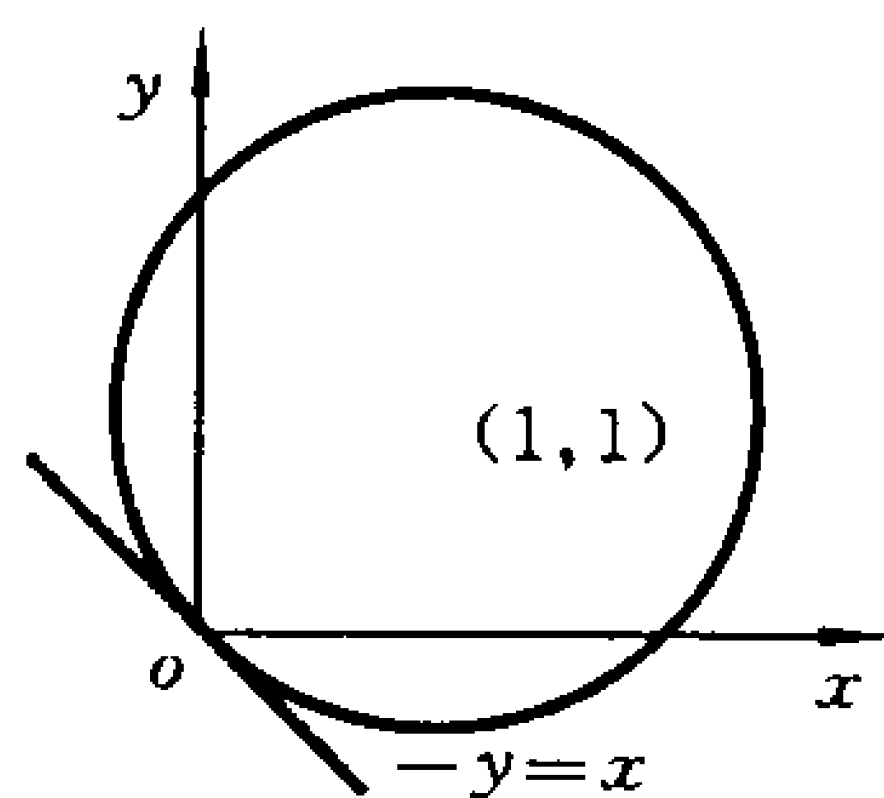


图 13.11

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} d\theta \int_0^{2(\cos\theta + \sin\theta)} r(\cos\theta + \sin\theta) r dr \\
 &= \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} (\cos\theta + \sin\theta)^4 d\theta \\
 &= \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \left( \frac{3}{2} + 2\sin 2\theta - \frac{1}{2} \cos 4\theta \right) d\theta \\
 &= \frac{8}{3} \left[ \frac{3}{2} \theta - \cos 2\theta - \frac{1}{8} \sin 4\theta \right] \Big|_{-\pi/2}^{3\pi/2} = 4\pi.
 \end{aligned}$$

(2) 作坐标代换  $x = 1 + r\cos\theta$ ,  $y = 1 + r\sin\theta$ , 则  $D$  表示为:  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq r \leq \sqrt{2}$ , 故



$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2 + r\cos\theta + r\sin\theta) r dr \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[ 2 + \frac{8}{3}\cos\theta + \frac{8}{3}\sin\theta \right] d\theta = 4\pi.
 \end{aligned}$$

**注意** 许多题是可以一题多解的,为了节省篇幅,本书每题只给出一种解法.

下面给出一个非连续函数的积分. 求非连续函数的积分,要依连续性划分积分区域,分析其间断线与曲线交点.

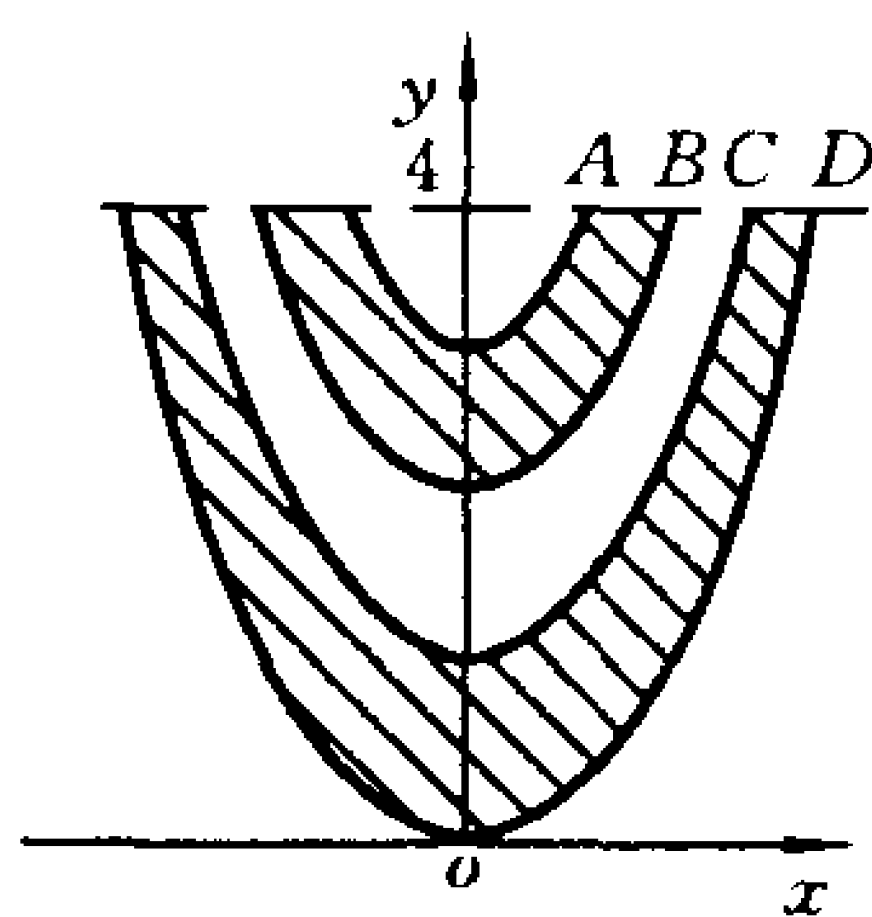


图 13.12

**例 8** 计算  $\iint_D \sqrt{[y-x^2]} dx dy, x^2 \leq y \leq 4.$

**解** 如图 13.12 所示,按连续性划分积分区域为:

当  $x^2 \leq y \leq x^2 + 1$  时,  $[y-x^2]=0$ ;

当  $x^2 + 1 \leq y \leq x^2 + 2$  时,  $[y-x^2]=1$ ;

当  $x^2 + 2 \leq y \leq x^2 + 3$  时,  $[y-x^2]=2$ ;

当  $x^2 + 3 \leq y \leq x^2 + 4$  时,  $[y-x^2]=3$ .

抛物线与直线  $y=4$  的交点为  $A(1,4), B(\sqrt{2},4), C(\sqrt{3},4), D(2,4)$ ,积分区域关于  $y$  轴对称. 于是

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \left[ \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2+1}^{x^2+2} dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_{x^2+1}^4 dy \right] \\
 &\quad + 2\sqrt{2} \left[ \int_0^1 dx \int_{x^2+2}^{x^2+3} dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2+2}^4 dy \right] \\
 &\quad + 2\sqrt{3} \int_0^1 dx \int_{x^2+3}^4 dy \\
 &= 2 \left[ \sqrt{2} + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} (3-x^2) dx \right] \\
 &\quad + 2\sqrt{2} \left[ 1 + \int_1^{\sqrt{2}} (2-x^2) dx \right] + 2\sqrt{3} \int_0^1 (1-x^2) dx \\
 &= \frac{4}{3} (4 + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}).
 \end{aligned}$$

例 9 计算下列积分:

(1)  $\iint_D \frac{x^2}{y} \sin(xy) dx dy$ ,  $D$  由  $\frac{\pi y}{2} \leq x \leq \pi y, x \leq y^2 \leq 2x, y > 0, x > 0$  所围成;

(2)  $\iint_D \frac{(x+y)\ln(1+x/y)}{\sqrt{1-x-y}} dx dy$ ,  $D$  由  $x=0, y=0, x+y=1$  所围成;

(3)  $\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy$ ,  $D$  由  $x=0, y=0, x+y=1$  所围成.

解 本例要依据函数特点, 进行适当的变量代换后再计算.

(1) 作代换  $u = \frac{x^2}{y}, v = \frac{y^2}{x}$ , 则  $J = \frac{1}{3}$ ,  $D$  化为  $D': \frac{\pi}{2} \leq \frac{x^2}{y} \leq \pi, 1 \leq \frac{y^2}{x} \leq 2, x > 0, y > 0$ . 于是

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D'} u \sin(uv) \cdot \frac{1}{3} du dv = \frac{1}{3} \int_{\pi/2}^{\pi} du \int_1^2 u \sin(uv) dv \\ &= \frac{1}{3} \int_{\pi/2}^{\pi} [-\cos(uv)] \Big|_1^2 du = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(2) 作代换  $x+y=u, \frac{y}{x}=v$ , 则  $x = \frac{u}{1+v}, y = \frac{uv}{1+v}, |J| = \frac{|u|}{(1+v)^2}$ ,  $D$  代为  $D': 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq +\infty$ , 于是

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D'} \frac{u \sin(1+v)}{\sqrt{1-u}} \cdot \frac{|u|}{(1+v)^2} du dv \\ &= \int_0^{+\infty} dv \int_0^1 \frac{u^2 \ln(1+v)}{(1+v)^2 \sqrt{1-u}} du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+v)}{(1+v)^2} dv \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u}} du. \end{aligned}$$

其中

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+v)}{(1+v)^2} dv = \left[ -\frac{\ln(1+v)}{1+v} \right] \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{dv}{(1+v)^2}$$

$$= 0 - \left[ \frac{1}{1+v} \right] \Big|_0^{+\infty} = 1,$$

$$\int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u}} du \stackrel{1-u=t}{=} \int_1^0 \frac{(1-t)^2}{\sqrt{t}} dt = \frac{16}{15},$$

故 
$$I = 1 \cdot \frac{16}{15} = \frac{16}{15}.$$

(3) 作代换  $u=y-x, v=y+x$ , 则  $x=\frac{v-u}{2}, y=\frac{v+u}{2}, |J|=1/2, D$  化为  $D'$ ,  $D'$  由  $v=1, u=v, u=-v$  所围成.

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D'} e^{u/v} \cdot \frac{1}{2} du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 dv \int_{-v}^v e^{u/v} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (e - e^{-1}) v dv = \frac{1}{4} (e - e^{-1}). \end{aligned}$$

## 二、二重积分证明题

二重积分证明题的求证,常利用对积分区域的分块和区域的对称性或对被积函数的变量改变记号、利用被积函数的奇偶性以及改变积分顺序等方法进行.在证题前,对命题要有深刻的思考.

**例 10** 设  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续,且  $\int_0^1 f(x) dx = A$ , 证明:

$$\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy = \frac{1}{2} A^2.$$

**证** 用改变积分顺序与改变记号的方法,即

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy &\stackrel{\text{改变顺序}}{=} \int_0^1 dy \int_0^y f(x)f(y) dx \\ &\stackrel{\text{改变记号}}{=} \int_0^1 dx \int_0^x f(x)f(y) dy, \end{aligned}$$

故 
$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy + \int_0^1 dx \int_0^x f(x)f(y) dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 f(x)f(y) dy = \left[ \int_0^1 f(x) dx \right]^2 = A^2, \end{aligned}$$

于是 
$$I = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy = \frac{1}{2} A^2.$$

例 11 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 试用二重积分证明:

$$\left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx.$$

证 因为

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy \\ &= (b-a) \left[ \int_a^b f^2(x) dx + \int_a^b f^2(y) dy \right] - 2 \left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2, \end{aligned}$$

所以 
$$\left( \int_a^b f(x) dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx.$$

当  $f(x) = c$  (常数) 时等号成立.

例 12 若  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 证明:

$$\left[ \int_a^b f(x)g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx.$$

证 因为  $[f(x)g(x) - f(y)g(y)]^2 \geq 0$ , 所以在方形域  $D: a \leq x \leq b, a \leq y \leq b$  上, 有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \iint_D [f(x)g(x) - f(y)g(y)]^2 dx dy \\ &= \int_a^b \int_a^b f^2(x)g^2(x) dx dy + \int_a^b \int_a^b f^2(y)g^2(y) dx dy \\ &\quad - 2 \int_a^b \int_a^b f(x)g(x)f(y)g(y) dx dy \\ &= 2 \int_a^b \int_a^b f^2(x)f^2(y) dx dy - 2 \left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2, \end{aligned}$$

故 
$$\left[ \int_a^b f(x)g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b f^2(y) dy.$$

当  $f(x) = \sqrt{h(x)}, g(x) = \frac{1}{\sqrt{h(x)}}$  时, 由上式得

$$\int_a^b h(x) dx \int_a^b \frac{1}{h(x)} dx \geq (b-a)^2 \quad (h(x) > 0).$$

例 13 证明:  $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1$ , 有

$$\int_a^b \int_a^x (x-y)^{n-2} f(y) dy = \frac{1}{n-1} \int_a^b (b-y)^{n-1} f(y) dy.$$

$$\begin{aligned} \text{证 } I &= \int_a^b dy \int_y^b (x-y)^{n-2} f(y) dx \\ &\stackrel{\text{改变顺序}}{=} \int_a^b f(y) \left[ \frac{1}{n-1} (x-y)^{n-1} \right] \Big|_y^b dy \\ &= \frac{1}{n-1} \int_a^b (b-y)^{n-1} f(y) dy. \end{aligned}$$

例 14 设  $p(x)$  是  $[a, b]$  上的可积函数, 而  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $[a, b]$  上有相同的单调性, 证明:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx \leq \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{证 设 } I &= \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx \\ &\quad - \int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } I &= \int_a^b p(y) dy \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx \\ &\quad - \int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(y) g(y) dy \\ &= \int_a^b \int_a^b p(x) p(y) f(x) [g(x) - g(y)] dx dy. \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

类似地, 有

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(y) f(y) g(y) dy \\ &\quad - \int_a^b p(y) f(y) dy \int_a^b p(x) g(x) dx \\ &= \int_a^b \int_a^b p(x) p(y) f(y) [g(y) - g(x)] dx dy. \quad \textcircled{2} \end{aligned}$$

①+②, 得

$$I = \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b p(x) p(y) [f(x) - f(y)] [g(x) - g(y)] dx dy.$$

因为  $p(x) > 0$ ,  $f(x), g(y)$  单调, 故  $I > 0$ , 即命题成立.

例 15 证明:  $\iint_D f(xy) dx dy = \ln 2 \int_1^2 f(u) du$ .  $D$  由  $xy=1, xy=2, y=x, y=4x$  所围成.

证 因为函数和积分区域的特点, 设  $u=xy, v=y/x$ , 则  $D$  化为  $D': 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4, |J|=1/2v$ .

$$I = \iint_{D'} f(u) |J| du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 f(u) du \int_1^4 \frac{1}{v} dv = \ln 2 \int_1^2 f(u) du.$$

### 三、其它二重积分问题

例 16 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{x/2} dt \int_{x/2}^t \frac{e^{-(t-u)^2}}{1 - e^{-x^2/4}} du$ .

$$\begin{aligned} \text{解 } I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{- \int_0^{x/2} dt \int_t^{x/2} e^{-(t-u)^2} du}{1 - e^{-x^2/4}} \\ &\stackrel{\text{改变顺序}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{- \int_0^{x/2} du \int_0^u e^{-(t-u)^2} dt}{1 - e^{-x^2/4}} \\ &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left( - \frac{1}{2} \int_0^{x/2} e^{-(t-x/2)^2} dt \right) / \left( \frac{1}{2} x e^{-x^2/4} \right) \\ &\stackrel{y=t-x/2}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left( - \frac{1}{2} \int_{-x/2}^0 e^{-y^2} dy \right) / \left( \frac{1}{2} x e^{-x^2/4} \right) \\ &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left[ - \frac{1}{4} e^{-x^2/4} \right] / \left[ e^{-x^2/4} \left( \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} \right) \right] = - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

例 17 设  $I(r) = \int_{-r}^r e^{-u^2} du$ , 求  $I(r)$ .

解 不能直接计算. 设  $D: [-r, r; -r, r]$ , 则

$$I^2(r) = [I(r)]^2 = \int_{-r}^r e^{-x^2} \int_{-r}^r e^{-y^2} dy = \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

分别作  $D$  的外切圆域  $D_2$  与内接圆域  $D_1$ , 因为  $D_1 \subset D \subset D_2, e^{-(x^2+y^2)} > 0$ , 故

$$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq I^2(r) \leq \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

设  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ , 则  $|J| = \rho$ , 于是

$$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r e^{-\rho^2} \rho d\rho = \pi(1 - e^{-r^2}),$$

$$\iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}r} e^{-\rho^2} \rho d\rho = \pi(1 - e^{-2r^2}).$$

由夹逼性知,  $\lim_{r \rightarrow \infty} I^2(r) = \pi, \lim_{r \rightarrow \infty} I(r) = \sqrt{\pi}$ , 即

$$\int_{-r}^r e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} \quad \text{或} \quad \int_0^r e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

**例 18** 求下列极限:

$$(1) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}; \quad (2) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+\alpha^2} dx;$$

$$(3) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos \alpha x dx.$$

**解** (1) 因为  $\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}, \alpha, 1+\alpha$  都是连续函数, 故  $F(\alpha) = \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$  也是  $\alpha \in \mathbf{R}$  的连续函数, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} F(\alpha) = F(0) \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(2)  $F(\alpha) = \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+\alpha^2} dx$  也是  $\alpha \in \mathbf{R}$  的连续函数, 故

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+\alpha^2} dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} F(\alpha) = F(0) = 2 \int_0^1 x dx = 1.$$

(3)  $F(\alpha) = \int_0^2 x^2 \cos \alpha x dx$  也是  $\alpha \in \mathbf{R}$  的连续函数, 故

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos \alpha x dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} F(\alpha) = F(0) = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}.$$

**例 19** 求下列函数  $F(\alpha)$  的导数:

$$(1) \int_{\alpha}^{\alpha^2} e^{-ay^2} dy;$$

$$(2) \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} e^{\alpha \sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(3) \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} dx;$$

$$(4) \int_0^{\alpha} f(x+\alpha, x-\alpha) dx.$$

解 可直接套用公式求解.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad F'(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha}(\alpha^2)e^{-\alpha y^2} \Big|_{y=\alpha^2} - \frac{d}{d\alpha}(\alpha)e^{-\alpha y^2} \Big|_{y=\alpha} \\
 &\quad + \int_{\alpha}^{\alpha^2} (e^{-\alpha y^2})'_\alpha dy \\
 &= 2\alpha e^{-\alpha^5} - e^{-\alpha^3} - \int_{\alpha}^{\alpha^2} e^{-\alpha y^2} y^2 dy.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad F'(\alpha) &= -\sin\alpha \cdot e^{\alpha|\sin\alpha|} - \cos\alpha \cdot e^{\alpha|\cos\alpha|} \\
 &\quad + \int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} \sqrt{1-x^2} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}} dx.
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad F'(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \ln(1+\alpha^2) + \int_0^{\alpha} \frac{1}{1+\alpha x} dx = \frac{2}{\alpha} \ln(1+\alpha^2).$$

$$(4) \quad \text{设 } u = x + \alpha, v = x - \alpha, \text{ 则 } F(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(u, v) dx.$$

$$\begin{aligned}
 F'(\alpha) &= f(2\alpha, 0) + \int_0^{\alpha} [f'_u(u, v) - f'_v(u, v)] dx \\
 &= f(2\alpha, 0) + 2 \int_0^{\alpha} f'_u(u, v) \\
 &\quad - \int_0^{\alpha} [f'_u(u, v) + f'_v(u, v)] dx \\
 &= f(2\alpha, 0) + 2 \int_0^{\alpha} f'_u(u, v) dx - \int_0^{\alpha} \frac{d}{dx} f(u, v) dx \\
 &= f(2\alpha, 0) + 2 \int_0^{\alpha} f'_u(u, v) dx - f(x + \alpha, x - \alpha) \Big|_0^{\alpha} \\
 &= f(2\alpha, 0) + 2 \int_0^{\alpha} f'_u(u, v) dx - f(2\alpha, 0) + f(\alpha, -\alpha) \\
 &= f(\alpha, -\alpha) + 2 \int_0^{\alpha} f'_u(u, v) dx.
 \end{aligned}$$

例 20 求下列函数  $F(x)$  的二阶导数:

$$(1) \quad \int_0^x (x+y)f(y)dy, \quad f(x) \text{ 可微};$$

$$(2) \quad \int_a^b f(y)|x-y|dy, \quad a < b, \quad f(y) \text{ 可微}.$$

解 按公式求导, 视  $F''(x) = [F'(x)]'$ .



$$(1) F'(x) = 2xf(x) + \int_0^x f(y)dy,$$

$$F''(x) = 2f(x) + 2xf'(x) + f(x) = 3f(x) + 2xf'(x).$$

(2) 当  $x \in (a, b)$  时, 有

$$F(x) = \int_a^x (x-y)f(y)dy + \int_x^b (y-x)f(y)dy,$$

$$\begin{aligned} \text{故 } F'(x) &= \frac{d}{dx} \int_a^x (x-y)f(y)dy - \frac{d}{dx} \int_b^x (y-x)f(y)dy \\ &= \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} [(x-y)f(y)]dy - \int_b^x \frac{\partial}{\partial x} [(y-x)f(y)]dy \\ &= \int_a^x f(y)dy + \int_b^x f(y)dy, \\ F''(x) &= f(x) + f(x) = 2f(x). \end{aligned}$$

当  $x \notin (a, b), x \leq a$  时, 有  $F(x) = \int_a^b (y-x)f(y)dy$ , 故

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} [(y-x)f(y)]dy = - \int_a^b f(y)dy,$$

$$F''(x) = 0.$$

类似地, 当  $x > b$  时,  $F''(x) = 0$ . 因此

$$F''(x) = \begin{cases} 2f(x), & x \in (a, b), \\ 0, & x \notin (a, b). \end{cases}$$

**例 21** 利用对参数的微分法计算下列积分:

$$(1) \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx;$$

$$(2) \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx.$$

**解** (1) 当  $|a| = |b|$  时, 有

$$\int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx = \frac{\pi}{2} \ln a^2 = \pi \ln \frac{|a| + |b|}{2}.$$

当  $|a| \neq |b|$  时, 有

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln \left[ \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{(a^2 - b^2) \cos 2x}{2} \right] dx \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln \frac{a^2 + b^2}{2} + \int_0^{\pi/2} \ln(1 - c \cos 2x) dx,$$

其中  $c = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ , 故  $0 < |c| < 1$ . 从而

$$\text{原式} = \frac{\pi}{2} \ln \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln(1 - c \cos u) du.$$

设  $I(c) = \int_0^\pi \ln(1 - c \cos u) du$ , 则

$$\begin{aligned} I'(c) &= \int_0^\pi \frac{-\cos u}{1 - c \cos u} du = \frac{1}{c} \int_0^\pi \left[ 1 - \frac{1}{1 - c \cos u} \right] du \\ &= \frac{\pi}{c} - \frac{1}{c} \left[ \frac{2}{\sqrt{1 - c^2}} \arctan \left( \sqrt{\frac{1 + c}{1 - c}} \tan \frac{x}{2} \right) \right] \Big|_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{c} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}} \right), \quad 0 < |c| < 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad I(c) &= \int_0^c \frac{\pi}{v} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \right) dv \\ &= \pi \left[ \ln |v| + \ln \frac{1 + \sqrt{1 - v^2}}{|v|} \right] \Big|_0^c \\ &= \pi [\ln(1 + \sqrt{v^2})] \Big|_0^c = \pi \ln \frac{1 + \sqrt{1 - c^2}}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{得} \quad I\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right) = \pi \ln \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2|ab|}{a^2 + b^2} \right) = \pi \ln \frac{(|a| + |b|)^2}{2(a^2 + b^2)}.$$

从而  $\int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx$

$$= \frac{\pi}{2} \ln \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{\pi}{2} \ln \frac{(|a| + |b|)^2}{2(a^2 + b^2)} = \pi \ln \frac{|a| + |b|}{2}.$$

可见, 不论  $|a| = |b|$  还是  $|a| \neq |b|$ , 结果都是相同的.

(2) 利用上例结论

$$\int_0^\pi \ln(1 - c \cos x) dx = \pi \ln \frac{1 + \sqrt{1 - c^2}}{2},$$

$$\text{有} \quad \text{原式} = \pi \ln(1 + a^2) + \int_0^\pi \ln \left( 1 - \frac{2a}{1 + a^2} \cos x \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \ln(1+a^2) + \pi \ln \frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 - \left( \frac{2a}{1+a^2} \right)^2} \right] \\
&= \pi \left[ \ln(1+a^2) + \ln \frac{1+a^2+|1-a^2|}{2(1+a^2)} \right] \\
&= \begin{cases} 0, & \text{当 } |a| \leq 1, \\ \pi \ln a^2, & \text{当 } |a| > 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

**例 22** 应用积分号下微分法或积分法计算下列积分:

(1)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x} dx \quad (|a| < 1);$

(2)  $\int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (b > a > 0).$

**解** (1) 设  $I(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x} dx$ , 则

$$\begin{aligned}
I'(a) &= \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+a^2 \tan^2 x} \stackrel{u=\tan x}{=} \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+a^2 u^2)(1+u^2)} \\
&= \frac{1}{a^2-1} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{1}{u^2+1/a^2} - \frac{1}{u^2+1} \right] du \\
&= \frac{1}{a^2-1} \left[ |a| \arctan |a| u - \arctan u \right] \Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a^2-1} (|a| - 1) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+a}, & a \geq 0, \\ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1-a}, & a < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

当  $a=0$  时,  $I(a)=0$ ;

当  $a>0$  时,  $I(a) = \frac{\pi}{2} \int_0^a \frac{dv}{1+v} = \frac{\pi}{2} \ln(1+a)$ ;

当  $a<0$  时,  $I(a) = \frac{\pi}{2} \int_0^a \frac{dv}{1-v} = -\frac{\pi}{2} \ln(1-a)$ .

综上所述, 得

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x} dx = \frac{\pi}{2} (\operatorname{sgn} a) \ln(1+|a|).$$

(2)  $\int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$

$$= \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) dx \int_a^b x^y dy = \int_0^1 dy \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^y dx.$$

当  $x=0$  时,  $\sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^y$  理解为零, 则  $\sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^y$  在域:  $0 \leq x \leq 1, a \leq y \leq b$  上连续, 故可交换积分次序.

作代换  $x=e^{-t}$ , 得

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^y dx &= \int_0^{+\infty} e^{-(y+1)t} \sin t dt \\ &= \frac{1}{1+(1+y)^2} [-(y+1)\sin t - \cos t] e^{-(y+1)t} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1+(1+y)^2}. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \\ &= \int_a^b \frac{dy}{1+(1+y)^2} = \arctan(1+y) \Big|_a^b \\ &= \arctan(1+b) - \arctan(1+a) \\ &= \arctan \frac{b-a}{1+(1+b)(1+a)}. \end{aligned}$$

类似可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx &= \int_a^b \frac{1+y}{1+(1+y)^2} dy \\ &= \frac{1}{2} \ln[1+(1+y^2)] \Big|_a^b = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}. \end{aligned}$$

### 第三节 三重积分

#### 主要内容

1. 设  $f$  是定义在长方体  $V \subset \mathbb{R}^3$  上的函数,  $J$  是一个确定的

数. 若  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall T \in V$ , 只要  $\|T\| < \delta$ , 属于分割  $T$  的所有积分和都有

$$\left| \sum f(\xi_i, \eta_i, \zeta_k) \Delta V_{ijk} - J \right| < \epsilon,$$

则称  $f$  在  $V$  上可积,  $J$  为  $f$  在  $V$  上的三重积分, 记作

$$J = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz, \quad \text{或} \quad \int_V f.$$

## 2. 称函数

$$\hat{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & (x, y, z) \in V, \\ 0, & (x, y, z) \in \hat{V} \setminus V \end{cases}$$

为  $f$  在  $\hat{V}$  上的延拓函数.

3. 若  $f(x, y, z)$  在  $V = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$  上的三重积分  $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$  存在, 且对任何  $x \in [a, b]$ , 二重积分  $I(x) = \iint_D f(x, y, z) dy dz$  存在 ( $D = [c, d] \times [e, f]$ ), 则

$$\int_a^b dx \iint_D f(x, y, z) dy dz$$

$$\begin{aligned} \text{存在, 且 } \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \int_a^b dx \iint_D f(x, y, z) dy dz \\ &= \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

4. 设  $V = \{(x, y, z) \mid z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\}$ ,  $V$  在  $xoy$  平面上的投影区域  $D = \{(x, y) \mid y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\}$  是  $x$ -型区域, 它对于平行  $z$  轴且通过  $D$  内点的直线与  $V$  的边界至多交于两点.

设  $f$  在  $V$  上连续,  $z_1(x, y), z_2(x, y)$  在  $D$  上连续,  $y_1(x), y_2(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则有

$$\begin{aligned}\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \\ &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.\end{aligned}$$

5. 设  $f$  在有界闭区域  $V$  上连续, 则

$$\begin{aligned}I &= \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{V'} f[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)] |J| du dv dw,\end{aligned}$$

其中  $J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ .

$$(1) \text{ 若 } \begin{cases} x = r \cos \theta, & 0 \leq r \leq +\infty, \\ y = r \sin \theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ z = z, & -\infty < z < +\infty, \end{cases} \quad J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = r, \text{ 则}$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$

称为柱坐标下的三重积分.

$$(2) \text{ 若 } \begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi, & 0 \leq r \leq +\infty, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, & 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ z = r \cos \theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases} \quad J = r^2 \sin \varphi, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned}\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{V'} f(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi\end{aligned}$$

称为球坐标下的三重积分.

## 疑难解析

1. 怎样理解三重积分的累次积分公式?

答 主要内容 4 所给出的累次积分公式, 只是一种积分顺序

的体现,实际上,三个自变量可以有六种不同的积分顺序.要根据具体情形(包括积分域的考虑和积分函数的考虑)和个人的习惯来选择.在选择时,要考虑区域少分块,因为分块越多积分次数越多(当平行坐标轴的直线与区域边界交点多于两个时就要分块,所以要选好顺序,避免出现多于两个交点的情形).同时,更要考虑内层积分限函数简化,以便使后面的积分计算较为容易.

三重积分除了化为三次积分外,还可以化为先二重积分后一次积分或者先一次积分后二重积分的形式,这主要由被积函数的因素并结合积分区域来考虑.详见后面的例题.

## 2. 怎样选择三重积分的坐标系?

答 如同二重积分,选择坐标系的出发点是积分区域的形状与被积函数的形式.当积分区域为正方体、长方体及一般的多面体,或一般形式的函数时,通常选择直角坐标系,因此选择直角坐标系的时候最多.当 $V$ 为柱形区域,其投影域适用极坐标表示,或被积函数含投影域坐标的二次式(如 $x^2+y^2, y/x$ )时,一般选择柱坐标系.当 $V$ 为球形区域及其部分,或被积函数含 $x^2+y^2+z^2$ 因式时,一般选择球坐标系.有时还因某些特殊函数或特定区域选择特定的代换.

## 方法、技巧与典型例题分析

计算三重积分,首先要对空间解析几何概念,特别是空间的平面、二次曲面的特点和形状有一个正确的认识.一般要先作出空间立体(积分区域)的草图,确定选择哪种坐标系和什么样的积分顺序;然后再按照确定的坐标系与积分顺序写出积分区域的不等式组表示;再配置积分限,进行逐次积分.逐次积分时,可以运用定积分的所有技巧与方法.

例 1 计算下列三重积分:

(1)  $\iiint_V y \sqrt{1-x^2} dx dy dz$ ,  $V$  由  $y = -\sqrt{1-x^2-z^2}$ ,  $x^2+z^2=1$ ,  $y=1$  所围成;

(2)  $\iiint_V xy^2z^3 dx dy dz$ ,  $V$  由  $z=xy$ ,  $y=x$ ,  $x=1$ ,  $z=0$  所围成;

(3)  $\iiint_V y \cos(x+z) dx dy dz$ ,  $V$  由  $y=\sqrt{x}$ ,  $y=0$ ,  $z=0$ , 及  $x+z=\pi/2$  所围成;

(4)  $\iiint_V xyz dx dy dz$ ,  $V$  由  $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$  所围成.

解 (1) 如图 13.13 所示,  $V$  用直角坐标系可表示为

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ -\sqrt{1-x^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2}, \\ -\sqrt{1-x^2-z^2} \leq y \leq 1, \end{cases}$$

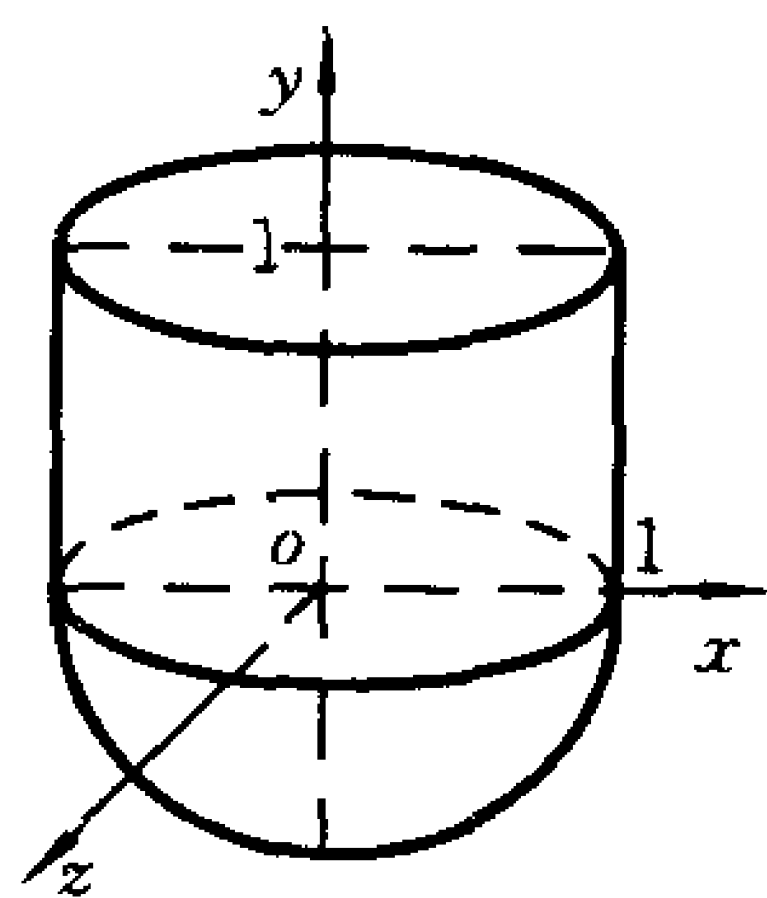


图 13.13

则

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz \int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^1 y \sqrt{1-x^2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} (x^2+z^2) dz \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \left[ x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3} (1-x^2)^{3/2} \right] dx \\ &= \int_{-1}^1 \left( -\frac{2}{3} x^4 + \frac{1}{3} x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \frac{28}{45}. \end{aligned}$$

(2) 如图 13.14 所示,  $V$  表示为  $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq x, \\ 0 \leq z \leq xy, \end{cases}$  则

$$I = \int_0^1 x dx \int_0^x y^2 dy \int_0^{xy} z^3 dz = \frac{1}{4} \int_0^1 x^5 dx \int_0^x y^6 dy$$



$$= \frac{1}{28} \int_0^1 x^{12} dx = \frac{1}{364}.$$

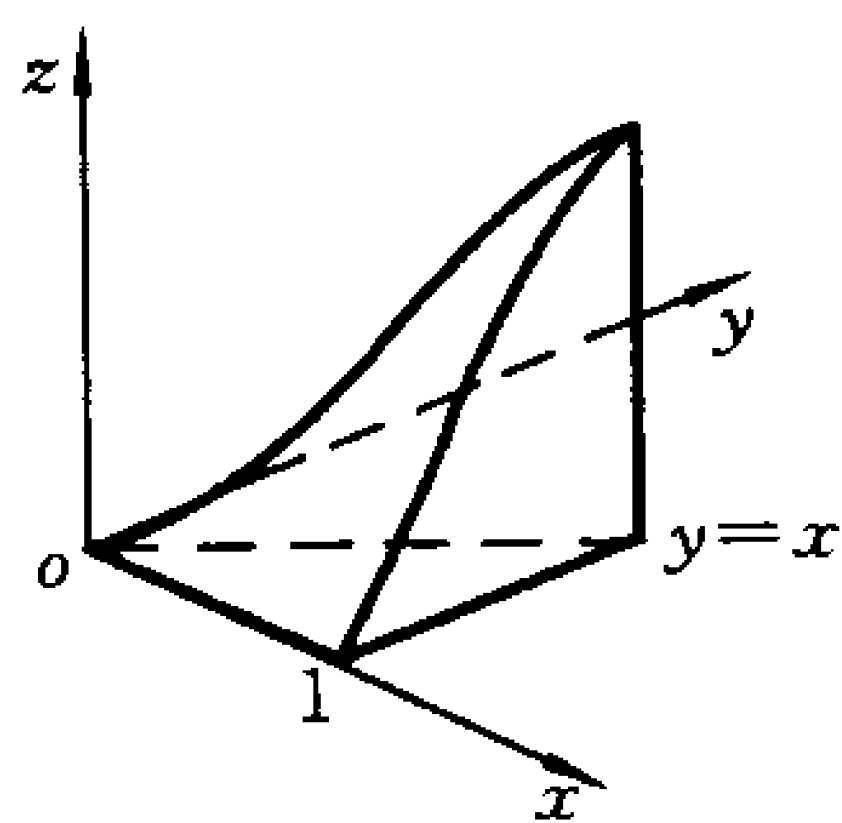


图 13.14

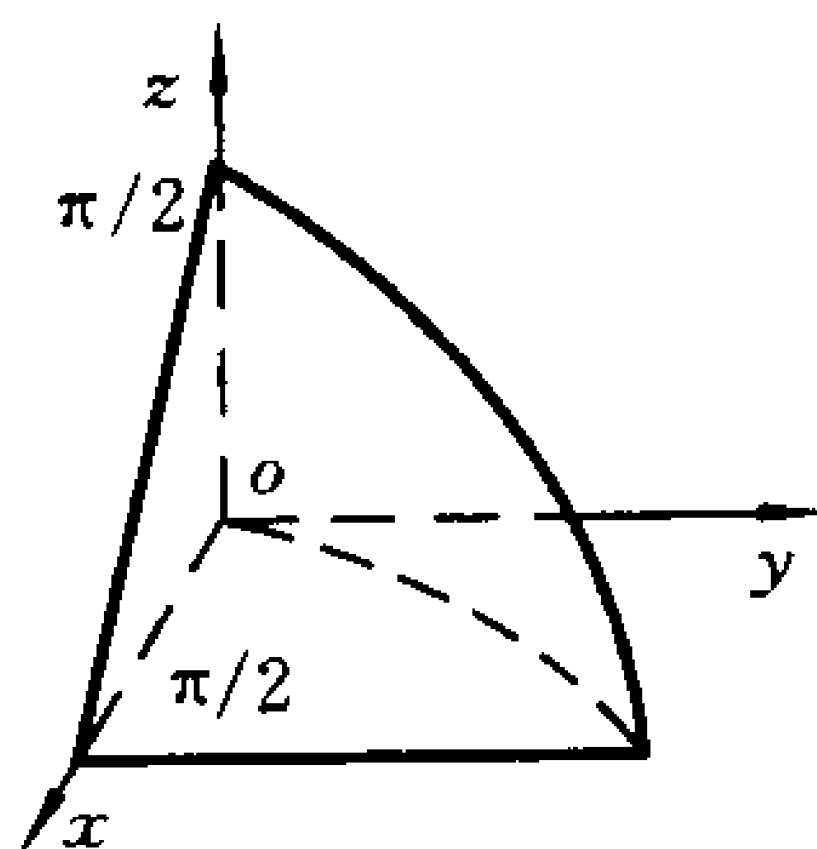


图 13.15

(3) 如图 13.15 所示,  $V$  表示为  $\begin{cases} 0 \leq x \leq \pi/2, \\ 0 \leq y \leq \sqrt{x}, \\ 0 \leq z \leq \pi/2 - x, \end{cases}$  则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\sqrt{x}} dy \int_0^{\pi/2-x} y \cos(x+z) dz \\ &= \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\sqrt{x}} y(1 - \sin x) dy = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin x) \frac{x}{2} dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}(-x \cos x + \sin x) \right] \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(4)  $V$  表示为  $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, \end{cases}$  则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y(1-x^2-y^2) dy \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 x(1-x^2)^2 dx = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

在以下例题中, 除非必要, 我们不再写出  $V$  的不等式组, 请读者自己通过作草图得出.

例 2 计算下列三重积分:

(1)  $\iiint_V \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy dz$ ,  $V$  由  $z = \sqrt{x^2+y^2}$ ,  $z=1$ ,  $z=2$  所围成;

(2)  $\iiint_V \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy dz$ ,  $V$  由  $x^2+y^2=z^2$ ,  $z=1$  所围成;

(3)  $\iiint_V z dx dy dz$ ,  $V$  由  $x^2+y^2+z^2=4$ ,  $z=\frac{1}{3}(x^2+y^2)$  所围成.

解 (1)  $V$  是柱形区域, 适合柱坐标系, 故

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r dr \int_1^2 \frac{e^z}{r} dz = 2\pi \int_0^2 (e^2 - e) dr \\ &= 2\pi(e^2 - e) \cdot 2 = 4\pi(e^2 - e). \end{aligned}$$

(2)  $V$  是柱形区域, 适合柱坐标系, 故

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_r^1 \frac{1}{1+r^2} dz = 2\pi \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} (1-r) dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{r - (1+r)^2 + 1}{1+r^2} dr \\ &= 2\pi \left[ \frac{1}{2} \ln(1+r^2) - r + \arctan r \right] \Big|_0^1 \\ &= 2\pi \left[ \frac{1}{2} \ln 2 - 1 + \frac{\pi}{4} \right] = \pi \left[ \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

(3)  $V$  是柱形区域, 适合柱坐标系, 故

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} z dz \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} r \left( 4 - r^2 - \frac{r^4}{9} \right) dr = \frac{13}{4}\pi. \end{aligned}$$

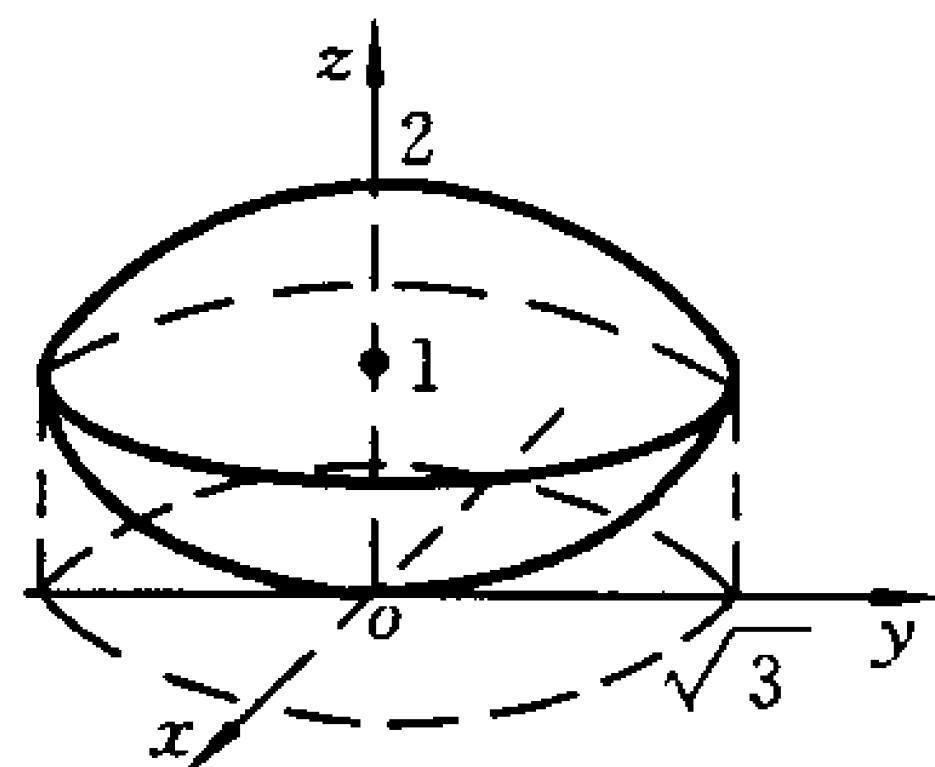


图 13.16

也可以用先重后单的累次积分计算, 因为被积函数是一个变量  $z$  的函数, 而投影区域又可表示为  $z$  的函数, 故

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 z dz \iint_{x^2+y^2 \leq 3z} dx dy + \int_1^2 z dz \iint_{x^2+y^2 \leq 4-z^2} dx dy \\
&= \int_0^1 z(3\pi z) dz + \int_1^2 z[\pi(4-z^2)] dz \\
&= 3\pi \int_0^1 z^2 dz + \pi \int_1^2 (4z - z^3) dz \\
&= \pi + 9\pi/4 = 13\pi/4.
\end{aligned}$$

**例 3** 计算下列三重积分:

(1)  $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$ ,  $V$  由  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  和  $z = \sqrt{b^2 - x^2 - y^2}$ ,  $z = 0$  ( $b > a > 0$ ) 所围成;

(2)  $\iiint_V z(x^2 + y^2) dx dy dz$ ,  $V$  由  $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$  所围成;

(3)  $\iiint_V \left( \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \right) dx dy dz$ ,  $V$  由  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $z^2 = 3x^2 + y^2$ ,  $z = 1$  所围成.

**解** (1)  $V$  是球形域, 适合球坐标系, 故

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_a^b r^2 \sin^2 \varphi r^2 \sin \varphi dr \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{b^5 - a^5}{5} \sin^3 \varphi d\varphi \quad (\text{瓦里士公式}) \\
&= 2\pi \cdot \frac{b^5 - a^5}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15} \pi (b^5 - a^5).
\end{aligned}$$

(2)  $V$  是部分球形域, 适合球坐标系, 故

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_1^2 r^2 \sin \varphi r \cos \varphi r^2 \sin^2 \varphi dr \\
&= 2\pi \cdot \frac{63}{6} \int_0^{\pi/4} \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi = 21\pi \int_0^{\pi/4} \sin^3 \varphi d(\sin \varphi) \\
&= \frac{21}{4} \pi \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 = \frac{21}{16} \pi.
\end{aligned}$$

(3)  $V$  表示  $0 \leq \theta \leq 2\pi, \pi/6 \leq \varphi \leq \pi/4, 0 \leq r \leq 1/\cos\varphi$ , 故

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin\varphi d\varphi \int_0^{1/\cos\varphi} \left(r + \frac{1}{r^2}\right) r^2 dr \\ &= 2\pi \int_{\pi/6}^{\pi/4} \left(\frac{1}{4\cos^4\varphi} + \frac{1}{\cos^4\varphi}\right) d(-\cos\varphi) \\ &= 2\pi \left[ \frac{1}{12} \cos^{-3}\varphi - \ln(\cos\theta) \right] \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} \\ &= \pi \left( \frac{9\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}{27} - \ln \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

**例 4** 用不同顺序配置下列三重积分的积分限:

(1)  $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x+y} f(x, y, z) dx dy dz;$

(2)  $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dx dy dz.$

**解** (1) 如图 13.17 所示,  $V$  由  $x=0, y=0, z=0, x+y=1, x+y=z$  所围成. 若先对  $y$  积分, 则  $D_{xz}: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1, V$  可用平面  $z=x$  分为  $V_1$  和  $V_2$ . 故

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{V_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{V_2} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^z dz \int_0^{1-z} f(x, y, z) dy + \int_0^1 dx \int_z^1 dz \int_{z-x}^{1-x} f(x, y, z) dy. \end{aligned}$$

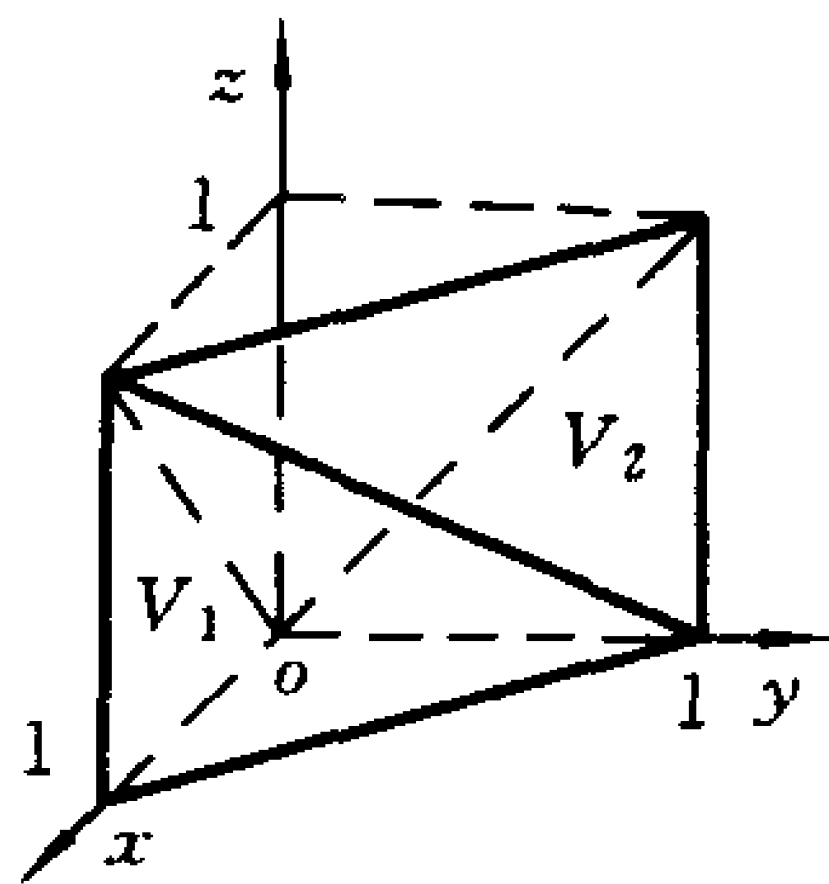


图 13.17

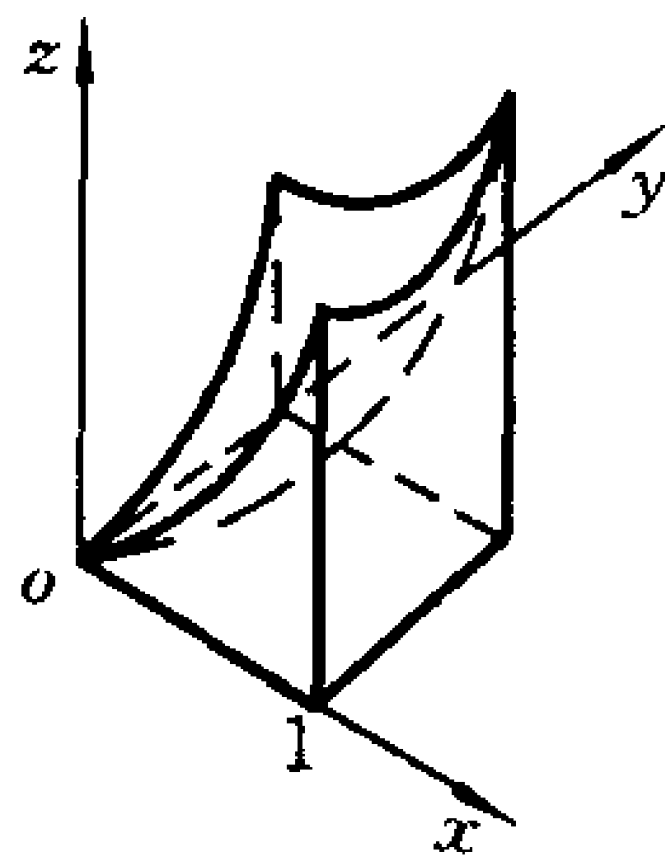


图 13.18

若先对  $x$  积分, 则  $D_{yz}: 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ , 用平面  $z=y$  将  $V$  分为  $V_1$  与  $V_2$ , 故

$$I = \int_0^1 dz \int_z^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y, z) dx + \int_0^1 dz \int_0^z dy \int_{z-y}^{1-y} f(x, y, z) dx.$$

(2)  $V$  如图 13.18 所示, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dz \left[ \int_0^{\sqrt{z}} dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x, y, z) dx + \int_{\sqrt{z}}^1 dy \int_0^1 f(x, y, z) dz \right] \\ &\quad + \int_1^2 dz \int_{\sqrt{z-1}}^1 dy \int_0^{\sqrt{z-y^2}} f(x, y, z) dz \\ &= \int_0^1 dx \left[ \int_0^{x^2} dz \int_0^1 f(x, y, z) dy + \int_{x^2}^{x^2+1} dz \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x, y, z) dy \right] \end{aligned}$$

例 5 选择坐标系计算下列三重积分:

$$(1) \iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}}, V: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, h > R;$$

$$(2) \iiint_V |\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1| dx dy dz, V \text{ 由 } z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ 与}$$

$z = 1$  所围成;

$$(3) \iiint_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz, V \text{ 是 } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ 在}$$

第一卦限的部分.

解 (1) 令  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$ , 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-R}^R dz \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}} \\ &= \pi \int_{-R}^R dz \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \frac{dr^2}{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}} \\ &= 2\pi \int_{-R}^R \left[ \sqrt{R^2 + h^2 - 2zh} - (h-z) \right] dz \\ &= 2\pi \left[ -\frac{1}{3h} (r^2 + h^2 - 2hz)^{3/2} + \frac{1}{2} (h-z)^2 \right] \Big|_{-R}^R = \frac{4\pi R^3}{3h}. \end{aligned}$$

此题也可用球坐标系代换来求解.

(2) 如图 13.19 所示, 球面将  $V$  分为  $V_1$  和  $V_2$ , 故用球坐标

系,得

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{V_1} (1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz \\
 &\quad + \iiint_{V_2} (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1) dx dy dz \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} d\theta \left[ \int_0^1 (1-r) r^2 \sin\theta dr \right. \\
 &\quad \left. + \int_1^{1/\cos\theta} (r-1) r^2 \sin\theta d\theta \right] \\
 &= 2\pi \left[ \int_0^{\pi/4} \sin\theta \cdot \frac{1}{12} d\theta + \int_0^{\pi/4} \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{4\cos^4\theta} - \frac{1}{3\cos^3\theta} \right) \sin\theta d\theta \right] \\
 &= \frac{\pi}{3} (-\cos\theta) \Big|_0^{\pi/4} + 2\pi \left( \frac{1}{12\cos^3\theta} - \frac{1}{6\cos^2\theta} \right) \Big|_0^{\pi/4} \\
 &= \frac{\pi}{6} (\sqrt{2} - 1).
 \end{aligned}$$

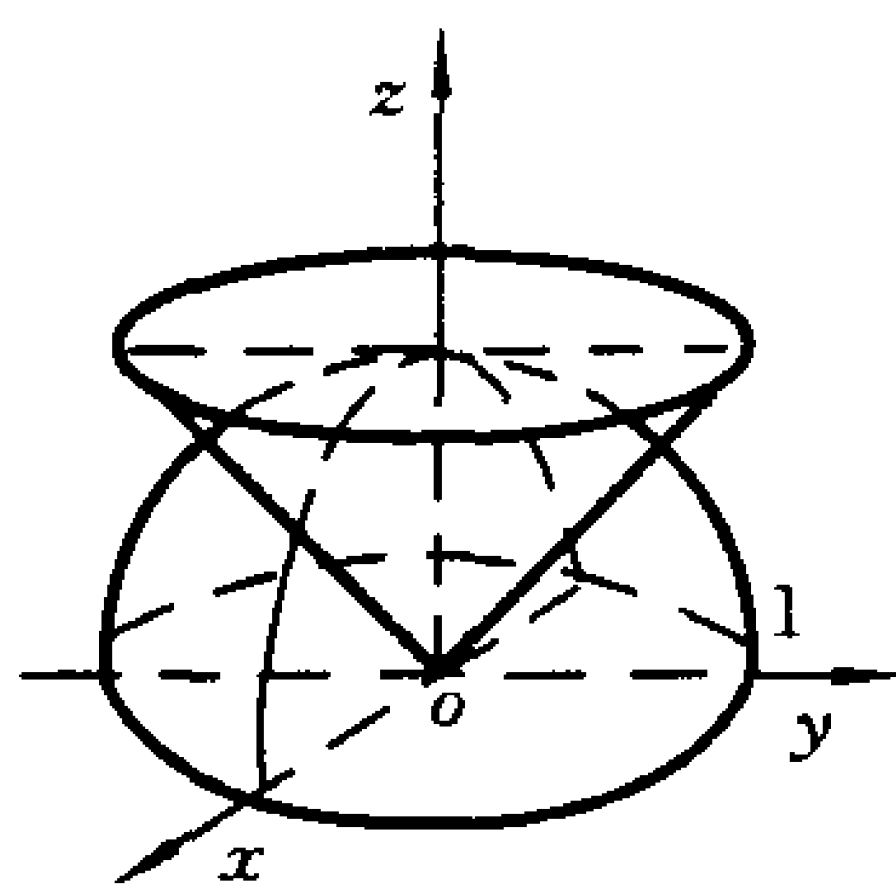


图 13.19

(3) 作广义球坐标代换:  $x = r \sin\varphi \cos\theta$ ,  $y = r \sin\varphi \sin\theta$ ,  $z = r \cos\varphi$ ,  $|J| = abc r^2 \sin\varphi$ , 故

$$\begin{aligned}
 I &= 8 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 abc r^2 \sin\varphi \sqrt{1-r^2} dr \\
 &= 4\pi abc \int_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi \int_0^1 r^2 \sqrt{1-r^2} dr \\
 &\stackrel{r = \sin t}{=} 4\pi abc \int_0^{\pi/2} \sin^2 t (1 - \sin^2 t) dt = \frac{1}{4} \pi^2 abc.
 \end{aligned}$$

**例 6** 计算三重积分  $\iiint_V (x^3 y - 3xy^2 + 3xy) dx dy dz$ ,  $V$  由球面  $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1$  所围成.

**解**  $V$  关于平面  $y=x$  对称, 故

$$\iiint_V xy^2 dx dy dz = \iiint_V x^2 y dx dy dz,$$

于是

$$I = \iiint_V [y(x-1)^3 + (y-1) + 1] dx dy dz$$

$$= \iiint_V y(x-1)^3 dx dy dz + \iiint_V (y-1) dx dy dz + \iiint_V dx dy dz.$$

由被积函数对积分区域的奇偶性,得

$$I = 0 + 0 + 4\pi/3 = 4\pi/3.$$

例 7 用轮换对称性计算下列三重积分:

(1)  $\iiint_V (3x^2 + 5y^2 + 7z^2) dx dy dz$ ,  $V$  由  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  及  $z \geq 0$  所围成;

(2)  $\iiint_V (x+y+z)^2 dx dy dz$ , 考虑  $V$  为正方体,  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ ; 或  $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ .

解 (1) 被积函数是关于  $V_1: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  的偶函数, 具有轮换对称性, 于是

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \iiint_{V_1} (3x^2 + 5y^2 + 7z^2) dx dy dz \\ &= \frac{5}{2} \iiint_{V_1} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{5}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^R r^4 \sin\varphi dr \\ &= \frac{5}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{R^5}{5} \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi = 2\pi R^5. \end{aligned}$$

(2) 利用轮换对称性化简被积函数, 于是

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V (3x^2 + 6xy) dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^1 (3x^2 + 6xy) dy \int_0^1 dz \\ &= \int_0^1 3(x^2 + x) dx = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

当  $V$  为  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ , 还可利用奇偶性. 于是

$$\begin{aligned} I &= 3 \iiint_V x^2 dx dy dz + 6 \iiint_V xy dx dy dz \\ &= 24 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R r^4 \sin^3\varphi \cos\theta dr + 0 \\ &= 24 \cdot \frac{R^5}{5} \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta \int_0^{\pi/2} \sin^3\varphi d\varphi = \frac{4}{5} \pi R^5. \end{aligned}$$

例 8 计算下列三重积分:

(1)  $\iiint_V z^2 dx dy dz$ ,  $V$  是  $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$  与  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  的公共部分;

(2)  $\iiint_V e^{|z|} dx dy dz$ ,  $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ .

解 由于被积函数是一个变量的函数,而平行该变量的平面与  $V$  的截面积又是该变量的函数,故三重积分可以化为“先重后单”的形式.

(1) 平面  $z=R/2$  上、下截面积表示式不同,应分区域积分.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{R/2} z^2 dz \iint_{x^2+y^2 \leq 2Rz-z^2} dx dy + \int_{R/2}^R z^2 dz \iint_{x^2+y^2 \leq R^2-z^2} dx dy \\ &= \pi \int_0^{R/2} z^2 (2Rz - z^2) dz + \pi \int_{R/2}^R z^2 (R^2 - z^2) dz \\ &= \pi \left( \frac{R}{2} z^4 - \frac{z^5}{5} \right) \Big|_0^{R/2} + \pi \left( \frac{R}{3} z^3 - \frac{z^5}{5} \right) \Big|_{R/2}^R = \frac{59}{480} \pi R^5. \end{aligned}$$

(2) 注意到  $e^{|z|}$  为  $z$  的偶函数,故

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^1 e^z dz \iint_{x^2+y^2 \leq 1-z^2} dx dy \\ &= 2 \int_0^1 e^z (1 - z^2) dz \stackrel{\text{分部积分}}{=} 2\pi. \end{aligned}$$

例 9 设  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上连续,证明:

$$\iiint_V f(x) dx dy dz = \pi \int_{-1}^1 f(x) (1 - x^2) dx, V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

证 被积函数是  $x$  一个变量的函数,平行  $yo z$  平面的截面积为  $\pi(1-x^2)$ ,故

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x) dx dy dz &= \int_{-1}^1 f(x) dx \iint_{y^2+z^2 \leq 1-x^2} dy dz \\ &= \pi \int_{-1}^1 f(x) (1 - x^2) dx. \end{aligned}$$



例 10 设  $F(t) = \iiint_V f(xyz) dx dy dz$ ,  $f$  为可微函数, 证明:

$$F'(t) = \frac{3}{t} \left[ F(t) + \iiint_V xyz f'(xyz) dx dy dz \right], V \text{ 由 } 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq t, 0 \leq z \leq t, t > 0 \text{ 所围成.}$$

证 令  $x=ut, y=vt, z=wt$ , 则  $0 \leq u, v, w \leq 1$ , 因此

$$F(t) = \iiint_{V'} t^3 f(uvw t^3) du dv dw,$$

$$\begin{aligned} F'(t) &= \iiint_{V'} [3t^2 f(uvw t^3) + t^3 f'(uvw t^3) \cdot 3t^2 uvw] du dv dw \\ &= \frac{3}{t} \iiint_{V'} [t^3 f(uvw t^3) + t^3 t u t v t w f'(uvw t^3)] du dv dw \\ &= \frac{3}{t} \left[ F(t) + \iiint_V xyz f'(xyz) dx dy dz \right]. \end{aligned}$$

例 11 设  $F(t) = \iiint_V f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ ,  $f$  连续,  $f'$  存在,

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, V: x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2. \text{ 求 } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t^5}.$$

解 用球坐标计算  $F(t)$ , 得

$$F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^t r^2 f(r^2) dr = 4\pi \int_0^t r^2 f(r^2) dr,$$

$$\text{则 } F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2), \quad F(0) = 0.$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t^5} &\stackrel{L'}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F'(t)}{5t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4\pi}{5} \cdot \frac{f(t^2)}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4\pi}{5} \cdot \frac{f(t^2) - 0}{t^2} = \frac{4\pi}{5} f'(0) = \frac{4}{5} \pi. \end{aligned}$$

例 12 设  $f(x)$  有连续导数,  $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2$ , 求

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi t^4} \iiint_V f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz.$$

$$\text{解 } \iiint_V f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi \int_0^t f(r)r^2 dr$$

$$= 2\pi \cdot 2 \cdot \int_0^t f(r)r^2 dr = 4\pi \int_0^t r^2 f(r) dr,$$

则

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi t^4} \iiint_V f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4\pi}{\pi t^4} \int_0^t r^2 f(r) dr \stackrel{L'}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4\pi t^2 f(t)}{4\pi t^3}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \stackrel{L'}{=} f'(0).$$

当  $f(t) \neq 0$  时, 极限为  $+\infty$ .

**例 13** 设  $f(x)$  连续,  $V$  由  $0 \leq z \leq h$  和  $x^2 + y^2 \leq t^2$  所围成,

$$F(t) = \iiint_V [f(x^2 + y^2) + z^2] dx dy dz. \text{ 求 } \frac{dF}{dt} \text{ 和 } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^2}.$$

解

$$F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t r dr \int_0^h [f(r^2) + z^2] dz$$

$$= 2\pi \int_0^t \left[ \frac{h^3}{3} + f(r^2)h \right] r dr,$$

则

$$\frac{dF}{dt} = 2\pi \left[ \frac{h^3}{3} + f(t^2)h \right] t = 2\pi h t \left[ \frac{h^2}{3} + f(t^2) \right],$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t^2} \stackrel{L'}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2\pi h t [h^2/3 + f(t^2)]}{2t} = \pi h \left[ \frac{h^2}{3} + f(0) \right].$$

**例 14** 求函数  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  在  $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$  的平均值  $\bar{f}(x, y, z)$ .

解

$$\bar{f}(x, y, z) = \frac{1}{V} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz.$$

将  $V$  写成  $(x-1/2)^2 + (y-1/2)^2 + (z-1/2)^2 \leq 3/4$ , 故  $V = \sqrt{3}\pi/2$ .

作坐标变换:  $x = 1/2 + r\sin\varphi\cos\theta, y = 1/2 + r\sin\varphi\sin\theta, z = 1/2 + r\cos\varphi, J = r^2\sin\varphi$ , 则  $V_1$  为  $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq r \leq \sqrt{3}/2$ , 故

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi \\
&\quad \cdot \int_0^{\sqrt{3}/2} \left[ \frac{3}{4}r^2 + r(\sin\varphi \cos\theta + \sin\varphi \sin\theta + \cos\varphi) \right] r^2 dr \\
&= 2\pi \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{3}/2} \left[ \frac{3}{4}r^2 + r^2 \right] r^2 dr \\
&= 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{20} = \frac{3\sqrt{3}}{5}\pi.
\end{aligned}$$

于是

$$\bar{f}(x, y, z) = \frac{3\sqrt{3}}{5}\pi / \frac{\sqrt{3}}{2}\pi = \frac{6}{5}.$$

## 第四节 重积分的应用

### 主要内容

1.  $\iint_D dx dy$  表示区域  $D$  的面积.

2.  $\iiint_V dx dy dz$  表示区域  $V$  的体积; 若它是底为  $D$ 、曲顶为  $z =$

$f(x, y)$  的曲顶柱体, 则  $V = \iint_D f(x, y) dx dy$ .

3. 设  $D$  为可求面积的平面有界区域, 函数  $f$  在  $D$  上有连续偏导数, 则曲面  $S: z = f(x, y), (x, y) \in D$  的面积

$$\Delta S = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dx dy = \iint_D \frac{dx dy}{|\cos(n, z)|}.$$

当  $S$  由  $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D$  确定, 且分别在  $D$  上有连续的一阶偏导数,  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}$  中至少有一个不等于零, 则

$$\Delta S = \iint_{D'} \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

$D'$  是  $D$  经代换后的区域:  $E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$ ,  $F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$ ,  $G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$ .

4. 密度为  $\rho(x, y, z)$  的空间物体  $V$  的重心公式

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x \rho(x, y, z) dV}{\iiint_V \rho(x, y, z) dV}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_V y \rho(x, y, z) dV}{\iiint_V \rho(x, y, z) dV}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_V z \rho(x, y, z) dV}{\iiint_V \rho(x, y, z) dV}.$$

密度为  $\rho(x, y)$  的平面薄板  $D$  的重心公式

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y \rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma}.$$

5. 密度为  $\rho(x, y, z)$  的空间物体  $V$  的转动惯量公式

$$J_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV, \quad J_y = \iiint_V (z^2 + x^2) \rho(x, y, z) dV,$$

$$J_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV, \quad J_{xy} = \iiint_V xy \rho(x, y, z) dV,$$

$$J_{yz} = \iiint_V yz \rho(x, y, z) dV, \quad J_{zx} = \iiint_V xz \rho(x, y, z) dV.$$

密度为  $\rho(x, y)$  的平面薄板  $D$  的转动惯量公式

$$J_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) d\sigma, \quad J_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) d\sigma,$$

$$J_l = \iint_D r^2(x, y) \rho(x, y) d\sigma.$$

设  $l$  为转动轴, 则  $r(x, y)$  为转动轴  $l$  到  $D$  的距离.

6. 密度为  $\mu(x, y, z)$  的立体  $V$  到质量为 1 的质点  $A$  的引力公式

$$F_x = k \iiint_V \frac{x - \xi}{r^2} \mu dV, \quad F_y = k \iiint_V \frac{y - \eta}{r^2} \mu dV,$$

$$F_z = k \iiint_V \frac{z - \zeta}{r^2} \mu dV. \quad F = F_x i + F_y j + F_z k.$$

其中  $k$  为引力系数,  $(\xi, \eta, \zeta)$  为点  $A$  的坐标.

## 方法、技巧与典型例题分析

重积分的应用包括几何应用和物理应用. 求解这类问题除了牢记必要的公式外, 更重要的是应认真分析具体情况, 了解问题的条件和可以利用的结果, 讨论怎样求得需要的结果(包括坐标系的选取、积分微元的选取, 可利用的计算手段和方法等).

### 一、重积分的几何应用

例 1 求下列曲线所围图形的面积:

(1)  $xy = a^2, x + y = 5a/2 \quad (a > 0);$

(2)  $(x^2 + y^2) = 2a^2(x^2 - y^2), x^2 + y^2 = a^2(x^2 + y^2 \geq a^2, a > 0).$

解 (1) 如图 13.20 所示, 交点  $A\left(\frac{a}{2}, 2a\right), B\left(2a, \frac{a}{2}\right)$ . 故

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{a/2}^{2a} dx \int_{a^2/x}^{5a/2-x} dy = \int_{a/2}^{2a} \left( \frac{5}{2}a - x - \frac{a^2}{x} \right) dx \\ &= 15a^2/8 - 2a^2 \ln 2. \end{aligned}$$

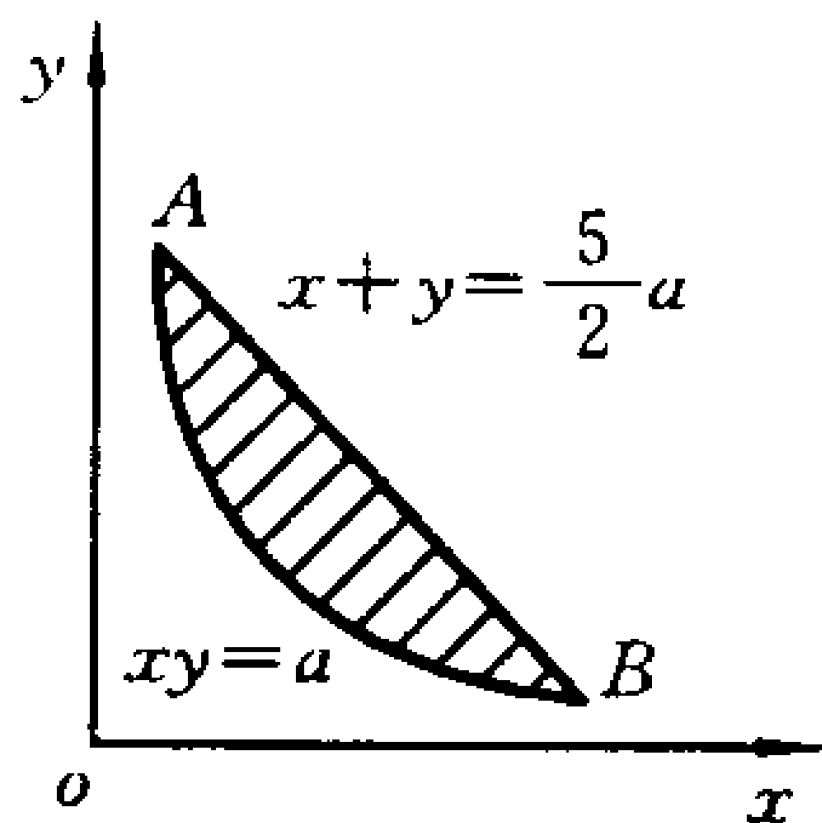


图 13.20

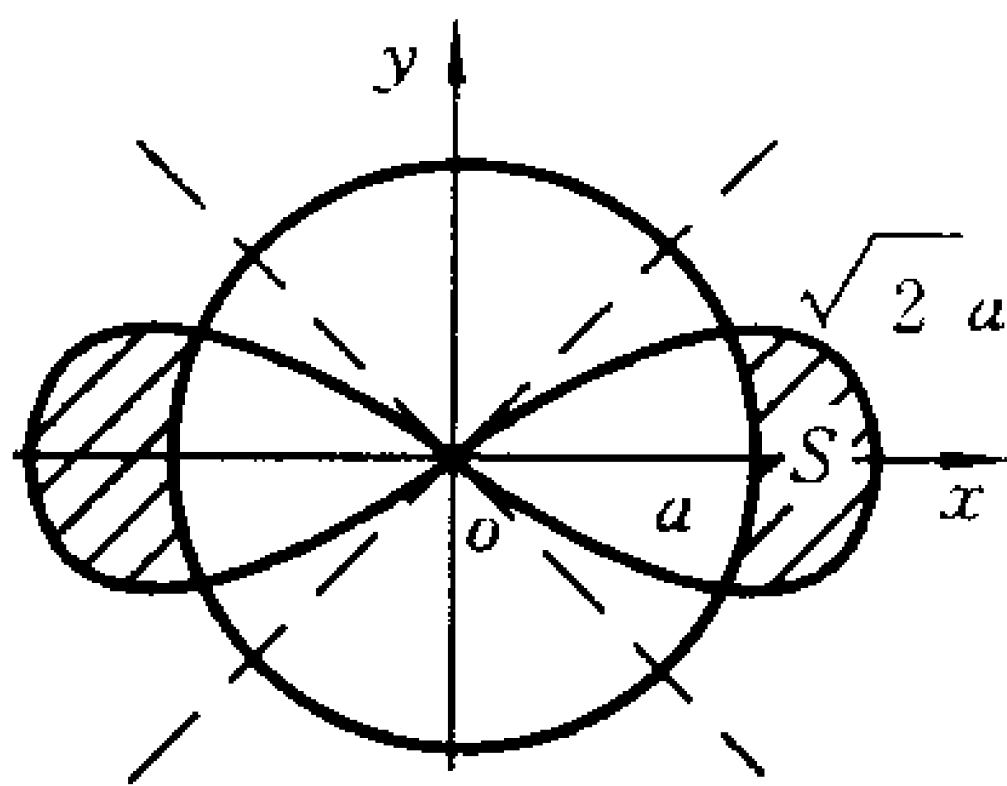


图 13.21

(2) 如图 13.21 所示, 所求面积为阴影部分. 由对称性知,  $S =$

$4S_1$ . 故

$$\begin{aligned}\Delta S &= 4\Delta S_1 = 4 \int_0^{\pi/6} d\theta \int_a^{\sqrt{2a^2 \cos 2\theta}} r dr \\ &= 2 \int_0^{\pi/6} (2a^2 \cos 2\theta - a^2) d\theta = a^2 (\sqrt{3} - \pi/3).\end{aligned}$$

**例 2** 进行适当变量代换, 计算下列曲线所围成的面积:

(1)  $x+y=a, x+y=b, y=\alpha x, y=\beta x$  ( $0 < a < b, 0 < \alpha < \beta$ );

(2)  $xy=a^2, xy=2a^2, y=x, y=2x$  ( $x > 0, y > 0$ ).

**解** (1) 作代换  $x+y=u, y/x=v$ , 则  $a \leq u \leq b, \alpha \leq v \leq \beta$ , 且  $|J|=u/(1+v)^2$ . 于是

$$\Delta S = \int_a^b u du \int_\alpha^\beta \frac{dv}{(1+v)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\beta - \alpha)(b^2 - a^2)}{(1 + \alpha)(1 + \beta)}.$$

(2) 作代换  $xy=u, y/x=v$ , 则  $a^2 \leq u \leq 2a^2, 1 \leq v \leq 2$ , 且  $|J|=1/(2v)$ . 于是

$$\Delta S = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{2a^2} du \int_1^2 \frac{dv}{v} = \frac{1}{2} a^2 \ln 2.$$

**例 3** 计算下列立体体积:

(1) 圆柱  $x^2+y^2 \leq R^2$  与  $x^2+z^2 \leq R^2$  的公共部分;

(2) 曲面  $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$  与  $x^2+y^2+z^2 \leq 2Rz$  的公共部分;

(3) 曲面  $x^2+y^2=az$  与  $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$  ( $a > 0$ ) 所围成的立体;

(4) 球体  $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$  被柱面  $x^2+y^2=ax$  截下的部分.

**解** 先作草图求出交线, 确定投影区域, 再配置积分限, 进行积分. 可选择二重积分, 也可选择三重积分.

(1) 如图 13.22 所示,  $V = 8V_1$ ,  $D_1: 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq \sqrt{R^2-x^2}$ , 于是

$$\begin{aligned}V &= 8V_1 = 8 \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2} dy \\ &= 8 \int_0^R (R^2-x^2) dx = \frac{16}{3} R^3.\end{aligned}$$

(2)  $V: R - \sqrt{R^2 - r^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - r^2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{3}/2R$  (由  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  和  $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$  消去  $z$ , 得  $x^2 + y^2 = 3R^2/4 \Rightarrow$  投影域  $D_{xy}: 0 \leq r \leq \sqrt{3}R/2$ ). 于是

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}R/2} r dr \int_{R - \sqrt{R^2 - r^2}}^{\sqrt{R^2 - r^2}} dz \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}R/2} r(2\sqrt{R^2 - r^2} - R) dr = \frac{5}{12}\pi R^3. \end{aligned}$$

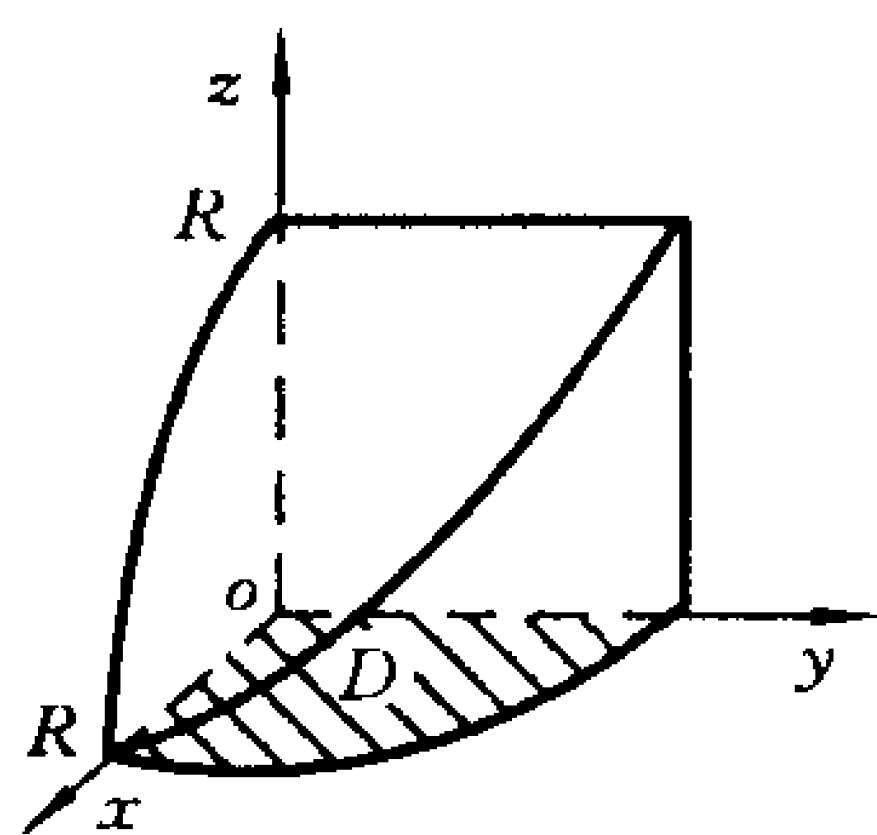


图 13.22

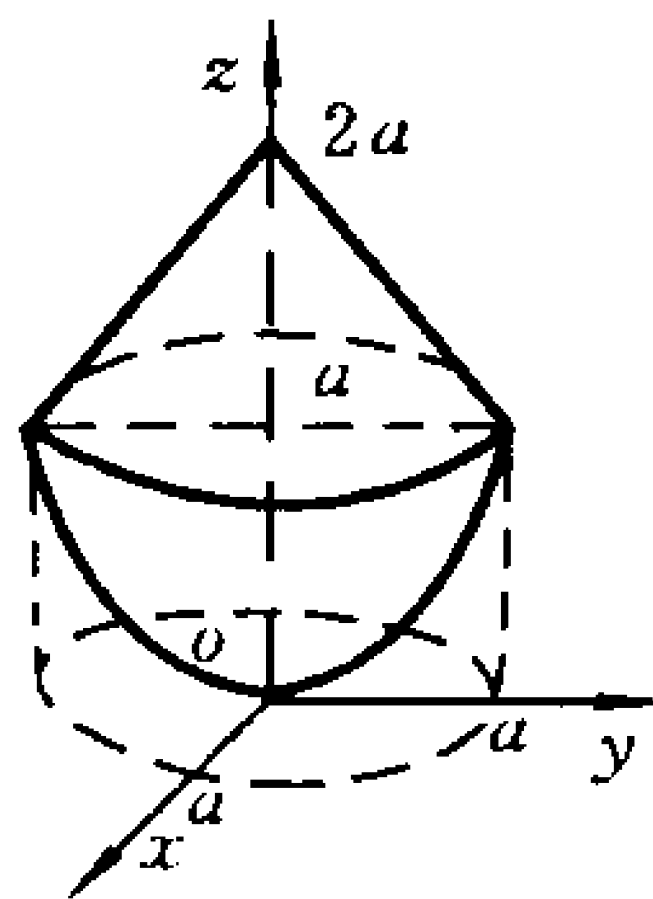


图 13.23

(3) 如图 13.23 所示, 由  $x^2 + y^2 = az$  与  $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$  消去  $z$ , 得  $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow$  投影域  $D_{xy}: 0 \leq r \leq a$ . 于是

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_{r^2/a}^{2a - r} dz = 2\pi \int_0^a r \left( 2a - r - \frac{r^2}{a} \right) dr \\ &= 2\pi \left( ar - \frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4a}r^4 \right) \Big|_0^a = \frac{5}{6}\pi a^3. \end{aligned}$$

(4)  $V$  关于  $xoy$  平面与  $xoz$  平面对称, 故

$$\begin{aligned} V &= 4 \iint_D \sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \sqrt{a^2 - r^2} r dr \\ &= \frac{4}{3}a^3 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{4}{3}a^3 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

**例 4** 求下列立体体积:

(1) 由  $z = xy, x + y + z = 1, z = 0$  所围成;

(2) 由  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, z = 0$  所围成;

(3) 由  $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z}{c} = 1, z=0$  所围成.

解 用二重积分计算更简单些.

(1) 立体如图 13.24(a) 所示, 投影域如图 13.24(b) 所示.  $V$  分为  $V_1: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1-x}{1+x}, z=xy$  和  $V_2: 0 \leq x \leq 1, \frac{1-x}{1+x} \leq y \leq 1-x, z=1-x-y$ . 于是

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{(1-x)/(1+x)} y dy + \int_0^1 dx \int_{(1-x)/(1+x)}^{1-x} (1-x-y) dy \\ &= (-11/4 + 4\ln 2) + (25/6 - 6\ln 2) = 17/12 - 2\ln 2. \end{aligned}$$

(2) 立体在  $xoy$  面上投影域边界为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ , 即

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{令 } \frac{x}{a} = \frac{1}{2} + r\cos\theta, \frac{y}{b} = \frac{1}{2} + r\sin\theta,$$

则  $z = c[1/2 + r(\cos\theta + \sin\theta) + r^2], 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1/\sqrt{2};$

$$|J| = abr.$$

于是

$$V = \iint_D c \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy$$

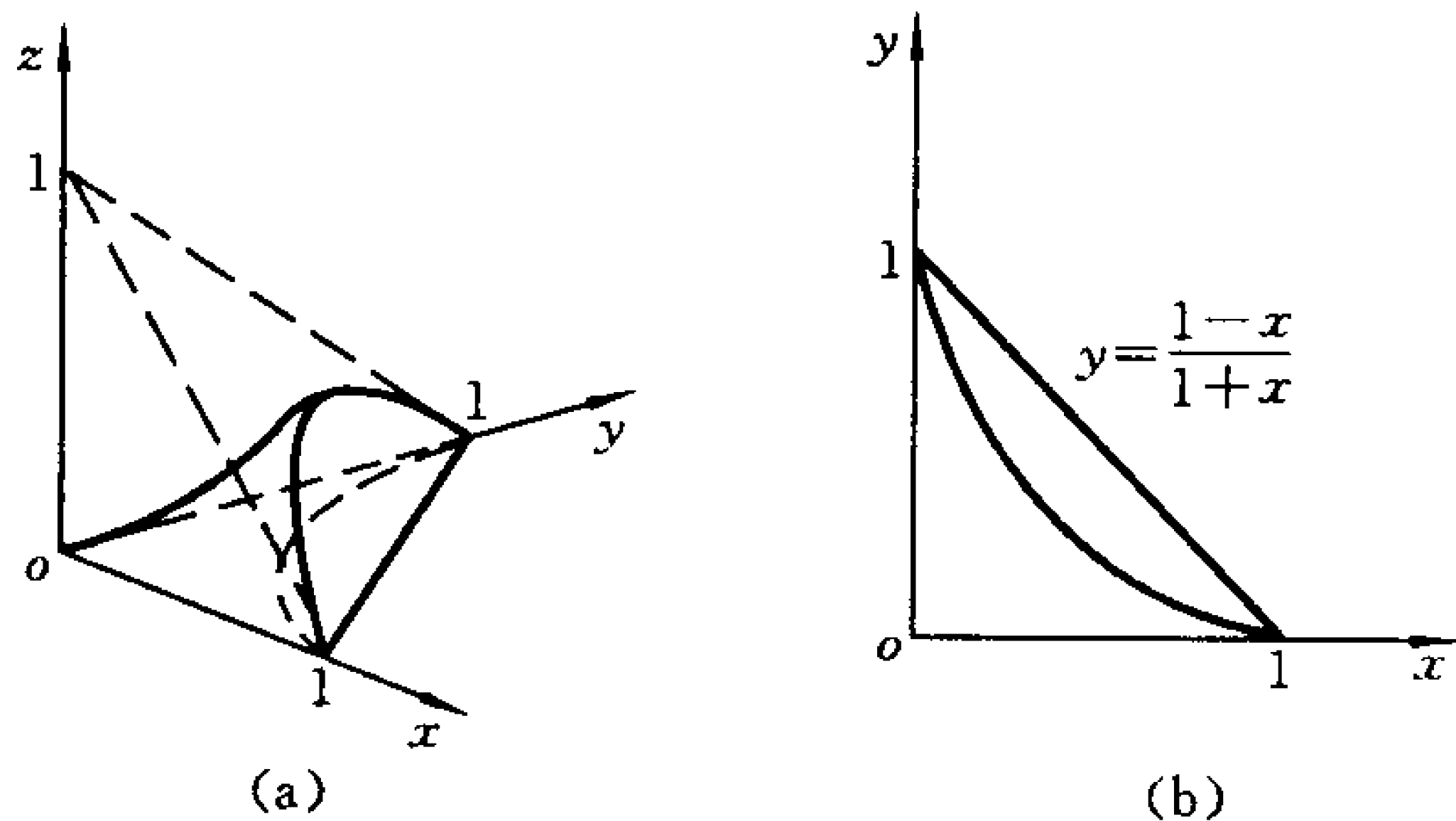


图 13.24



$$\begin{aligned}
&= abc \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/\sqrt{2}} r \left[ \frac{1}{2} + r(\cos\theta + \sin\theta) + r^2 \right] dr \\
&= abc \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{8} + \frac{1}{6\sqrt{2}}(\cos\theta + \sin\theta) + \frac{1}{16} \right] d\theta \\
&= abc \cdot \frac{6\pi}{16} = \frac{3}{8}\pi abc.
\end{aligned}$$

(3) 用广义极坐标  $x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta$ , 则  $z = c(1-r^2), 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1; |J| = abr$ . 于是

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D c \left[ 1 - \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right] dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 abcr(1-r^2) dr \\
&= 2\pi abc \int_0^1 (r - r^3) dr = \frac{2}{3}\pi abc.
\end{aligned}$$

**例 5** 求锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被柱面  $z^2 = 2x$  截下部分的曲面面积.

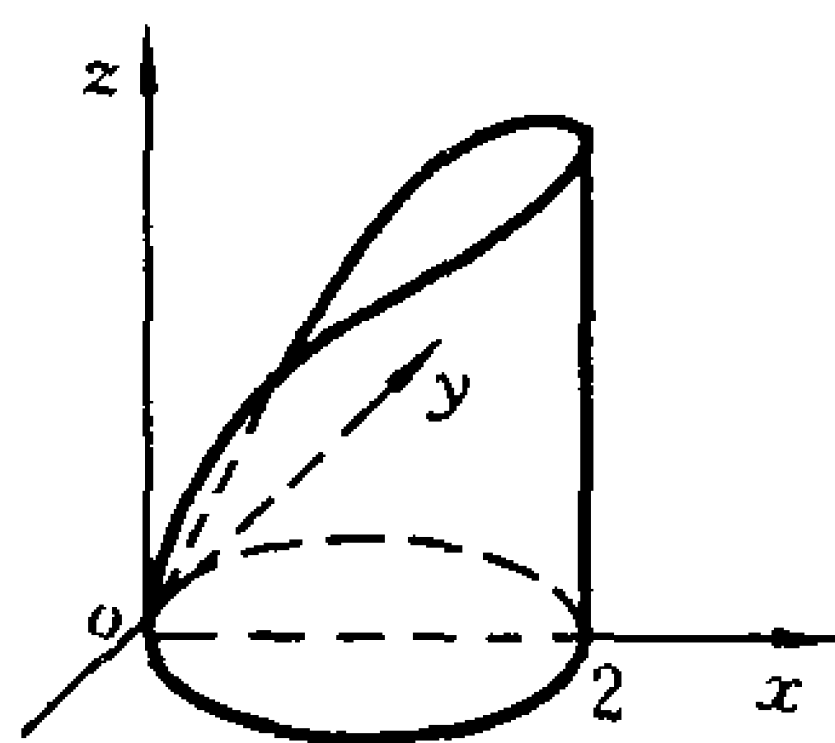


图 13.25

**解** 如图 13.25 所示, 因为  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 所以  $\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} = \sqrt{2}$ ,  $D: x^2 + y^2 \leq 2x$ , 于是

$$\begin{aligned}
S &= \iint_D \sqrt{2} dx dy = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r dr \\
&= \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} 4\cos^2\theta d\theta = \sqrt{2}\pi.
\end{aligned}$$

也可由  $\iint_D dx dy = \pi$  直接得到  $S = \sqrt{2}\pi$ .

**例 6** 计算下列曲面的面积:

(1) 球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  包含在柱面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $b \leq a$ ) 内的部分;

(2) 球面  $z = \sqrt{x^2 - y^2}$  包含在柱面  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  内的部分.

解 (1)  $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ,  $\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ ,  $D: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ . 于是, 由对称性得

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot 4 \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dy \\ &= 8a \int_0^a \left[ \arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right]_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= 8a^2 \arcsin(b/a). \end{aligned}$$

(2)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ ,  $\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ .  $D$  为  $r^2 \leq a^2 \cos 2\theta$ . 于是, 由对称性得

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2 - y^2}} dx dy = 4 \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{a \sqrt{\cos 2\theta}} \sqrt{2}r \frac{r \cos \theta}{r \sqrt{\cos 2\theta}} dr \\ &= 2 \sqrt{2} \int_0^{\pi/4} a^2 \cos \theta \sqrt{\cos 2\theta} d\theta \\ &= 2a^2 \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 - 2\sin^2 \theta} d(\sqrt{2} \sin \theta) \\ &= 2a^2 \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \sqrt{1 - 2\sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \arcsin(\sqrt{2} \sin \theta) \right] \Big|_0^{\pi/4} \\ &= \pi a^2 / 2. \end{aligned}$$

## 二、重积分的物理应用

物理应用的类型比较多, 解题时要详细审题, 明确条件和要求后再动手.

例 7 形如曲面  $x^2 + y^2 = z^2$  的漏斗中装了深为  $H$  的液体, 设漏斗中任一点  $M(x, y, z)$  处液体密度为  $\frac{1}{a^2 + x^2 + y^2}$ ,  $a > 0$ . 求漏斗中液体的质量  $m$ .

解  $V: 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq H, 0 \leq r \leq H$ . 于是

$$\begin{aligned}
m &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H r dr \int_r^H \frac{dz}{a^2 + r^2} = 2\pi \int_0^H \frac{Hr - r^2}{a^2 + r^2} dr \\
&= 2\pi \int_0^H \frac{Hr - (a^2 + r^2) + a^2}{a^2 + r^2} dr \\
&= 2\pi \left[ \frac{H}{2} \ln(a^2 + r^2) - r + \arctan \frac{r}{a} \right] \Big|_0^H \\
&= \pi [H \ln(a^2 + H^2) - 2H(1 + \ln a) + 2 \arctan(H/a)].
\end{aligned}$$

**例 8** 设球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x$  的密度等于它到坐标原点的距离, 求球体的质量  $m$ .

**解** 积分域如图 13.26 所示, 则

$$\begin{aligned}
m &= \iiint_V \rho dx dy dz \quad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r \cdot r^2 \sin\varphi dr = \pi \cdot 4 \int_0^\pi \cos^4\varphi \sin\varphi d\varphi \\
&= 4\pi \left( -\frac{1}{5} \cos^5\varphi \right) \Big|_0^\pi = \frac{8}{5}\pi.
\end{aligned}$$

**例 9** 求下列曲线所围成的均匀薄板的质心坐标:

- (1)  $ay = x^2, x + y = 2a$  ( $a > 0$ );
- (2)  $r = a\cos\theta, r = b\cos\theta$  ( $0 < a < b$ );
- (3)  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi, a > 0$ ),  $x$  轴.

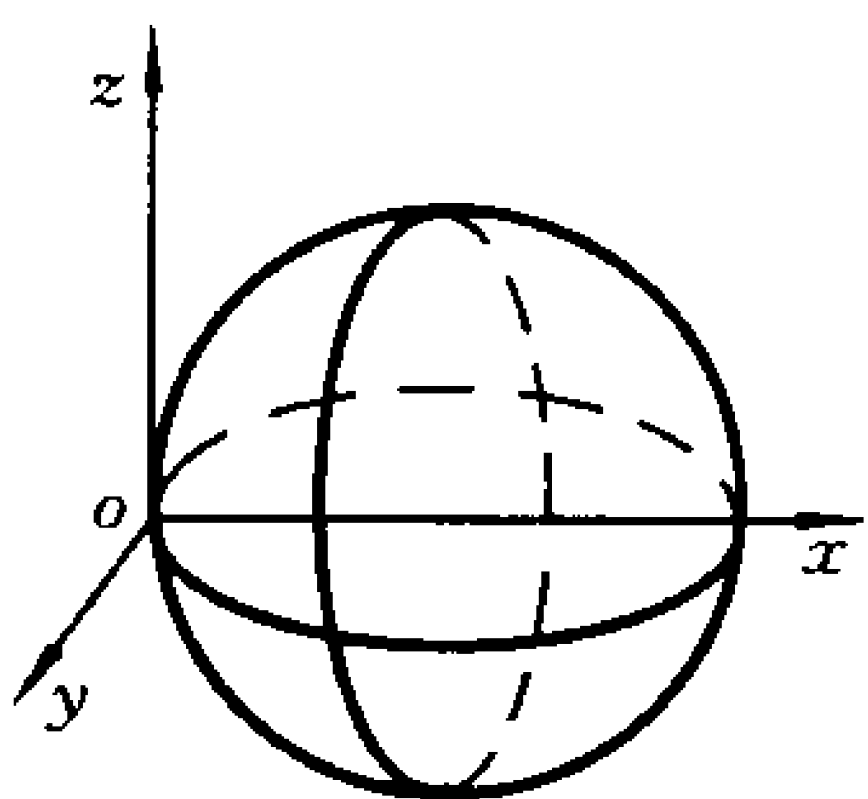


图 13.26

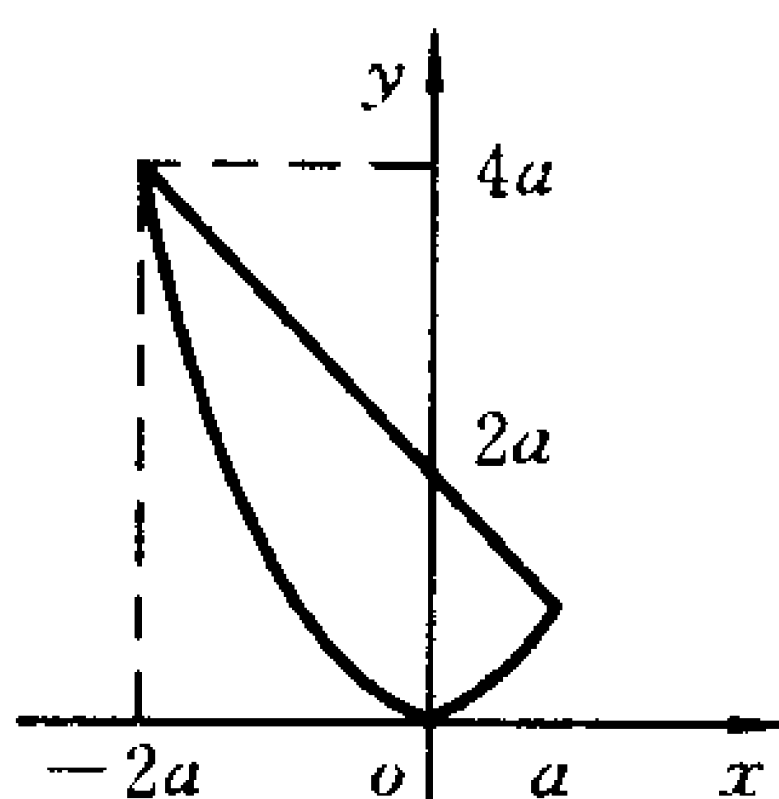


图 13.27

**解** (1) 积分域如图 13.27 所示, 设密度  $= \rho$ , 有

$$\begin{aligned}
m &= \int_{-2a}^a dx \int_{x^2/a}^{2a-x} \rho dy = \int_{-2a}^a \rho \left( 2a - x - \frac{x^2}{a} \right) dx = \frac{9}{2} \rho a^2, \\
m_y &= \int_{-2a}^a dx \int_{x^2/a}^{2a-x} \rho x dy = \int_{-2a}^a \rho \left( 2a - x - \frac{x^3}{a} \right) dx = -\frac{9}{4} \rho a^3,
\end{aligned}$$

$$m_x = \int_{-2a}^a dx \int_{x^2/a}^{2a-x} \rho y dy = \int_{-2a}^a \frac{\rho}{2} \left[ (2a-x)^2 - \frac{x^4}{a^2} \right] dx = \frac{36}{5} \rho a^3.$$

故  $\bar{x} = \frac{m_y}{m} = -\frac{a}{2}, \quad \bar{y} = \frac{m_x}{m} = \frac{8}{5}a, \quad (\bar{x}, \bar{y}) = \left( -\frac{a}{2}, \frac{8}{5}a \right).$

(2) 由对称性知,  $\bar{y}=0$ . 有

$$\begin{aligned} m &= 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{a \cos \theta}^{b \cos \theta} \rho r dr = \rho \int_0^{\pi/2} (b^2 - a^2) \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{\pi \rho}{4} (b^2 - a^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_y &= 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{a \cos \theta}^{b \cos \theta} \rho r^2 \cos \theta dr = \frac{2}{3} \rho \int_0^{\pi/2} (b^3 - a^3) \cos^4 \theta d\theta \\ &= \frac{2}{3} \rho (b^3 - a^3) \cdot \frac{3}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi \rho}{8} (b^3 - a^3). \end{aligned}$$

故  $\bar{x} = \frac{m_y}{m} = \frac{a^2 + ab + b^2}{2(a+b)}, \quad (\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{a^2 + ab + b^2}{2(a+b)}, 0 \right).$

(3)  $D$  是摆线一拱与  $x$  轴所围成的图形:  $0 \leq x \leq 2\pi a, 0 \leq y \leq y$ . 由对称性知,  $\bar{x} = \pi a$ .

$$m = \int_0^{2\pi a} dx \int_0^y \rho dy = \rho \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = 3\pi \rho a^2,$$

$$m_x = \int_0^{2\pi a} dx \int_0^y \rho y^2 dy = \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 a^3 dt = \frac{5}{2} \pi \rho a^3.$$

故  $\bar{y} = \frac{m_x}{m} = \frac{5}{6}a, \quad (\bar{x}, \bar{y}) = \left( \pi a, \frac{5}{6}a \right).$

**注意** 当  $0 \leq x \leq 2\pi a$  时,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $x, y$  均应用参数式表示.

**例 10** 求曲面  $z = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 = 2az$  ( $a > 0$ ) 所围成的均匀立体的质心坐标.

**解**  $V$  由上半球面与旋转抛物面所围成, 由区域对称性知,  $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$ , 于是

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}a} r dr \int_{r^2/(2a)}^{\sqrt{3a^2-r^2}} \rho dz \\ &= 2\pi \rho \int_0^{\sqrt{2}a} \left[ \sqrt{3a^2 - r^2} - \frac{r^2}{2a} \right] r dr \end{aligned}$$

$$= 2\pi\rho\left[-\frac{1}{3}(3a^2-r^2)^{3/2}-\frac{r^4}{8a}\right]\Big|_0^{\sqrt{2}a}$$

$$= 2\pi\rho(\sqrt{3}-5/6)a^2,$$

$$m_{xy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}a} r dr \int_{r^2/(2a)}^{\sqrt{3a^2-r^2}} \rho z dz$$

$$= 2\pi\rho \int_0^{\sqrt{2}a} \frac{1}{2} \left( 3a^2 - r^2 - \frac{r^4}{4a^2} \right) r dr = \frac{5}{3}\pi\rho a^4.$$

$$\text{故 } \bar{z} = \frac{m_{xy}}{m} = \frac{5a}{6\sqrt{3}-5}, \quad (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left( 0, 0, \frac{5a}{6\sqrt{3}-5} \right).$$

**例 11** (1) 求  $y=x^2$  与  $y=1$  所围成的薄片对直线  $y=-1$  的转动惯量;

(2) 求密度  $\rho=1$  的由  $x^2+y^2+z^2=3(x+2y+3z)-10$  所围成的均匀物体对直线  $l:2x+1=z, y=4$  的转动惯量;

(3) 由  $y=\ln x, y=0, x=e$  所围成的均匀薄板绕直线  $x=l$  旋转时转动惯量最小, 求  $l$ .

**解** (1) 设想将  $x$  轴向上平移距离 1, 于是

$$\begin{aligned} I_{y=-1} &= \iint_{(D)} \rho(y+1)^2 dx dy = \int_{-1}^1 \rho dx \int_{x^2}^1 (y+1)^2 dy \\ &= \frac{\rho}{3} \int_{-1}^1 [8 - (x^2+1)^3] dx = \frac{368}{105} \rho. \end{aligned}$$

(2) 曲面方程化为  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$ , 直线方程化为  $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{0} = \frac{z+1}{2}$ . 可知,  $l$  过点  $(-1, 4, -1)$ , 方向向量  $s = (1, 0, 2)$ . 球心为  $(1, 2, 3)$ , 半径为 2. 球心到直线的距离  $d = \frac{|(2, -2, 4) \times (1, 0, 2)|}{|(1, 0, 2)|} = 2$ , 其中  $(2, -2, 4)$  表示点  $(-1, 4, -1)$

到球心  $(1, 2, 3)$  的向量.

因为转动惯量仅与物体形状、大小、密度及物体与轴的相对位置有关, 故设球体为

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4,$$

$l$  为  $x$  轴或  $y$  轴, 球体半径仍为 2, 于是

$$\begin{aligned}
 I = I_x = I_y &= \frac{1}{2}(I_x + I_y) = \frac{1}{2} \iiint_V (x^2 + y^2 + 2z^2) dx dy dz \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (1 + \cos^2\varphi) r^4 \sin\varphi dr \\
 &= \pi \int_0^{\pi/2} (1 + \cos^2\varphi) \sin\varphi \int_0^{4\cos\varphi} r^4 dr \\
 &= \frac{1024}{5} \pi \int_0^{\pi/2} (\cos^5\varphi + \cos^7\varphi) \sin\varphi d\varphi = \frac{896}{15} \pi.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad I(l) &= \iint_D (x-l)^2 dx dy = \int_1^e dx \int_0^{\ln x} (x-l)^2 dy \\
 &= \int_1^e (x-l)^2 \ln x dx \\
 &\quad \xrightarrow{\text{分部积分}} \frac{1}{3} \left[ \ln x \cdot (x-l)^3 \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2} x^2 l - 3xl^2 - \ln x \cdot l^3 \right) \right] \Big|_1^e \\
 &= l^2 - \frac{1}{2}(e^2 + 1)l + \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}.
 \end{aligned}$$

讨论极值, 因为

$$I'(l) = 2l - (e^2 + 1)/2,$$

令  $I'(l) = 0$ , 则  $l = (e^2 + 1)/4$ .

又  $I''(l) = 2 > 0$ , 故  $l = (e^2 + 1)/4$  为极小值点.

**例 12** 求由  $y=1-x$ ,  $y=1$ ,  $x=1$  所围成的、密度为  $\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  的薄板对位于坐标原点、质量为  $m$  的质点的引力.

**解** 这是一个平面引力问题.

$$\begin{aligned}
 F_x &= mg \iint_D \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\
 &= mg \int_0^1 dy \int_{1-y}^1 \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx
 \end{aligned}$$

$$= mg \int_0^1 \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \right) \bigg|_{1-y}^1 dy = -\pi mg/2.$$

由对称性知  $F_y = -\pi mg/2$ .

故  $F = F_x i + F_y j = -\frac{1}{2} \pi mg (i + j)$ .

**例 13** 求密度为  $\rho$  的均匀柱体:  $x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h$  对位于点  $M_0(0, 0, a)$  ( $a > h$ ) 的、单位质量质点的引力.

**解** 由柱体对称性知,  $F_x = F_y = 0$ , 而

$$\begin{aligned} F_z &= \iiint_{\Pi} k\rho \frac{a-z}{[x^2 + y^2 + (a-z)^2]^{3/2}} dx dy dz \quad (k \text{ 为常数}) \\ &= k\rho \int_0^h (a-z) dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r dr}{[r^2 + (a-z)^2]^{3/2}} \\ &= 2\pi k\rho \int_0^h (a-z) \left[ \frac{1}{a-z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (a-z)^2}} \right] dz \\ &= 2\pi k\rho \int_0^h \left[ 1 - \frac{a-z}{\sqrt{R^2 + (a-z)^2}} \right] dz \\ &= 2\pi k\rho [h + \sqrt{R^2 + (a-h)^2} - \sqrt{R^2 + a^2}]. \end{aligned}$$

**例 14** 形状为  $x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1$  的均匀物体放在水平的桌面上, 当物体静止时, 物体的轴线与桌面的夹角  $\theta$  是多大?

**解** 图 13.28(a) 表示物体处于不稳平衡状态; 图 13.28(b) 表示物体处于平衡状态, 此时重心线通过桌面与物体切点, 切线的法线过物体的重心.

先求重心坐标, 由对称性知,  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ , 而

$$m = \iiint_V dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^1 dz = 2\pi \int_0^1 r(1-r^2) dr = \frac{\pi}{2},$$

$$m_z = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^1 z dz = 2\pi \int_0^1 \left( \frac{1}{2} - \frac{r^4}{2} \right) r dr = \frac{\pi}{3}.$$

故  $\bar{z} = 2/3$ , 重心坐标  $(0, 0, 2/3)$ .

为简单计, 在  $yoz$  平面上考虑角  $\theta$ . 设切点为  $(0, y_0, z_0)$ , 物体边界线为  $z = y^2$ , 则过点  $(y_0, z_0)$  的切线斜率为  $2y_0$ , 法线斜率为

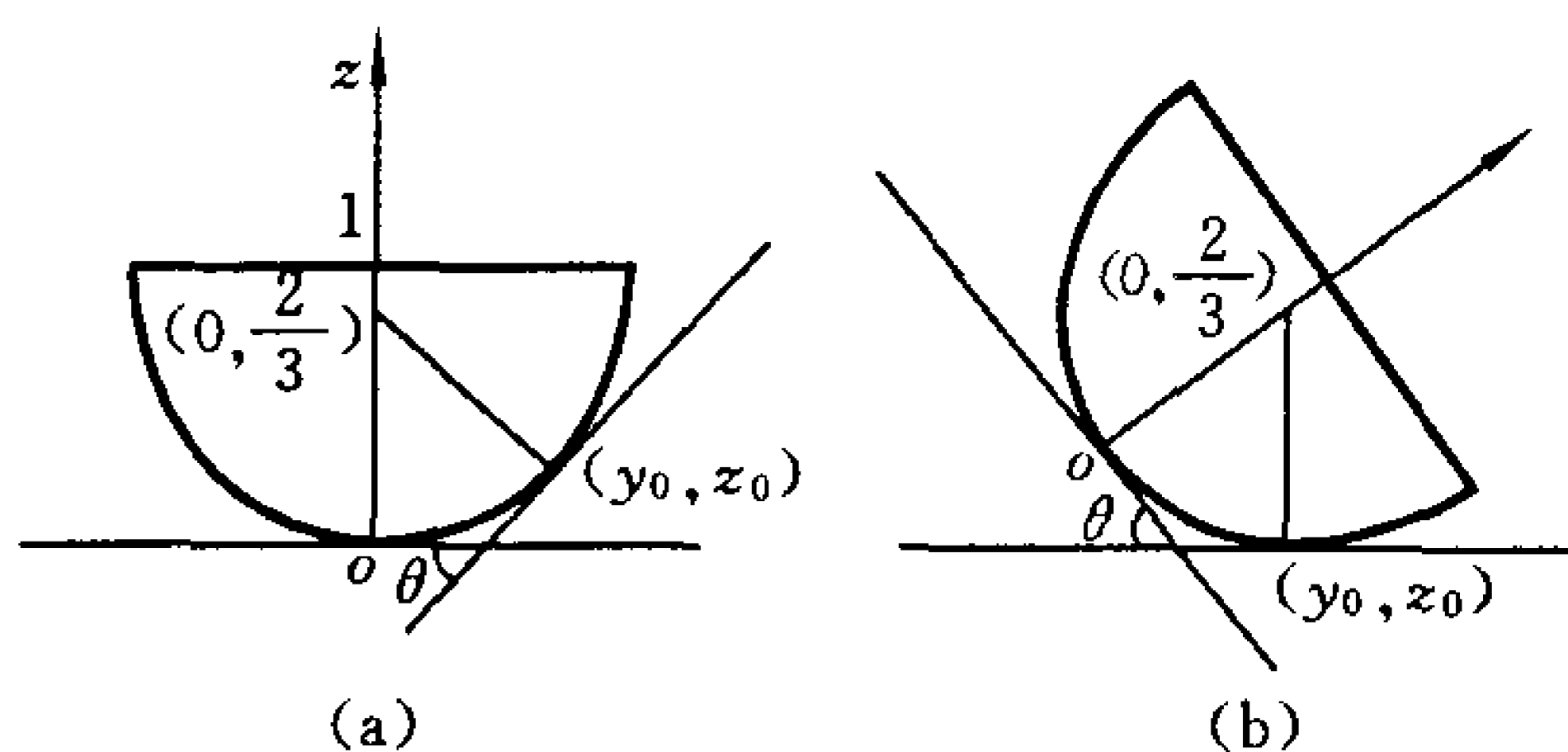


图 13.28

$-1/(2y_0)$ . 法线方程为  $z - z_0 = -(y - y_0)/(2y_0)$ . 由于重心在法线上, 将  $(0, 2/3)$  代入, 解得  $z_0 = 1/6, y_0 = 1/\sqrt{6}$ . 所以

$$\tan\theta = \frac{2/3 - z_0}{y_0} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \theta = \arctan \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

**例 15** 设一高度为  $h(t)$  ( $t$  为时间) 的雪堆在融化中, 雪堆侧面满足方程  $z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)}$  (长度单位厘米, 时间单位小时). 已知体积减小的速率与侧面积成正比 (比例系数 0.9), 问: 高为 130 厘米的雪堆全部融化需多少小时?

**解** 以  $V$  记雪堆体积,  $S$  记侧面积, 则

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{h(t)} dz \iint_{x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}[h^2(t) - h(t)z]} dx dy \\ &= \int_0^{h(t)} \frac{\pi}{2} [h^2(t) - h(t)z] dz = \frac{\pi}{4} h^3(t). \\ S &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy \\ &= \iint_{x^2 + y^2 \leq \frac{h^2(t)}{2}} \sqrt{1 + 16(x^2 + y^2)/h^2(t)} dx dy \\ &= \frac{2\pi}{h(t)} \int_0^{h(t)/\sqrt{2}} [h^2(t) + 16r^2]^{1/2} r dr = \frac{13}{12} \pi h^2(t). \end{aligned}$$



由题设知  $\frac{dV}{dt} = -0.9S$ , 即

$$\frac{3}{4}\pi h^2(t)h'(t) = -\frac{9}{10} \cdot \frac{13}{12}\pi h^2(t),$$

得 
$$h'(t) = -\frac{13}{10} \Rightarrow h(t) = -\frac{13}{10}t + c.$$

由于  $h(0) = 130$ , 故  $c = 130 \Rightarrow h(t) = -\frac{13}{10}t + 130$ .

令  $h(t) \rightarrow 0$ , 得  $t = 100$  (小时), 即高 130 厘米的雪堆全部融化要 100 小时.

## 第五节 含参变量的非正常积分

### 主要内容

#### 一、含参变量的非正常积分

##### 1. 设函数 $f$ 在无界区域

$$E = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y < +\infty\}$$

上,  $\forall$  固定的  $x \in [a, b]$ , 非正常积分  $\int_c^{+\infty} f(x, y)dy$  都收敛, 则其值是  $x$  的函数, 记作

$$I(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y)dy, \quad x \in [a, b].$$

$I(x)$  称为定义在  $[a, b]$  上的含参变量的非正常积分.

2.  $\int_c^{+\infty} f(x, y)dy$  与函数  $I(x) \forall \epsilon > 0, \exists c < N \in \mathbf{R}$ , 使得当  $M > N$  时,  $\forall x \in [a, b]$ , 都有

$$\left| \int_c^M f(x, y)dy - I(x) \right| < \epsilon, \quad \text{即} \quad \left| \int_M^{+\infty} f(x, y)dy \right| < \epsilon,$$

则称非正常积分  $\int_c^{+\infty} f(x, y)dy$  一致收敛于  $I(x)$ .

3. 一致收敛的柯西准则 含参变量的非正常积分  $\int_c^{+\infty} f(x, y)dy$  在  $[a, b]$  上一致收敛的充要条件是:  $\forall \epsilon > 0, \exists c < M \in \mathbf{R}$ , 使得当  $A_1, A_2 > M$  时, 对一切  $x \in [a, b]$ , 都有

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, y)dy \right| < \epsilon.$$

4. 含参变量非正常积分  $\int_c^{+\infty} f(x, y)dy$  在  $[a, b]$  上一致收敛的充要条件是:  $\forall$  递增数列  $\{A_n\} \rightarrow +\infty$  ( $A_1 = c$ ), 函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x, y)dy = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

在  $[a, b]$  上一致收敛.

5. 维尔斯特拉斯判别法(M 判别法) 设有函数  $g(y)$ , 使得

$$|f(x, y)| \leq g(y), a \leq x \leq b, c \leq y < +\infty.$$

若  $\int_c^{+\infty} g(y)dy$  收敛, 则  $\int_c^{+\infty} f(x, y)dy$  在  $[a, b]$  上一致收敛.

6. 连续性 设  $f$  在  $[a, b] \times [c, +\infty]$  上连续, 若  $I(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y)dy$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 则  $I(x)$  在  $[a, b]$  上连续.

7. 可微性 设  $f$  和  $f_x$  在  $[a, b] \times [c, +\infty]$  上连续, 若  $I(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y)dy$  在  $[a, b]$  上收敛,  $\int_c^{+\infty} f_x(x, y)dy$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 则  $I(x)$  在  $[a, b]$  上可微, 且

$$I'(x) = \int_c^{+\infty} f_x(x, y)dy.$$

8. 可积性 设  $f$  在  $[a, b] \times [c, +\infty)$  上连续, 若  $I(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y)dy$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 则  $I(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 且

$$\int_a^b dx \int_c^{+\infty} f(x, y)dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^b f(x, y)dx.$$

设  $f(x, y)$  在  $[a, +\infty) \times [c, +\infty)$  上连续.

(1) 若  $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  关于  $y$  在任何  $[c, d]$  上一致收敛, 则  $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$  关于  $x$  在任何  $[a, b]$  上一致收敛;

(2) 设  $\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy$  或  $\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx$  中有一个收敛, 则

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx.$$

9. 设  $f$  在区域  $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  上有定义, 对  $x$  的某些值,  $y = d$  是函数  $f$  的瑕点, 则称  $\int_c^d f(x, y) dy$  为含参变量非正常积分(无界函数).

10. 若  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > d - c$  ( $\delta > 0$ ), 使得当  $0 < \eta < \delta$  时,  $\forall x \in [a, b]$ , 都有  $\left| \int_{d-\eta}^d f(x, y) dy \right| < \epsilon$ , 则称含参变量非正常积分  $\int_c^d f(x, y) dy$  在  $[a, b]$  上一致收敛.

对  $\int_c^d f(x, y) dy$ , 有类似以上第 3 ~ 8 条的条件与性质成立.

## 二、欧拉积分

1.  $\Gamma$  函数  $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, s > 0,$

B 函数  $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, p > 0, q > 0.$

$\Gamma$  函数和 B 函数统称欧拉积分.

2.  $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{s-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx = I(s) + J(s).$  其中  $I(s)$  当  $0 < s < 1$  时是收敛的无界函数非正常积分,  $J(s)$  当  $s > 0$  时是收敛的无穷限非正常积分.

(1)  $\Gamma(s)$  在定义域  $s > 0$  内连续且可导;

(2)  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \Gamma(m+1) = m!, \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi};$

(3)  $\Gamma(s)$  图形位于  $s$  轴上方, 图形是凸的, 在  $(1, 2)$  间有极小值点.

$$\text{令 } x = y^2, \text{ 则 } \Gamma(s) = 2 \int_0^{+\infty} y^{2s-1} e^{-y^2} dy \quad (s > 0).$$

$$\text{令 } x = py, \text{ 则 } \Gamma(s) = p^s \int_0^{+\infty} y^{s-1} e^{-sy} dy \quad (s > 0, p > 0).$$

3.  $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, p > 0, q > 0$  在定义域内连续.

(1) 具有对称性,  $B(p, q) = B(q, p)$ ;

$$(2) B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1) \quad (p > 0, q > 1);$$

$$B(p, q) = \frac{(p-1)(q-1)}{(p+q-1)(p+q-2)} B(p-1, q-1) \quad (p > 1, q > 1);$$

$$(3) \text{ 令 } x = \cos^2 \varphi, \text{ 则 } B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2q-1} \varphi \cos^{2p-1} \varphi d\varphi.$$

$$\text{令 } x = \frac{1}{1+y}, \text{ 则 } B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy.$$

4.  $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (p > 0, q > 0)$ , 当  $p+q=1$  时, 有余元公式

$$B(p, 1-p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

## 疑难解析

1. 含参变量的非正常积分与一般非正常积分有何不同?

答 一般非正常积分收敛时是一个数量, 而含参变量的非正常积分是参变量的函数. 因为是函数, 所以它就存在在区域上收敛或一致收敛、连续、求导等问题; 因为参变量的存在, 所以还存在极限与积分交换顺序、求导与积分交换顺序以及二重积分交换顺序

等问题. 解题时要认真对待, 仔细考察.

## 方法、技巧与典型例题分析

利用定义、充要条件和魏尔斯特拉斯判别法确定含参变量非正常积分收敛与一致收敛时, 最重要的是认真审验条件, 指出什么情形下不符合条件, 然后再进行判断.

**例 1** 讨论下列含参变量非正常积分在指定区间内的一致收敛性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y} dy, [\delta, +\infty), (\delta > 0) \text{ 与 } (0, +\infty);$$

$$(2) \int_0^{+\infty} e^{-yx} \sin x dx, (0 < y_0 \leq y < +\infty);$$

$$(3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{1+x^2} dx, (-\infty < y < +\infty);$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{\cos x^2}{x^p} dx, (-1, 1).$$

**解** (1) 作代换  $u = xy$ , 则

$$\int_A^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y} dy = \int_{Ax}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du \quad (A > 0),$$

由上册知  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$  收敛, 故  $\forall \epsilon > 0, \exists M > 0$ , 当  $A' > M$  时, 有

$$\left| \int_{A'}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du \right| < \epsilon.$$

取  $A\delta > M$ , 则当  $A > M/\delta$  时,  $\forall x \geq \delta > 0$ , 有

$$\left| \int_A^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y} dy \right| < \epsilon,$$

故  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y} dy$  在  $[\delta, +\infty)$  上一致收敛 ( $\delta > 0$ ).

又由  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$  收敛,  $\forall \epsilon_0 > 0$  与  $M > 0, \exists x > 0$ . 使得

$$\left| \int_{M_x}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du \right| < \epsilon_0,$$

$$\text{即 } \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \epsilon_0 < \int_{M_x}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du < \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du + \epsilon_0,$$

令  $\epsilon_0 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ , 则由上式得

$$\int_M^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y} dy = \int_{M_x}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du > 2\epsilon_0 - \epsilon_0 = \epsilon_0.$$

故知  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y} dy$  在  $(0, +\infty)$  内不一致收敛.

(2) 因为当  $0 < y_0 \leq y < +\infty$  时,  $|e^{-yx} \sin x| \leq e^{-y_0 x}$ , 而  $\int_0^{+\infty} e^{-y_0 x} dx = 1/y_0$  收敛, 所以依 M 判别法知,  $\int_0^{+\infty} e^{-yx} \sin x dx$  在  $(0 < y_0 \leq y < +\infty)$  内一致收敛.

(3) 因为  $\left| \frac{\cos(xy)}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$ , 而  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$  收敛, 所以依 M 判别法知,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{1+x^2} dx$  在  $(-\infty < y < +\infty)$  内一致收敛.

(4) 因为  $\frac{\cos x^2}{x^p}$  在  $x=0$  无界, 所以将积分写为

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x^2}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{\cos x^2}{x^p} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\cos x^2}{x^p} dx = I_1 + I_2.$$

对于  $I_1$ , 因  $\left| \frac{\cos x^2}{x^p} \right| \leq \frac{1}{x^p} \leq \frac{1}{x^{p_1}}$  ( $0 < x \leq 1, p_0 \leq p \leq p_1$ ), 而  $\int_0^1 \frac{dx}{x^{p_1}}$  收敛, 故依 M 判别法知,  $\int_0^1 \frac{\cos x^2}{x^p} dx$  在  $[p_0, p_1]$  上一致收敛.

对于  $I_2$ , 因  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x^2}{x^p} dx = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{(p+1)/2}} dt$ , 而

$$\left| \int_1^A \cos t dt \right| = |\sin A - \sin 1| \leq 2, \quad 1 \leq A \leq +\infty,$$

故一致有界, 而  $\frac{1}{t^{(p+1)/2}}$  关于  $t$  单调减少, 且关于  $p \in [p_0, p_1]$  一致趋向于零. 依狄利克雷判别法知,  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{(p+1)/2}} dt$  在  $[p_0, p_1]$  内一致收敛.

综上所述知,  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x^2}{x^p} dx$  在  $(-1, 1)$  内闭一致收敛.

**例 2** 讨论下列含参变量非正常积分在指定区间上的一致收敛性:

$$(1) \int_0^{+\infty} ye^{-yx} dx, 0 \leq y \leq 1; \quad (2) \int_1^{+\infty} x^ye^{-x} dx, a \leq y \leq b;$$

$$(3) \int_1^{+\infty} \frac{y}{(x+y)^2} dx, 0 \leq y \leq +\infty.$$

**解** (1) 设  $\varepsilon_0 = 1/3 > 0, \forall A > 0, \exists A_0 > A$  和  $y_0 = 1/A_0 \in [0, 1]$ , 使得

$$\left| \int_{A_0}^{+\infty} y_0 e^{-y_0 x} dx \right| = e^{-y_0 A_0} = e^{-1} > \frac{1}{3} = \varepsilon_0,$$

所以  $\int_0^{+\infty} ye^{-yx} dx$  在  $[0, 1]$  不一致收敛.

(2) 当  $a \leq y \leq b$  ( $x > 1$ ) 时,  $0 < x^ye^{-x} \leq x^be^{-x}$ , 而

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot x^be^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b + 2}{e^x} = 2,$$

故  $\int_1^{+\infty} x^be^{-x} dx$  收敛. 依 M 判别法知,  $\int_1^{+\infty} x^ye^{-x} dx$  在  $[a, b]$  上一致收敛.

(3) 设  $\varepsilon_0 = 1/3 > 0, \forall A > 0, \exists A_0 > A$  和  $y_0 = A_0 \in (0, +\infty)$ , 使得

$$\left| \int_{A_0}^{+\infty} \frac{y_0}{(x+y_0)^2} dx \right| = \frac{y_0}{A_0 + y_0} = \frac{A_0}{A_0 + A_0} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0,$$

所以  $\int_1^{+\infty} \frac{y}{(x+y)^2} dx$  在  $(0, +\infty)$  不一致收敛.

**例 3** 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0);$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

**解** 此例用逐次积分法求解比较简单.

(1) 设  $\alpha > \beta$ ,  $\frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} = \int_{\alpha}^{\beta} x e^{-yx^2} dy$ . 因为  $0 \leq x e^{-yx^2} \leq x e^{-\alpha x^2}$  ( $\alpha \leq y \leq \beta$ ), 而  $\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx$  收敛, 故  $\int_0^{+\infty} x e^{-yx^2} dx$  在  $y \in [\alpha, \beta]$  上一致收敛, 所以可以交换积分次序, 即

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} dx \int_{\alpha}^{\beta} x e^{-yx^2} dy = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_0^{+\infty} x e^{-yx^2} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2y} dy = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

(2) 设  $\alpha < \beta$ ,  $\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{2} = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-xy} dy$ . 因为  $0 \leq e^{-xy} \leq e^{-\alpha x}$ , 而  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$  收敛, 故  $\int_0^{+\infty} e^{-xy} dx$  在  $y \in [\alpha, \beta]$  上一致收敛, 所以可以交换积分次序, 即

$$I = \int_0^{+\infty} dx \int_{\alpha}^{\beta} e^{-xy} dy = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_0^{+\infty} e^{-xy} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{y} dy = \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

计算含参变量非正常积分, 可用对参数的积分法、微分法和公式法进行, 具体使用时要根据具体情况选择尽可能简单的方法. 但要注意, 每一过程都要合理, 方能避免出错.

**例 4** 证明付茹兰公式 设  $f(x)$  为连续函数, 且积分  $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$  对任何的  $A > 0$  都有意义, 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a} \quad (a > 0, b > 0).$$

**证**  $\forall A > 0$ , 有

$$\begin{aligned} I &= \lim_{A \rightarrow 0^+} \int_A^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx \\ &= \lim_{A \rightarrow 0^+} \int_A^{+\infty} \frac{f(ax)}{x} dx - \lim_{A \rightarrow 0^+} \int_A^{+\infty} \frac{f(bx)}{x} dx \\ &\stackrel{ax, bx = t}{=} \lim_{Aa \rightarrow 0^+} \int_{Aa}^{+\infty} f(t) \frac{dt}{t} - \lim_{Ab \rightarrow 0^+} \int_{Ab}^{+\infty} f(t) \frac{dt}{t} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \lim_{\substack{Aa \rightarrow 0^+ \\ Ab \rightarrow 0^+}} \int_{Aa}^{Ab} \frac{f(t)}{t} dt = \lim_{\substack{Aa \rightarrow 0^+ \\ Ab \rightarrow 0^+}} f(\xi) \int_{Aa}^{Ab} \frac{dt}{t} \quad (Aa < \xi < Ab) \\
&= \lim_{\substack{Aa \rightarrow 0^+ \\ Ab \rightarrow 0^+}} f(\xi) \ln \frac{b}{a} = f(0) \ln \frac{b}{a}.
\end{aligned}$$

利用这个公式即可得出例 3(2)的结果,只需令  $f(x) = e^{-x}$ .

**例 5** 利用付茹兰公式,计算:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0);$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

**解** (1) 设  $f(x) = \cos x$ , 则  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  连续, 且  $\forall A > 0, \int_A^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$  收敛, 依付茹兰公式, 有

$$I = f(0) \ln \frac{b}{a} = \cos 0 \cdot \ln \frac{b}{a} = \ln \frac{b}{a}.$$

(2) 设  $f(x) = \pi/2 - \arctan x$ , 则  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  连续, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi/2 - \arctan x}{1/x} \stackrel{L'}{=} 1$ , 故  $\forall A > 0$ , 积分  $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$  收敛, 依付茹兰公式, 有

$$I = -f(0) \ln \frac{b}{a} = -\frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}.$$

**注意**  $f(ax) - f(bx) = \arctan bx - \arctan ax$ .

**例 6** 计算  $I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos 2xt dt$ .

**解** 记  $f(x) = e^{-t^2} \cos 2xt$ , 则  $f'_x = -2te^{-t^2} \sin 2xt$ , 且

$$|f_x(x, t)| \leq 2te^{-t^2}, \quad -\infty < x < +\infty, 0 \leq t \leq +\infty.$$

而  $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt$  收敛, 依 M 判别法知,  $\int_0^{+\infty} f_x(x, t) dt$  关于  $x \in \mathbf{R}$  一致收敛. 应用积分号下求导定理, 得

$$I'(x) = -2 \int_0^{+\infty} te^{-t^2} \sin 2xt dt$$

$$= e^{-t^2} \sin 2xt \Big|_0^{+\infty} - 2x \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos 2xt dt = -2xI(x),$$

即  $I'(x)/I(x) = -2x$ . 积分得  $I(x) = ce^{-x^2}$ , 由  $I(0) = \sqrt{\pi}/2$ , 得  $c = \sqrt{\pi}/2$ , 故

$$I(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

例 7 确定  $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha} dx$  的连续范围.

解  $x=0$  可能为瑕点, 将  $I(\alpha)$  改写为

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha} dx = I_1(\alpha) + I_2(\alpha).$$

当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $\frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha-3}}$ , 故当  $\alpha < 4$  时  $I_1(\alpha)$  收敛; 而当  $\alpha > 1$  时,  $I_2(\alpha)$  收敛. 故  $I(\alpha)$  定义域为  $(1, 4)$ .

$\forall [a, b] \subset (1, 4)$ , 当  $0 \leq x \leq 1, a \leq \alpha \leq b < 4$  时, 有

$$\left| \frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha} \right| = \frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha} \leq \frac{\ln(1+x^3)}{x^b},$$

且  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^3)}{x^b} dx$  收敛, 依 M 判别法知,  $I_1(\alpha)$  关于  $\alpha \in [a, b]$  一致收敛. 故  $I_1(\alpha)$  在  $[a, b]$  上连续.

$\forall [a, b] \subset (1, 4)$ , 当  $1 \leq x < +\infty, 1 \leq a \leq \alpha \leq b$  时, 有

$$\left| \frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha} \right| = \frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha} \leq \frac{\ln(1+x^3)}{x^a},$$

且  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^a} dx$  收敛, 依 M 判别法知,  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha} dx$  关于  $\alpha \in [a, b]$  一致收敛, 故  $I_2(\alpha)$  在  $[a, b]$  上连续.

综上所述知,  $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha} dx$  在  $[a, b]$  上连续.

例 8 证明: 若  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  收敛, 则  $\int_0^{+\infty} e^{-xy} f(x) dx$  在  $0 \leq y \leq \beta$  上一致收敛.

证 设  $F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)dt$ , 则当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $F(x) \rightarrow 0$ . 当  $x > X_0$  时, 有  $|F(x)| < \epsilon$ , 故对  $X' > X > X_0$  及一切  $y \geq 0$  有

$$\begin{aligned} \left| \int_X^{X'} f(x)e^{-xy}dx \right| &= \left| F(x)e^{-xy} - y \int_X^{X'} F(x)e^{-xy}dx \right| \\ &\leq \epsilon + \epsilon + y\epsilon \int_X^{X'} e^{-xy}dx < 3\epsilon. \end{aligned}$$

由柯西审敛准则知,  $\int_0^{+\infty} e^{-xy}f(x)dx$  在  $0 \leq y \leq \beta$  上一致收敛.

例 9 利用  $\Gamma$  函数、B 函数计算下列积分:

$$(1) \int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx; \quad (2) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2}dx \quad (a > 0);$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx; \quad (4) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx.$$

解 要找准适当的代换, 将积分化为  $\Gamma$  函数或 B 函数.

$$\begin{aligned} (1) I &= \int_0^1 x^{1/2}(1-x)^{1/2}dx = B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{[\Gamma(3/2)]^2}{\Gamma(3)} = \frac{[\Gamma(1/2)/2]^2}{2!} = \frac{(\sqrt{\pi}/4)^2}{2} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) I &= a^4 \int_0^a \left(\frac{x}{a}\right)^2 \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} d\frac{x}{a} \\ &= a^4 \int_0^1 u^2(1-u^2)^{1/2}du = \frac{a^4}{2} \int_0^1 u(1-u^2)^{1/2}du^2 \\ &= \frac{a^4}{2} \int_0^1 t^{1/2}(1-t)^{1/2}dt = \frac{a^4}{2} B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{a^4}{2} \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\pi a^4}{16}. \end{aligned}$$

$$(3) \text{ 设 } x^4 = t, \text{ 则 } \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-1/4}}{1+t}dt, \text{ 再令 } \frac{t}{1+t} = u, \text{ 得}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \int_0^1 u^{-1/4}(1-u)^{-3/4}du = \frac{1}{4} B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\Gamma(3/4)\Gamma(1/4)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

(4) 设  $\frac{x}{1+x}=t \Rightarrow x=\frac{t}{1-t}, dx=\frac{dt}{(1-t)^2}$ , 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 t^{1/4} (1-t)^{-1/4} dt = B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma(5/4)\Gamma(3/4)}{\Gamma(2)} \\ &= \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

例 10 证明瓦里士公式

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta = \begin{cases} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n=2m, \\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n=2m+1. \end{cases}$$

证 由主要内容二中的 3(3) 知

$$I_n = \frac{\Gamma[(n+1)/2]\Gamma(1/2)}{2\Gamma(n/2+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\Gamma(n/2+1)}.$$

当  $n=2m$  时, 由递推公式得

$$I_{2m} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{(2m-1)!!/2^m \cdot \sqrt{\pi}}{m!} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2};$$

当  $n=2m+1$  时, 由递推公式得

$$I_{2m+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{m!}{(2m+1)!!/2^{m+1} \cdot \sqrt{\pi}} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

例 11 证明勒让德(Legendre)公式

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1}}\Gamma(2s).$$

证 由于

$$\begin{aligned} B(s,s) &= \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{s-1} dx = \int_0^1 \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{1}{2} - x \right)^2 \right]^{s-1} dx \\ &= 2 \int_0^{1/2} \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{1}{2} - x \right)^2 \right]^{s-1} dx, \end{aligned}$$

作代换  $1/2-x=\sqrt{t}/2$ , 得

$$B(s,s) = \frac{1}{2^{2s-1}} \int_0^1 (1-t)^{s-1} t^{-1/2} dt = \frac{1}{2^{2s-1}} B\left(\frac{1}{2}, s\right).$$

由  $\Gamma$  函数与  $B$  函数关系式得

$$B(s, s) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(s)}{\Gamma(2s)} = \frac{1}{2^{2s-1}} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(s)}{\Gamma(s+1/2)} = \frac{1}{2^{2s-1}} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s)}{\Gamma(s+1/2)},$$

整理后即得所证结果.

例 12 计算  $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^4 x dx$ .

解 设  $t = \sin x$ , 则  $I = \int_0^1 t^6 (1-t^2)^{3/2} dt$ . 再作代换  $t = \sqrt{u}$ ,

得

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^1 u^{5/2} (1-u)^{3/2} du = \frac{1}{2} B\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(7/2)\Gamma(5/2)}{\Gamma(6)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5!} \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \frac{3\pi}{512}. \end{aligned}$$

例 13 求下列积分的存在域:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n} dx; \quad (2) \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx.$$

解 (1)  $I \stackrel{\frac{x}{1+x}=t}{=} \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-m-1} dt = B(m, n-m)$ , 故

存在域为  $m > 0, n-m > 0$ , 即  $n > m > 0$ .

$$\begin{aligned} (2) I &\stackrel{\sin x=t}{=} \int_0^1 t^m (1-t^2)^{(n-1)/2} dt \\ &\stackrel{t^2=u}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 u^{\frac{m-1}{2}} (1-u)^{\frac{n-1}{2}} du \\ &= \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right), \end{aligned}$$

故存在域为  $m > -1, n > -1$ .

## 第十四章 曲线积分与曲面积分

### 第一节 第一型曲线积分与 第一型曲面积分

#### 主要内容

1. 设  $\Omega$  是平面或空间的一个可度量的几何体,  $f$  定义在  $\Omega$  上. 对  $\Omega$  作分割  $T$ , 称  $\|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{d(\Omega_i)\}$  为分割  $T$  的细度,  $\forall P_i \in \Omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). 若极限  $\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta\Omega_i = J$ , 且  $J$  与分割  $T$  及点  $P_i$  取法无关, 则称  $f$  在  $\Omega$  上可积,  $J$  为  $f$  在  $\Omega$  上的积分. 记作  $J = \int_{\Omega} f$ .

若  $\Omega$  为平面曲线或空间曲线  $L$ , 则称  $J$  为  $f$  在  $L$  上的第一型曲线积分, 记作  $\int_L f(x, y) ds$  或  $\int_L f(x, y, z) ds$ , 其中  $ds$  为曲线  $L$  的弧微分.

若  $\Omega$  为空间曲面块  $S$ , 则称  $J$  为  $f$  在  $S$  上的第一型曲面积分, 记作  $\iint_S f(x, y, z) ds$ .

#### 2. 第一型曲线积分与曲面积分的性质

(1) 若  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) 在  $\Omega$  上可积,  $c_i$  为常数, 则

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^k c_i f_i = \sum_{i=1}^k \left( c_i \int_{\Omega} f_i \right).$$

(2) 若  $\Omega$  可划分为相连接的小  $\Omega_i$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ), 则

$$\int_{\Omega} f = \sum_{i=1}^k \int_{\Omega_i} f.$$

(3) 若  $f, g$  在  $\Omega$  上可积, 且  $f(P) \leq g(P)$ , 则

$$\int_{\Omega} f \leq \int_{\Omega} g.$$

(4) 若  $f$  和  $|f|$  都在  $\Omega$  上可积, 则

$$\left| \int_{\Omega} f \right| \leq \int_{\Omega} |f|.$$

(5) 若  $f$  在  $\Omega$  上可积, 则存在  $c \in [\inf_{\Omega} f(P), \sup_{\Omega} f(P)]$  使得

$$\int_{\Omega} f = c \Delta \Omega.$$

3. 设有定义在光滑曲线  $L$  上的连续函数  $f$ , 且

$$L: \begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t = [\alpha, \beta],$$

则 
$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\phi(t), \psi(t)] \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

4. 设有定义在光滑面曲  $S$  上的连续函数  $f$ , 且

$$S: Z = Z(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

则 
$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy.$$

## 疑难解析

1. 为什么第一型曲线积分定义中的  $ds$  为曲线  $L$  的弧微分?

答 由积分和的概念, 第一型曲线积分为

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i.$$

由于  $\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$  ( $t_i$  是分割  $T$  的分点所对应的参数值), 由定积分中值定理

$$\Delta s_i = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \Delta t_i,$$

故弧长  $\Delta s$  的近似值就用弧微分表示为

$$ds = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt,$$

从而与第一型曲线积分计算公式一致.

## 方法、技巧与典型例题分析

在计算第一型曲线积分时要注意, 当曲线以不同形式方程给出时,  $ds$  的表示形式不同; 同时要注意利用曲线的对称性、方程形式的转换和定积分的方法与技巧, 注意第一型曲面积分与二重积分的不同、曲面定义域的求取以及  $ds$  的转化, 注意二重积分方法与技巧的利用.

### 一、第一型曲线积分的计算与应用

由于弧长一定是正值, 故化为定积分后上限一定要大于下限,  $ds$  的计算一定要正确.

例 1 计算下列曲线积分:

(1)  $\oint_L [(x+2)^2 + (y-3)^2] ds$ ,  $L$  为  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  与  $x + y + z = 0$  的交线 ( $a > 0$ );

(2)  $\oint_L (2x^2 + 3y^2) ds$ ,  $L$  为  $x^2 + y^2 = 2(x+y)$ ;

(3)  $\oint_L xy ds$ ,  $L$  为  $x = a \cos t, y = b \sin t$  ( $0 \leq t \leq \pi/2$ );

解 (1) 由曲线的对称性, 得

$$\begin{aligned} \oint_L x^2 ds &= \oint_L y^2 ds = \oint_L z^2 ds = \frac{1}{3} \oint_L (x^2 + y^2 + z^2) ds \\ &= \frac{1}{3} \oint_L a^2 ds = \frac{1}{3} a^2 \cdot 2\pi a = \frac{2}{3} \pi a^3, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\oint_L x ds &= \oint_L y ds = \oint_L z ds = \frac{1}{3} \oint_L (x + y + z) ds \\ &= \frac{1}{3} \oint_L 0 ds = 0,\end{aligned}$$

故 
$$\begin{aligned}I &= \oint_L (x^2 + y^2) ds + \oint_L (4x - 6y) ds + 13 \oint_L ds \\ &= 4\pi a^3/3 + 0 + 13 \cdot 2\pi a = \pi a(4a^2/3 + 26).\end{aligned}$$

(2) 令  $x = 1 + \sqrt{2} \cos t, y = 1 + \sqrt{2} \sin t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ), 则  $ds = \sqrt{2} dt$ , 于是

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{2\pi} [10 + 2\sqrt{2}(2\cos t + 3\sin t) - \cos 2t] \sqrt{2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} 10\sqrt{2} dt = 20\sqrt{2}\pi.\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\pi/2} ab \cos t \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= \frac{ab}{2(a^2 - b^2)} \int_0^{\pi/2} \sqrt{(a^2 - b^2) \sin^2 t + b^2} d[(a^2 - b^2) \sin^2 t] \\ &= \frac{ab}{2(a^2 - b^2)} \cdot \frac{2}{3} [(a^2 - b^2) \sin^2 t + b^2]^{3/2} \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}.\end{aligned}$$

**例 2** 计算下列曲线积分:

- (1)  $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$ ,  $L$  由曲线  $r = a, \theta = 0, \theta = \frac{\pi}{4}$  所围成;
- (2)  $\int_L |y| ds$ ,  $L$  为双纽线  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  的弧;
- (3)  $\int_L (x^{4/3} + y^{4/3}) ds$ ,  $L$  为内摆线  $x^{4/3} + y^{4/3} = a^{4/3}$  的弧.

**解** (1)  $L$  由  $L_1: r = a, L_2: \theta = 0, L_3: \theta = \pi/4$  三组组成, 可以求得  $ds$  分别为  $ad\theta, dr, dr$ , 于是

$$I = \int_0^{\pi/4} e^a d\theta + \int_0^a e^r dr + \int_0^a e^3 dr = 2(e^a - 1) + \frac{1}{4}\pi a e^a.$$

(2)  $L$  的极坐标方程为  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ ,  $ds = \frac{a d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$ , 由曲线的对称性, 得

$$I = 4 \int_0^{\pi/4} a \sqrt{\cos 2\theta} \cdot \sin \theta \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = 2a^2(2 - \sqrt{2}).$$

(3)  $ds = \sqrt{1 + y_x'^2} dx = (a/x)^{1/3} dx$ , 由对称性, 得

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^a [x^{4/3} + (a^{2/3} - x^{2/3})^2] (a/x)^{1/3} dx \\ &= 4a^{1/3} \int_0^a (2x + a^{4/3} x^{-1/3} - 2a^{2/3} x^{1/3}) dx = 4a^{7/3}. \end{aligned}$$

若令  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ , 则  $ds = 3a \cos t \sin t dt$ , 得

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^{\pi/2} a^{4/3} (\cos^4 t + \sin^4 t) 3a \cos t \sin t dt \\ &= 24a^{7/3} \int_0^{\pi/2} \sin^5 t \cos t dt = 4a^{7/3}. \end{aligned}$$

**例 3** 求空间曲线  $x = a \arcsin \frac{x}{a}$ ,  $z = \frac{a}{4} \ln \frac{a-x}{a+x}$  从  $O(0, 0, 0)$  到  $A(x_0, y_0, z_0)$  的弧长.

**解**  $ds = \frac{3a^2 - 2x^2}{2(a^2 - x^2)} dx$  ( $|x_0| < a$ ). 当  $x_0 > 0$  时, 有

$$I = \int_0^{x_0} \frac{3a^2 - 2x^2}{2(a^2 - x^2)} dx = \frac{a}{4} \ln \frac{a+x_0}{a-x_0} - x_0 = |z_0| + |x_0|;$$

当  $x_0 < 0$  时, 有

$$I = \int_{x_0}^0 \frac{3a^2 - 3x^2}{2(a^2 - x^2)} dx = -\frac{a}{4} \ln \frac{a+x_0}{a-x_0} - x_0 = |z_0| + |x_0|.$$

故, 只要  $|x_0| < a$ , 总有  $s = |z_0| + |x_0|$ .

**例 4** 计算圆柱面  $x^2 + y^2 = R^2$  界于  $xoy$  平面与曲面  $z = R + x^2/R$  之间的一块面积 ( $R > 0$ ).

**解** 由第一型曲线积分的几何意义知, 面积  $S$  等于被积函数为  $Z = R + x^2/R$ , 积分路线为  $x^2 + y^2 = R^2$  的第一型曲线积分的值,

$$S = \int_L f(x, y) ds = 4 \int_0^{\pi/2} \left( R + \frac{R^2 \cos^2 \theta}{R} \right) R d\theta$$

$$= 4R^2 \int_0^{\pi/2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta = 3\pi R^2.$$

**例 5** 计算球面上的三角形  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x > 0, y > 0, z > 0$  的围线的质心坐标 ( $\rho = 1$ ).

**解** 由对称性知  $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$ . 围线长为  $s = 3 \left( \frac{1}{4} \cdot 2\pi a \right) = \frac{3}{2} \pi a$ .

球面上三条曲边的球坐标方程为

$$x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, z = 0, 0 \leq \theta \leq \pi/2;$$

$$x = a \cos \varphi, y = 0, z = a \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi/2;$$

$$x = 0, y = a \cos \varphi, z = a \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

故 
$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\pi/2} a \cos \theta \cdot a d\theta + \int_0^{\pi/2} a \cos \varphi \cdot a d\varphi}{\left( \frac{3}{2} \pi a \right)}$$

$$= 2a^2 / \left( \frac{3}{2} \pi a \right) = \frac{4a}{3\pi},$$

即, 质心坐标  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left( \frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi} \right)$ .

**例 6** 求螺线  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = ht/(2\pi)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) 一支对于坐标轴的转动惯量.

**解** 
$$ds = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + h^2/(4\pi^2)} dt = \frac{\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}}{2\pi} dt.$$

$$\begin{aligned} I_x &= \int_L (y^2 + z^2) ds + \int_0^{2\pi} \left( a^2 \sin^2 t + \frac{h^2 t^2}{4\pi^2} \right) \frac{\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}}{2\pi} dt \\ &= \frac{a^2}{2} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} + \frac{h^2}{8\pi^3} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} \cdot \frac{1}{3} (2\pi)^3 \\ &= \left( \frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= \int_L (x^2 + z^2) ds = \int_0^{2\pi} \left( a^2 \cos^2 t + \frac{h^2 t^2}{4\pi^2} \right) \frac{\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}}{2\pi} dt \\ &= \frac{a^2}{2} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} + \frac{h^2}{8\pi^3} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} \cdot \frac{1}{3} (2\pi)^3 \\ &= \left( \frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}, \end{aligned}$$

$$I_z = \int_L (x^2 + y^2) ds = \int_0^{2\pi} a^2 \frac{\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}}{2\pi} dt = a^2 \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}.$$

## 二、第一型曲面积分的计算与应用

第一型曲面积分又称为对面积的曲面积分,是一个标量,因此不需要区分曲面的侧. 由于  $dS$  总是正值,所以化为二重积分时,积分上限应大于下限.

例 7 计算下列曲面积分:

(1)  $\iint_S (x + y + z) dS$ ,  $S$  为平面  $y + z = 5$  被柱面  $x^2 + y^2 = 25$  截得的部分;

(2)  $\iint_S z^2 dS$ ,  $S$  为锥面  $x = r \cos \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \varphi$  ( $0 \leq r \leq R$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 < \varphi < \pi/2$ ) 的部分;

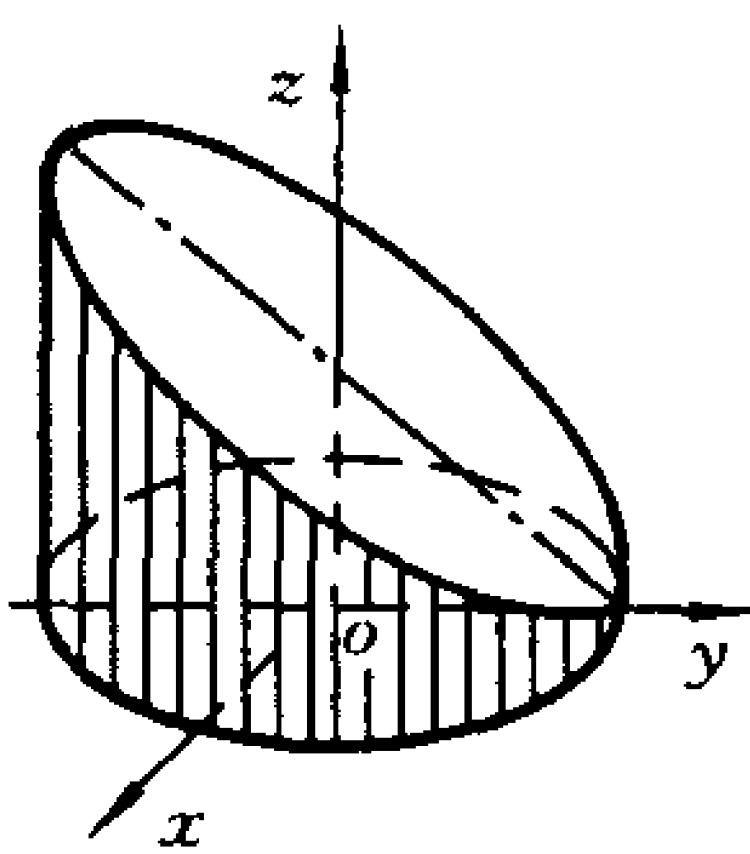


图 14.1

(3)  $\iint_S z dS$ ,  $S$  为螺旋面  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = v$  的一部分,  $0 \leq u \leq a$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$ .

解 (1) 如图 14.1 建立坐标系. 因为  $z = 5 - y$ , 所以  $dS = \sqrt{1 + (-1)^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy$ , 于是

$$I = \iint_{D_{xy}} (x + y + 5 - y) \sqrt{2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^5 \sqrt{2} (5 + r \cos \theta) r dr$$

$$= 125 \sqrt{2} \pi + 0 = 125 \sqrt{2} \pi.$$

(2) 从  $x, y, z$  中消去  $r$  和  $\theta$ , 得  $z^2 \tan^2 \varphi = x^2 + y^2$ , 故  $D_{xy}$  为  $x^2 + y^2 \leq R^2 \sin^2 \varphi$ ,  $dS = \frac{1}{\sin \varphi} dx dy$ , 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R \sin \varphi} \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} \cdot \frac{r}{\sin \varphi} dr \\ &= 2\pi \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^3 \varphi} \int_0^{R \sin \varphi} r^3 dr = \frac{\pi}{2} R^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi. \end{aligned}$$

(3) 如图 14.2 建立坐标系. 因为  $E = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$ ,  $F =$

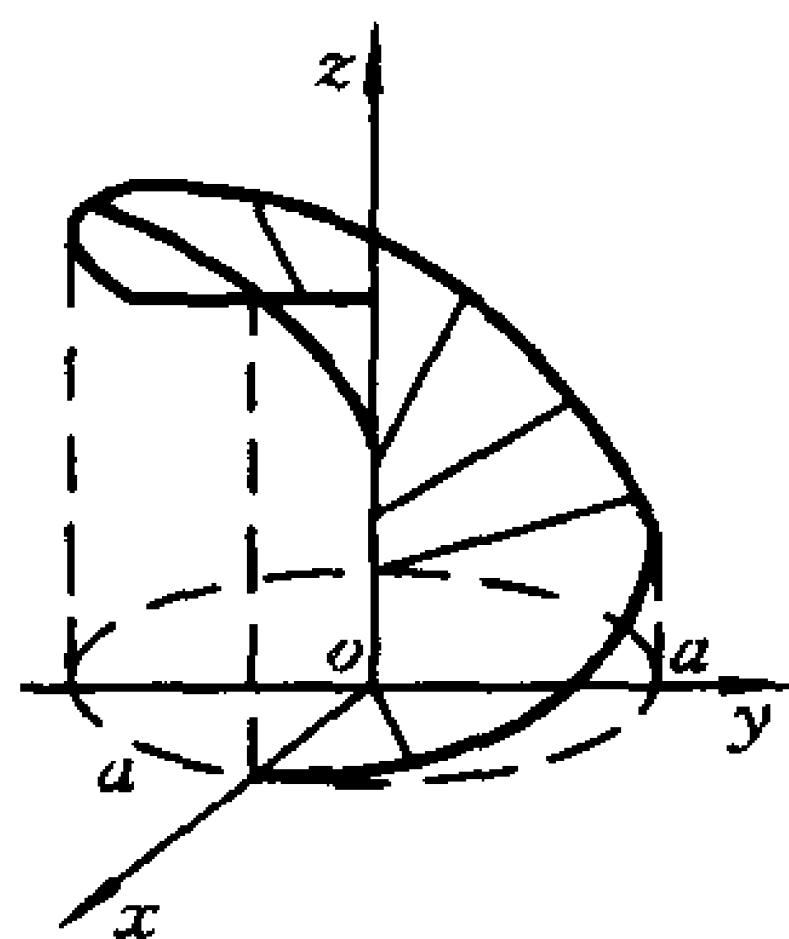


图 14.2

$-u \sin v \cos v + u \sin v \cos v = 0$ ,  $G = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + 1 = 1 + u^2$ , 所以,  $dS = \sqrt{EG - F^2} du dv$

$= \sqrt{1 + u^2} du dv$ , 于是

$$I = \iint_D \sqrt{1 + u^2} du dv = \int_0^{2\pi} v dv \int_0^a \sqrt{1 + u^2} du$$

$$= 2\pi^2 \left[ \frac{u}{2} \sqrt{1 + u^2} + \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) \right] \Big|_0^a$$

$$= \pi^2 [a \sqrt{1 + a^2} + \ln(a + \sqrt{1 + a^2})].$$

例 8 计算下列曲面积分:

(1)  $F(t) = \iint_S f(x, y, z) dS$ ,  $S$  为  $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ ; 当  $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$  时  $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ , 当  $z < \sqrt{x^2 + y^2}$  时  $f(x, y, z) = 0$ ;

(2)  $\iint_S (ax + by + cz + d^2) dS$ ,  $S$  为  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

解 (1) 将  $S$  按  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  分为两部分, 于是

$$F(t) = \iint_{S_1} (x^2 + y^2) dS + \iint_{S_2} 0 dS.$$

其中  $S_1$  为  $x^2 + y^2 + z^2 = t^2, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ . 此时  $dS = t^2 \sin \varphi d\theta d\varphi$ ,  $x^2 + y^2 = t^2 \sin^2 \varphi$ , 于是

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} t^2 \sin^2 \varphi \cdot t^2 \sin \varphi d\varphi \\ &= 2\pi t^4 \int_0^{\pi/4} (1 - \cos^2 \varphi) d(-\cos \varphi) = \frac{1}{6} (8 - 5\sqrt{2}) \pi t^4. \end{aligned}$$

(2) 由对称性与奇偶性并利用轮换对称性, 有

$$\begin{aligned} I &= d^2 \iint_S dS + (a^2 + b^2 + c^2) \iint_S x^2 dS \\ &= d^2 \cdot 4\pi R^2 + \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2) \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= d^2 \cdot 4\pi R^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)R^2 \cdot 4\pi R^2 \\
 &= 4\pi R^2 \left[ d^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)R^2 \right].
 \end{aligned}$$

**例 9** 求高为  $2h$ 、半径为  $R$ 、质量均匀的正圆柱对圆柱中心轴与中央横截面一条直径的转动惯量.

**解** 如图 14.3 建立坐标系, 则  $dS = \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} dy dz$ , 于是, 对圆柱中心轴的转动惯量即  $I_z$ . 但也可以不用化为二重积分, 得

$$I_z = \rho \iint_S (x^2 + y^2) dS = \rho R^2 \iint_S dS = 4\rho R^3 h \pi.$$

这里  $S$  是圆柱的侧面, 故  $\iint_S dS = 4\pi R h$ .

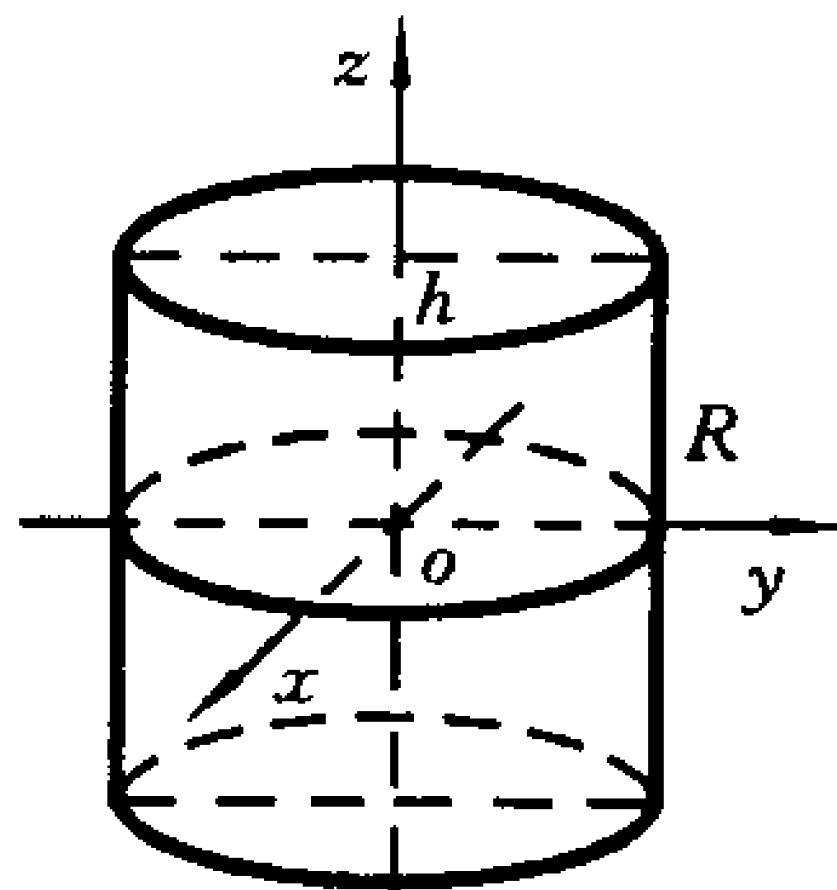


图 14.3

求对中央横截面一条直径的转动惯量, 即求  $I_x$  或  $I_y$ .

$$\begin{aligned}
 I_x &= \iint_S \rho(y^2 + z^2) dS = 2\rho \int_{-R}^R dy \int_{-h}^h (y^2 + z^2) \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} dz \\
 &= 4\rho h R \int_{-R}^R \frac{y^2 dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} + \frac{4}{3} \rho R h^3 \int_{-R}^R \frac{dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} \\
 &= 4\rho h \cdot \frac{\pi}{2} R^3 + \frac{4}{3} \pi \rho R h^3 = 2\pi h \rho R \left( R^2 + \frac{2}{3} h^2 \right).
 \end{aligned}$$

**例 10** 设球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  上的密度等于点到  $xoy$  平面的距离, 求球面被  $x^2 + y^2 = ax$  截下部分曲面的重心.

**解** 由曲面对称性知,  $\bar{y} = \bar{z} = 0$ . 球面上半部曲面为  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ , 故  $dS = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy$ ; 截得曲面在  $xoy$  面上投影为  $(x - a/2)^2 + y^2 = a^2/4$ , 故

$$M = 2 \iint_{S_1} |z| dS = 2 \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

$$= 2a \iint_{D_{xy}} dx dy = 2a \cdot \pi \frac{a^2}{4} = \frac{\pi}{2} a^3.$$

这里  $S_1$  是截得曲面中位于上半球面的部分.

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iint_S |z| x dS = 2 \iint_{S_1} x z dS \\ &= 2 \iint_{D_{xy}} x \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= 2a \iint_{D_{xy}} x dx dy = 2a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{a \cos \theta} r \cos \theta \cdot r dr \\ &= \frac{4}{3} a^4 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = \frac{\pi}{4} a^2. \end{aligned}$$

故 
$$\bar{z} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\pi a^2}{4} / \frac{\pi a^3}{2} = \frac{1}{2a}.$$

## 第二节 第二型曲线积分

### 主要内容

1. 设  $P, Q$  为定义在光滑或按段光滑平面有向曲线  $L$  上的函数,  $\forall T$ , 把  $L$  分成  $n$  个小弧段  $\widehat{M_{i-1}m_i}$ . 这里  $M_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$ ,  $M_i(x_i, y_i)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ . 记各弧段长为  $\Delta S_i$ , 分割的细度为  $\|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta S_i\}$ ,  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ .  $(\xi_i, \eta_i)$  为  $\widehat{M_{i-1}M_i}$  上任一点. 若极限

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i$$

存在且与分割  $T$  及点  $(\xi_i, \eta_i)$  的取法无关, 则称此极限为函数  $P, Q$

沿有向曲线  $L$  的第二型曲线积分,记作  $\int_L Pdx+Qdy$ .

若记  $F(x,y)=(P(x,y)+Q(x,y)), dS=(dx,dy)$ , 则有向量形式  $\int_L FdS$ .

2. 设  $L: x=\varphi(t), y=\psi(t), t\in[\alpha,\beta]$  为  $[\alpha,\beta]$  上光滑或按段光滑的平面曲线.  $P, Q$  为  $L$  上的连续函数, 则沿  $L$  从  $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$  到  $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$  的第二型曲线积分为

$$\begin{aligned} & \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \\ &= \int_a^\beta [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]dt. \end{aligned}$$

## 疑难解析

### 1. 第二型曲线积分与第一型曲线积分有什么不同?

答 第二型曲线积分又称为对坐标的曲线积分, 它与曲线的方向有关. 因此, 在化为定积分计算时, 应该是下限对应于起点, 上限对应于终点, 而不论其大小; 在分段求积时, 要注意分点的衔接.

第二型曲线积分也可以化为定积分来计算, 还可以利用原函数以及化为第一型曲线积分来计算. 例如, 计算

$$\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}, \quad L \text{ 为 } x^2 + y^2 = a^2 \text{ 逆向.}$$

若令  $x=acost, y=asint, 0\leq t\leq 2\pi$ , 则

$$I = \frac{1}{a^2} \int_L xdy - ydx = \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t) dt = 2\pi.$$

因为  $\theta = \arctan \frac{y}{x}, d\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ , 所以

$$I = \int_L d\theta = \theta \Big|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

若令  $r = xi + yj, r = |r|$ , 则



$$\begin{aligned}
I &= \oint_L \frac{x \cos(\tau, y) - y \cos(\tau, x)}{x^2 + y^2} dS \\
&= \oint_L \frac{x \cos(n, x) - y \cos(n, y)}{x^2 + y^2} dS \\
&= \oint_L \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2} dS = \frac{1}{a} \int_L dS = \frac{1}{a} 2\pi a = 2\pi.
\end{aligned}$$

在验证积分与路线无关后,可选择比较简单的路径计算.在满足格林公式或斯托克斯公式条件时,可利用公式计算.所以,第二型曲线积分要比第一型曲线积分复杂.

## 2. 第二型曲线积分与第一型曲线积分有什么联系?

答 两类曲线积分来自不同的物理原型,有不同的特性,但在规定了曲线方向后,两类曲线积分可以相互转化.

若  $L: x=x(s), y=y(s), 0 \leq s \leq t$ .  $(t, x), (t, y)$  分别表示切线方向  $t$  与  $x$  轴和  $y$  轴正向的夹角.  $P(x, y)$  和  $Q(x, y)$  是曲线  $L$  上的连续函数,则

$$\begin{aligned}
&\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\
&= \int_L [P(x, y) \cos(t, x) + Q(x, y) \cos(t, y)] ds.
\end{aligned}$$

## 方法、技巧与典型例题分析

在计算第二型曲线积分时,要特别注意:(1)曲线的方向、起点与终点及分段点;(2)曲线是否经过或绕某个不连续点;(3)曲线是否封闭;(4)曲线是否满足格林公式条件;(5)曲线是否满足与路径无关条件.进行定积分计算时应尽量利用已有方法、技巧与结果.

例 1 计算下列曲线积分:

(1)  $\oint x^2 y dx + y^3 dy$ ,  $L$  沿  $y^3 = x^2$  和  $y = x$  所围成的封闭曲线正向;

(2)  $\int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$ ,  $L$  为抛物线  $y = x^2$  上对应  $x$  从  $-1$  到  $1$  的一段;

(3)  $\int_L xdx + ydy + (x + y - 1)dz$ ,  $L$  为由点  $(1, 1, 1)$  到点  $(1, 3, 4)$  的直线段.

**解** 本例可用定积分计算.

(1)  $L = L_1 + L_2$ ,  $L_1$  为  $y^3 = x^2$ ,  $x$  从  $1$  到  $0$ ;  $L_2$  为  $y = x$ ,  $x$  从  $0$  到  $1$ . 于是

$$\int_{L_1} x^2 y dx + y^3 dy = \int_1^0 x^2 \cdot x^{2/3} dx + \int_1^0 y^3 dy = -\frac{23}{44},$$

$$\int_{L_2} x^2 y dx + y^3 dy = \int_0^1 x^2 \cdot x dx + \int_0^1 y^3 dy = \frac{1}{2}.$$

故 
$$\oint_L x^2 y dx + y^3 dy = -\frac{1}{44}.$$

$$\begin{aligned} (2) I &= \int_{-1}^1 (x^2 - 2x \cdot x^2) dx + (x^4 - 2x \cdot x^2) 2x dx \\ &= \int_{-1}^1 (x^2 - 4x^4) dx = 2 \int_0^1 (x^2 - 4x^4) dx = -\frac{14}{15}. \end{aligned}$$

(3) 直线的参数方程为:  $x = 1, y = 1 + 2t, z = 1 + 3t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), 于是

$$I = \int_0^1 [1 + (1 + 2t) \cdot 2 + 3(1 + 2t)] dt = \int_0^1 (5 + 10t) dt = 10.$$

**例 2** 计算下列曲线积分:

(1)  $\oint_L (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$ ,  $L$  为  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, y = \sqrt{3}x$ , 从  $x$  轴正向看时圆周沿逆向绕行;

(2)  $\oint_L \frac{xdy - ydx}{[(ax + \beta y)^2 + (\gamma x + \delta y)^2]^n}$  ( $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ),  $L$  为椭圆  $(ax + \beta y)^2 + (\gamma x + \delta y)^2 = 1$  的逆时针方向.

**解** 选择好参数方程是解题的关键.

(1) 将  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  表示为  $r = 1, y = \sqrt{3}x$  表示为  $\theta =$

$\pi/3$ , 则  $L$  为  $x = \frac{1}{2}\sin\theta, y = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta, z = \cos\theta, \theta$  从  $2\pi \rightarrow 0$ , 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_{2\pi}^0 \left[ \left( \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \cos\theta \right) \cdot \frac{1}{2}\cos\theta \right. \\ &\quad + \left( \cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta \right) \left( -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta \right) \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \right) (-\sin\theta) \right] d\theta \\ &= \int_{2\pi}^0 \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)d\theta = (1 - \sqrt{3})\pi. \end{aligned}$$

(2)  $L$  的参数方程为  $\alpha x + \beta y = \cos t, \gamma x + \delta y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ ,

则  $x = \frac{1}{\alpha\delta - \gamma\beta}(\delta\cos t - \beta\sin t), y = \frac{1}{\alpha\delta - \gamma\beta}(\alpha\sin t - \gamma\cos t)$ , 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha\delta - \gamma\beta}(\delta\cos t - \beta\sin t) d\left[ \frac{1}{\alpha\delta - \gamma\beta}(\alpha\sin t - \gamma\cos t) \right] \\ &\quad - \int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha\delta - \gamma\beta}(\alpha\sin t - \gamma\cos t) d\left[ \frac{1}{\alpha\delta - \gamma\beta}(\delta\cos t - \beta\sin t) \right]. \end{aligned}$$

由  $(0, 2\pi)$  内三角函数系的正交性, 可得

$$I = \frac{1}{(\alpha\delta - \gamma\beta)^2} \int_0^{2\pi} (\alpha\delta - \gamma\beta) dt = \frac{2\pi}{\alpha\delta - \gamma\beta}.$$

例 3 证明: 曲线积分有估计式

$$\left| \int_L Pdx + Qdy \right| \leq LM,$$

其中  $L$  为积分路径长度,  $M = \max \sqrt{P^2 + Q^2}$  (在  $L$  上).

证 由两类曲线积分的联系, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_L Pdx + Qdy \right| &= \left| \int_L (P\cos\alpha + Q\sin\alpha) ds \right| \\ &\leq \int_L |P\cos\alpha + Q\sin\alpha| ds. \end{aligned}$$

而  $(P\cos\alpha + Q\sin\alpha)^2 = P^2\cos^2\alpha + Q^2\sin^2\alpha + PQ2\sin\alpha\cos\alpha$ ,

$0 \leq (P\sin\alpha - Q\cos\alpha)^2 = P^2\sin^2\alpha + Q^2\cos^2\alpha - PQ2\sin\alpha\cos\alpha$ ,

则  $(P\cos\alpha + Q\sin\alpha)^2 \leq P^2 + Q^2$ , 从而

$$|P\cos\alpha + Q\sin\alpha| \leq \sqrt{P^2 + Q^2} \leq M.$$

于是  $\left| \int_L Pdx + Qdy \right| \leq M \int_L ds = LM.$

例 4 若  $f(u)$  为连续函数,  $L$  为按段光滑的封闭曲线, 证明:

$$\oint_L f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = 0.$$

证 令  $F(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2+y^2} f(u)du$ , 由  $f(u)$  的连续性有,  $F'_x(x, y) = xf(x^2 + y^2)$ ,  $F'_y(x, y) = yf(x^2 + y^2)$ . 显然  $F'_x$  和  $F'_y$  是连续函数, 故  $F(x, y)$  可微, 且有

$$\begin{aligned} dF(x, y) &= xf(x^2 + y^2)dx + yf(x^2 + y^2)dy \\ &= f(x^2 + y^2)(xdx + ydy). \end{aligned}$$

于是,  $\forall (x_0, y_0) \in L$ , 由于  $L$  是封闭的, 所以

$$\oint_L f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = F(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)}^{(x_0, y_0)} = 0.$$

例 5 方向为纵轴的负向、大小等于作用点的横坐标平方的力构成一力场. 求质量为  $m$  的点沿曲线  $1-x=y^2$  从点  $(1, 0)$  移到点  $(0, 1)$  所做的功.

解 因为  $F=0i-x^2j$ , 所以

$$W = \int_L 0dx - x^2dy = - \int_L x^2dy = - \int_0^1 (1-y^2)^2 dy = - \frac{8}{15}.$$

即场力做负功, 大小为  $8/15$ .

例 6 已知力场  $F=yzi+zxj+xyk$ , 问将质点从原点沿直线移到曲线  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的第一卦限部分上哪一点做的功最大, 并求最大功.

解  $\forall P_0(x_0, y_0, z_0) \in \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , 直线方程  $L$  为  $x=x_0t, y=y_0t, z=z_0t, t$  从 0 变到 1, 则

$$W = \int_L yz dx + zx dy + xy dz = 3x_0 y_0 z_0 \int_0^1 t^2 dt = x_0 y_0 z_0.$$

由  $P_0$  的任意性知,  $W = xyz$ .

最大功为  $W = xyz$  在条件  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  下的极值, 据第十一章第二节例 14 结果知, 最大值点

$$(x, y, z) = \left( \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}} \right),$$

故最大功  $W_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{9} abc$ .

例 7 说明对第二型曲线积分, “积分中值定理”不再成立.

答 如果有积分中值定理, 应该是这样的: 若  $f(P)$  在  $L$  上连续, 则存在点  $P^* \in L$ , 使得

$$\int_{L^+} f(P) dx = f(P^*) \int_{L^+} dx.$$

设  $L$  为圆周, 由对称性知  $\int_{L^+} dx = 0$ , 故上式右边对一切  $f$  都等于零. 但是, 当  $f(P) = f(x, y) = y$ ,  $L^+$  为  $x^2 + y^2 = 2y$  时 (逆时针向), 有

$$\int_{L^+} f(P) dx = \int_{L^+} y dx = -\pi \neq 0.$$

推出矛盾, 故积分中值定理不成立.

### 第三节 格林公式 曲线积分与路径的无关性

#### 主要内容

1. 若函数  $P, Q$  在闭区域  $D = \mathbf{R}^2$  上连续, 且有一阶连续偏导数, 则有格林 (Green) 公式

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy$$

成立,其中  $L$  为区域  $D$  的边界曲线,取正方向.

2. 设  $D \subset \mathbf{R}^2$  是单连通闭区域. 若函数  $P, Q$  在  $D$  内连续,且有一阶连续偏导数,则以下四个命题等价:

(1)  $\forall$  光滑闭曲线  $L \in D$ ,  $\oint_L P dx + Q dy = 0$ ;

(2)  $\forall$  光滑曲线  $L \in D$ ,  $\int_L P dx + Q dy$  与积分路线无关,只与  $L$  的起点和终点有关;

(3)  $P dx + Q dy$  必为  $D$  内某函数  $u(x, y)$  的全微分,且  $du = P dx + Q dy$ ;

(4) 在  $D$  内每一点,有  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ .

## 疑难解析

1. 格林公式有什么意义? 它应用在哪些方面?

答 格林公式给出了有限条按段光滑的封闭曲线上的曲线积分与它们所包围的区域上的二重积分的关系. 当区域  $D$  为单连通域时,  $L$  正向即逆时针方向; 当  $D$  为多连通域时,  $D$  的外边界为逆时针方向, 内边界为顺时针方向.  $P, Q$  要求在区域  $D$  内直到边界  $L$  上连续, 且有连续的偏导数.

利用格林公式可以将封闭曲线上的线积分化为区域上的二重积分来计算; 对开口曲线上的线积分可以补上一段曲线后变成封闭曲线, 再应用格林公式.

格林公式的一个简单应用就是求面积, 即

$$\iint_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx.$$

格林公式在力学中还有许多应用.

2. 怎样求  $Pdx+Qdy=du$  的函数  $u(x,y)$ ?

答 常用折线法、偏积分法和凑微分法.

(1) 折线法. 由  $u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ , 得

$$u(x,y) = \int_{x_0}^x P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x,y)dy$$

或 
$$= \int_{y_0}^y Q(x_0,y)dy + \int_{x_0}^x P(x,y)dx.$$

(2) 偏积分法. 因为  $P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}$ , 故

$$u(x,y) = \int_0^x \frac{\partial u}{\partial x} dx + g(y) = \int_0^x P(x,y)dx + g(y)$$

或 
$$\int_0^y \frac{\partial u}{\partial y} dy + h(x) = \int_0^y Q(x,y)dy + h(x).$$

再求出  $\frac{\partial u}{\partial y}$  与  $Q(x,y)$  比较, 确定  $g(y)$ , 得出  $u(x,y)$ .

(3) 将  $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$  通过拆项、拼项凑出全微分  $du$ , 需要一定的技巧.

## 方法、技巧与典型例题分析

利用格林公式, 首先要验证是否满足定理条件, 满足条件才可化为二重积分来计算. 当需要添加曲线段时, 要尽量使添加的曲线段上的线积分简单, 更不要忘了最后减去添加部分.

**例 1** 计算下列曲线积分:

(1)  $\oint_L (yx^3 + e^y)dx + (xy^3 + xe^y - 2y)dy$ ,  $L$  为  $x^2 + y^2 = a^2$  正向;

(2)  $\int_L (e^x \sin y - my)dx + (e^y \cos y - m)dy$ ,  $L$  为  $A(a,0) \rightarrow o(0,0)$  的上半圆周  $x^2 + y^2 = ax$ ;

(3)  $\oint_L (-2x^3y)dx + x^2y^2dy$ ,  $L$  为  $x^2 + y^2 \geq 1$  与  $x^2 + y^2 \leq 2y$  所围区域边界正向.

解 本例可利用格林公式求解.

(1) 因为  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^3 - x^3$ , 所以

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (y^3 - x^3) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r(r^3 \cos^3 \theta - r^3 \sin^3 \theta) dr \\ &= \frac{a^5}{5} \int_0^{2\pi} (\sin^3 \theta - \cos^3 \theta) d\theta \\ &= \frac{a^5}{5} \left[ \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta - 1) d\cos \theta - \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 \theta) d\sin \theta \right] = 0. \end{aligned}$$

(2) 因为  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = m$ , 添加直线段  $oA$  ( $y=0, 0 \leq x \leq a$ ) 构成封闭曲线, 取正向, 所以  $\int_L = \oint_{L_1} - \int_{oA}$ , 而  $\int_{oA} = \int_0^a 0 dx + 0 = 0$ . 于是

$$I = \oint_{L_1} - 0 = \iint_D m dx dy = m \iint_D dx dy = m \cdot \frac{1}{8} \pi a^2 = \frac{1}{8} \pi m a^2.$$

(3) 如图 14.4 建立坐标系. 因为  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy^3 + 2x^3$ , 所以

$$I = \iint_D (2xy^2 + 2x^3) dx dy = \iint_D 2x(y^2 + x^2) dx dy.$$

由于被积函数是  $x$  的奇函数, 而积分域关于  $y$  轴对称. 故

$$I = \iint_D 2x(x^2 + y^2) dx dy = 0.$$

例 2 计算  $\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + 4y^2}$ ,  $L$  为任一不通过原点的简单光滑闭曲线正向.

解 因为不过原点, 所以  $L$  上  $x^2 + 4y^2 \neq 0$ , 且

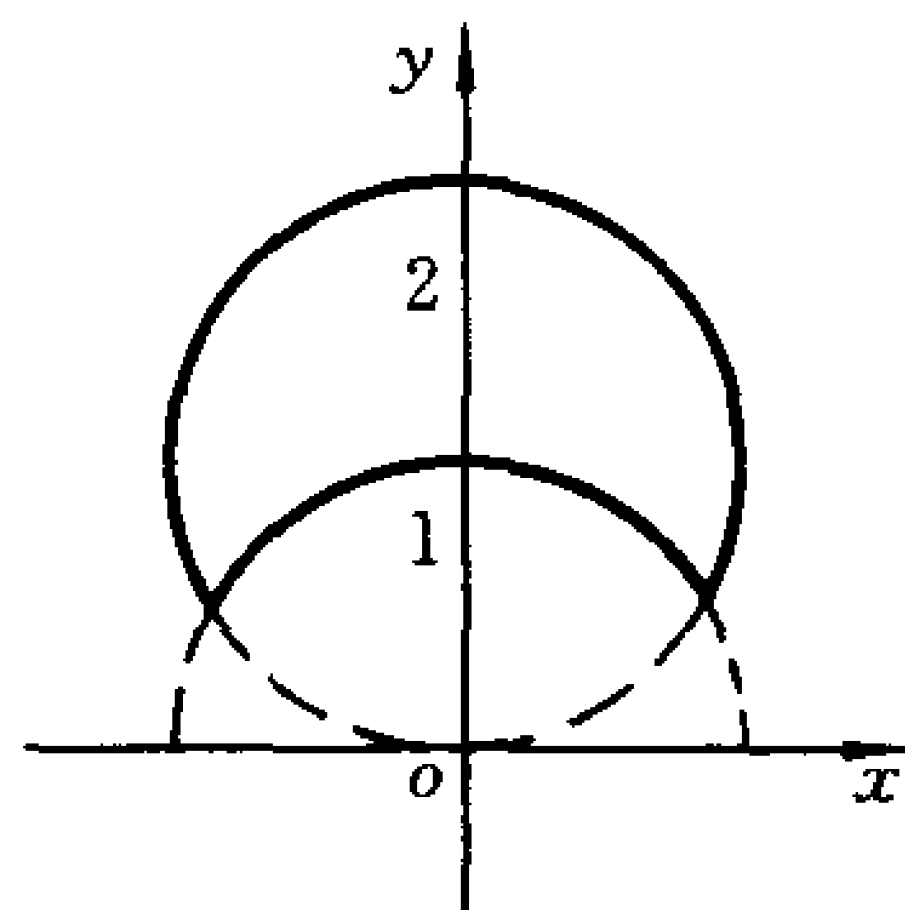


图 14.4



$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{4y^2 - x^2}{(x^2 + 4y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

当  $L$  不绕原点时,  $D$  为单连通域,  $\oint_L = 0$ .

当  $L$  绕原点时, 作一小圆周  $C: x^2 + 4y^2 = \epsilon^2$ ,  $C$  包含在  $L$  内, 则

$$\oint_L = \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + 4y^2} = \frac{1}{\epsilon^2} \oint_C xdy - ydx.$$

因为  $\frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx = \iint_D dx dy$ , 故由  $\frac{x^2}{\epsilon^2} + \frac{y^2}{(\epsilon/2)^2} = 1$  得

$$\oint_L = \frac{1}{\epsilon^2} 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \pi \epsilon^2 \right) = \pi.$$

同理,  $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \begin{cases} 0, & L \text{ 不绕原点,} \\ 2\pi, & L \text{ 绕原点.} \end{cases}$

### 例 3 计算曲线积分

$$\oint_L \left( 1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right) dx + \left( \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} + x^2 \right) dy,$$

$L$  由  $x^2 + y^2 = 2y$ ,  $x^2 + y^2 = 4y$ ,  $x = \sqrt{3}y$ ,  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}y$  所围成.

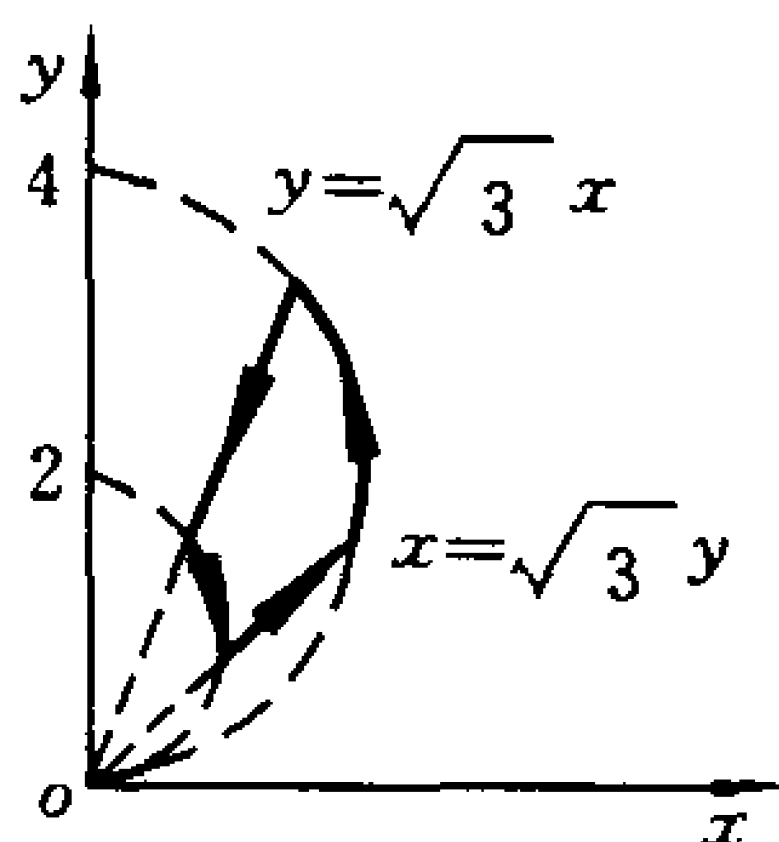


图 14.5

解 如图 14.5 所示,  $L$  很复杂, 可用格林公式求解. 因为  $\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 2x$ , 所以

$$\begin{aligned} I &= \iint_D 2x dx dy = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos \theta d\theta \int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} 2r^2 dr \\ &= \frac{112}{3} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin^3 \theta d\sin \theta = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

### 例 4 应用格林公式计算下列曲线所围区域的面积:

(1) 星形线  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ; (2) 双纽线  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ .

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad S &= \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (\sin^2 t \cos^4 t + \sin^4 t \cos^2 t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2}a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3}{8}a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt \\
&= \frac{3}{16}a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt = \frac{3}{8}\pi a^2.
\end{aligned}$$

$$(2) \quad x = a \cos \theta \sqrt{\cos 2\theta}, \quad y = a \sin \theta \sqrt{\cos 2\theta}.$$

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = 2 \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\theta d\theta = a^2.$$

例 5 求出指数  $\lambda$ , 使曲线积分

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{x}{y} r^\lambda dx - \frac{x^2}{y^2} r^\lambda dy \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2})$$

在  $y \neq 0$  的区域内与路径无关, 并求出积分值.

$$\text{解} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} r^\lambda + \lambda x \lambda^{-2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} (2x r^\lambda + \lambda x^3 r^{\lambda-2}),$$

$$\text{故} \quad 2x r^\lambda + \lambda x^3 r^{\lambda-2} = x r^\lambda + \lambda x y^2 r^{\lambda-2},$$

两边乘以  $r^{2-\lambda}$ , 化为

$$(2 + \lambda)x^3 + 2xy^2 = x^3 + (1 - \lambda)xy^2,$$

$$\text{得} \quad (2 + \lambda) = 1, \quad (1 - \lambda) = 2 \Rightarrow \lambda = -1.$$

当  $\lambda = -1$  时, 有

$$\begin{aligned}
I &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{x}{y_0 \sqrt{x^2 + y^2}} dx - \frac{x^2}{y^2 \sqrt{x^2 + y^2}} dy \\
&= \int_{x_0}^x \frac{x}{y_0 \sqrt{x^2 + y^2}} dx - \int_{y_0}^y \frac{x^2}{y \sqrt{x^2 + y^2}} dy \\
&= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} - \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{y_0}.
\end{aligned}$$

例 6 计算下列曲线积分:

(1)  $\int_L (x^2 y + 3x e^x) dx + \left( \frac{x^3}{3} - y \sin y \right) dy$ ,  $L$  为摆线  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$ , 从  $o(0, 0)$  到  $A(\pi, 2)$  的弧段;

(2)  $\int_L \frac{1 + y^2 f(xy)}{y} dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(x, y) - 1] dy$ ,  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有连续导数,  $L$  为从点  $(3, 2/3)$  到  $(1, 2)$  的直线段.

解 先考察积分是否与路径无关,再进行计算.

(1)  $\frac{\partial P}{\partial y} = x^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 故积分与路径无关. 选从  $(0,0) \rightarrow (\pi,0) \rightarrow (\pi,2)$  的折线段为积分路径, 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi 3xe^x dx + \int_0^2 \left( \frac{\pi^3}{3} - y \sin y \right) dy \\ &= 3(xe^x - e^x) \Big|_0^\pi + \left( \frac{\pi^3}{3}y - \sin y + y \cos y \right) \Big|_0^2 \\ &= 3e^\pi(\pi - 1) + 3 + 2\pi^3/3 + 2\cos 2 - \sin 2. \end{aligned}$$

(2)  $\frac{\partial P}{\partial y} = f(xy) + xyf'(xy) - \frac{1}{y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 故积分与路径无关. 选择折线段  $(3, 2/3) \rightarrow (1, 2/3) \rightarrow (1, 2)$  为积分路径, 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_3^1 \frac{3}{2} \left[ 1 + \frac{4}{9} f\left(\frac{2}{3}x\right) \right] dx + \int_{2/3}^2 \left[ f(y) - \frac{1}{y^2} \right] dy \\ &= -3 + \frac{2}{3} \int_3^1 f\left(\frac{2}{3}x\right) dx + \int_{2/3}^2 f(y) dy - 1. \end{aligned}$$

设  $f(t)$  的原函数为  $F(t)$ , 则

$$\frac{2}{3} \int_3^1 f\left(\frac{2}{3}x\right) dx = F\left(\frac{2}{3}x\right) \Big|_3^1 = F\left(\frac{2}{3}\right) - F(2),$$

$$\int_{2/3}^2 f(y) dy = F(y) \Big|_{2/3}^2 = F(2) - F\left(\frac{2}{3}\right),$$

$$\text{故 } I = -3 + F\left(\frac{2}{3}\right) - F(2) + F(2) - F\left(\frac{2}{3}\right) - 1 = -4.$$

例 7 当  $x > -1$  时,  $f(x)$  连续且可微, 且  $f(0) = 6/5$ , 对半平面  $x > -1$  上的任一闭曲线, 有

$$\oint_L [y - 5ye^{-2x}f(x)]dx + e^{-2x}f(x)dy = 0,$$

求  $f(x)$ , 并计算  $\int_L [y - 5ye^{-2x}f(x)]dx + e^{-2x}f(x)dy$ ,  $L$  为从  $(1,0)$  到  $(2,3)$  的弧段.

解 因为  $\oint_L = 0$ , 所以  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 即

$$-2e^{-2x}f(x) + e^{-2x}f'(x) = 1 - 5e^{-2x}f(x),$$

有微分方程  $f'(x) + 3f(x) = e^{2x}$ ,

$$\text{解得 } f(x) = e^{-\int 3dx} \left[ \int e^{2x} \cdot e^{\int 3dx} dx + c \right] = \frac{1}{5}e^{2x} + ce^{-3x},$$

$$\text{因 } f(0) = \frac{6}{5} \Rightarrow c = 1, \text{ 故 } f(x) = \frac{1}{5}e^{2x} + e^{-3x}.$$

由于积分与路径无关,选折线段  $(1,0) \rightarrow (2,0) \rightarrow (2,3)$  为积分路径,于是

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 P(x,0)dx + \int_0^3 Q(2,y)dy \\ &= \int_0^3 e^{-4} \left( \frac{1}{5}e^4 + e^{-6} \right) dy = \left( \frac{1}{5} + e^{-10} \right) y \Big|_0^3 = 3 \left( \frac{1}{5} + e^{-10} \right). \end{aligned}$$

**例 8**  $f(x,y)$  具有一阶连续偏导数,当它满足什么条件时,曲线积分  $\int_L f(x,y)(ydx + xdy)$  与路径无关?

**解** 因为  $P(x,y) = yf(x,y)$ ,  $Q(x,y) = xf(x,y)$ ,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = f(x,y) + yf'_y(x,y), \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = f(x,y) + xf'_x(x,y),$$

所以 
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow y \frac{\partial f}{\partial y} = x \frac{\partial f}{\partial x}.$$

**例 9** 选取  $a, b$  值,使得  $\frac{ax+y}{x^2+y^2}dx - \frac{x-y+b}{x^2+y^2}dy$  为函数  $u(x,y)$  的全微分,并求  $u(x,y)$ .

**解** 因为  $P(x,y) = \frac{ax+y}{x^2+y^2}$ ,  $Q(x,y) = \frac{-x-y+b}{x^2+y^2}$ ,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 - 2axy - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2 - 2xy + 2bx}{(x^2 + y^2)^2},$$

所以 
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow 2axy = 2xy, \quad 2bx = 0 \Rightarrow a = 1, b = 0.$$

因为,除点  $(0,0)$  外,  $P, Q$  具有一阶连续偏导数,于是

$$u(x,y) = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2} + c$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^x \frac{1}{x} dx - \int_0^y \frac{x-y}{x^2+y^2} dy + c \\
&= \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) - \arctan \frac{y}{x} + c.
\end{aligned}$$

**例 10** 验证下列函数为某函数的全微分,并求出该函数.

- (1)  $(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$ ;  
(2)  $e^x[e^y(x-y+2)+y]dx+e^x[e^y(x-y)+1]dy$ ;  
(3)  $y\cos(xy)dx+x\cos(xy)dy+\sin z dz$ .

**解** 先验证  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ,再求  $u(x,y)$ .

- (1)  $\frac{\partial P}{\partial y} = 2(x-y) = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ,故存在  $u(x,y)$ ,且

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_0^x x^2 dx + \int_0^y (x^2 - 2xy - y^2) dy + c \\
&= \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + c.
\end{aligned}$$

- (2)  $\frac{\partial P}{\partial y} = e^x[e^y(x-y+1)] + e^x = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ,故存在  $u(x,y)$ ,且

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_0^x e^x(x+2)dx + \int_0^y [e^{x+y}(x-y) + e^x]dy + c \\
&= (x-y+1)e^{x+y} + ye^x + c.
\end{aligned}$$

- (3)  $\frac{\partial P}{\partial y} = \cos(xy) - x y \sin(xy) = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ,故存在  $u(x,y)$ .

用线积分(折线法)求解,得

$$\begin{aligned}
u(x,y,z) &= \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} y\cos(xy)dx + x\cos(xy)dy + \sin z dz + c \\
&= \int_0^x 0dx + \int_0^y x\cos(xy)dy + \int_0^z \sin z dz + c \\
&= \sin(xy) - \cos z + 1 + c_1 = \sin(xy) - \cos z + c.
\end{aligned}$$

用偏积分法求解,得  $\frac{\partial u}{\partial x} = y\cos(xy)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = x\cos(xy)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z} = \sin z$ .

任取其中一式(如  $\frac{\partial u}{\partial x}$ )积分,于是

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_0^x y \cos(xy) dx + \varphi(y, z) \\ &= \sin(xy) + \varphi(y, z). \end{aligned}$$

又  $\frac{\partial u}{\partial y} = x \cos(xy) + \varphi_y'(y, z) = x \cos(xy),$

故  $\varphi_y'(y, z) = 0 \Rightarrow \varphi(y, z) = \psi(z).$

因为  $\frac{\partial u}{\partial z} = \varphi_z'(y, z) = \psi'(z) = \sin z \Rightarrow \psi(z) = -\cos z + c,$

即  $\varphi(y, z) = -\cos z + c,$

所以  $u(x, y, z) = \sin(xy) - \cos z + c.$

用凑微分法, 即利用微分公式与法则求解, 得

$$\begin{aligned} du(x, y, z) &= y \cos(xy) dx + x \cos(xy) dy + \sin z dz \\ &= \cos(xy) y dx + \cos(xy) x dy + \sin z dz \\ &= d[\sin(xy) - \cos z], \end{aligned}$$

故  $u(x, y, z) = \sin(xy) - \cos z + c.$

**例 11** 利用格林公式计算  $\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} dS$ , 其中  $u(x, y) = x^2 + y^2$ ,

$L$  为  $x^2 + y^2 = 6x$  正向,  $\frac{\partial u}{\partial n}$  为  $u$  沿  $L$  的外法线方向导数.

**解**  $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y) = 2x \cos \beta - 2y \cos \alpha$ , 其中  $\alpha, \beta$  是曲线  $L$  上在点  $(x, y)$  切线的方向角, 故

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} dS = \oint_L (2x \cos \beta - 2y \cos \alpha) dS.$$

化为第二型曲线积分后再利用格林公式, 有

$$\begin{aligned} I &= \oint_L (-2y \cos \alpha + 2x \cos \beta) dS \\ &= \oint_L (-2)y dx + 2x dy \\ &= \iint_D 4 dx dy = 4 \cdot 9\pi = 36\pi. \end{aligned}$$

## 第四节 第二型曲面积分

### 主要内容

1. 设  $P, Q, R$  为定义在双侧曲面  $S$  上的函数, 在  $S$  上指定一侧作分割  $T$ , 分  $S$  为  $n$  个小曲面  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , 分割的细度  $\|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{S_i \text{ 的直径}\}$ . 以  $\Delta S_{i_{yz}}, \Delta S_{i_{zx}}, \Delta S_{i_{xy}}$  分别表示  $S_i$  在三个坐标面上的投影区域的面积. 当  $S_i$  的法线正向与  $z$  轴正向夹角小于  $\pi/2$  时,  $\Delta S_{i_{yz}}$  取正值; 当该夹角大于  $\pi/2$  时,  $\Delta S_{i_{yz}}$  取负值.  $\Delta S_{i_{yz}}, \Delta S_{i_{zx}}$  正负值取法类似. 在各小曲面积  $S_i$  上任取一点  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ , 若极限

$$\begin{aligned} & \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_{i_{yz}} + \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_{i_{zx}} \\ & + \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_{i_{xy}} \end{aligned}$$

存在, 且与  $S$  的分割  $T$  和点  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  的取法无关, 则称此极限为函数  $P, Q, R$  在曲面  $S$  指定一侧上的第二型曲面积分, 记作

$$\iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy.$$

2. 设  $R$  是定义在光滑曲面  $S: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$  上的连续函数, 以  $S$  的上侧为正侧, 则

$$\iint_S R(x, y, z) dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dxdy.$$

3. 若光滑曲面由参量方程给出,  $S: x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D$ , 且在  $D$  上函数行列式  $\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$  不同时为零, 则有

$$\begin{aligned}\iint_S P dydz &= \pm \iint_D P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} du dv, \\ \iint_S Q dx dz &= \pm \iint_D Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} du dv, \\ \iint_S R dx dy &= \pm \iint_D R(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du dv.\end{aligned}$$

当  $uov$  平面的正方向对应曲面  $S$  选定的一侧时, 二重积分前取正号, 否则取负号.

## 疑难解析

### 1. 为什么要将曲面分侧?

**答** 第二型曲面积分又称为对坐标的曲面积分, 积分是在曲面上进行的, 但积分不是对  $dS$  而是对  $dx dy$  (或  $dy dz, dz dx$ ) 进行的. 这里的  $dx dy$  实际上是  $\Delta S$  在  $xoy$  面上的投影, 因此是有方向的. 这样, 就需要考虑曲面的侧, 即考虑积分是对曲面的某一侧进行的, 对不同侧进行的积分有不同的值. 事实上, 大多数曲面都是双侧的, 因此, 必须区分曲面的侧, 在指定的侧上进行第二型曲面积分.

## 方法、技巧与典型例题分析

在计算第二型曲面积分时, 很重要的一步是根据指定的侧确定二重积分前面的符号. 一般可以依据几何知识确定. 其实, 计算第二型曲面积分的方法不是惟一的, 读者可以多尝试新的解法.

### 例 1 用多种方法计算曲面积分

$$\iint_D (y-z) dy dz + (z-x) dz dx + (x-y) dx dy,$$

$S$  为  $z^2 = x^2 + y^2$  ( $0 \leq z \leq h$ ) 的下侧.



**解法 1** 化曲面积分为二重积分.

取  $x > 0$  部分前侧为  $S_1$ ,  $x < 0$  部分后侧为  $S_2$ ,  $y > 0$  部分右侧为  $S_3$ ,  $y < 0$  部分左侧为  $S_4$ , 则

$$\begin{aligned}\iint_S (y - z) dy dz &= \iint_{S_1} (y - z) dy dz + \iint_{S_2} (y - z) dy dz \\ &= \iint_{D_{yz}} (y - z) dy dz - \iint_{D_{yz}} (y - z) dy dz = 0,\end{aligned}$$

类似地, 有

$$\begin{aligned}\iint_S (z - x) dz dx &= \iint_{S_3} (z - x) dz dx + \iint_{S_4} (z - x) dz dx = 0, \\ \iint_S (x - y) dx dy &= - \iint_{D_{xy}} (x - y) dx dy \\ &= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h r^2 (\cos\theta - \sin\theta) dr = 0.\end{aligned}$$

**解法 2** 化为第一型曲面积分来求解. 因为

$$\begin{aligned}&\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ &= \iint_S [P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma] dS,\end{aligned}$$

其中  $\alpha, \beta, \gamma$  分别是曲面  $S$  上法向量与三个坐标轴正向的夹角.

$$\begin{aligned}\text{因为 } z &= \sqrt{x^2 + y^2}, z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \cos\alpha = \\ &\frac{x}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}, \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}, \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}, \text{故}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I &= \iint_S [(y - z) \cos\alpha + (z - x) \cos\beta + (x - y) \cos\gamma] dS \\ &= \iint_{D_{xy}} \left( -x + y - \frac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx dy.\end{aligned}$$

由区域的对称性与被积分函数的奇偶数知,  $I = 0$ .

(3) 用高斯公式(见下节)求解.

添加曲面  $S_0: z=h, x^2+y^2 \leq h^2$ , 并取其上侧, 则

$$\begin{aligned} I &= \oint_{S+S_0} - \iint_{S_0} = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV - \iint_{S_0} (x-y) dx dy \\ &= \iiint_V 0 dV - \iint_{S_0} (y-x) dx dy. \end{aligned}$$

由区域的对称性与被积分函数的奇偶性知,  $I=0$ .

(4) 因为  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$ , 所以曲面积分与曲面形状无关, 只与边界曲线有关. 故取曲面为题(3)中  $S_0$  的下侧, 则由区域的对称性与函数的奇偶性知

$$I = \iint_{S_0} (x-y) dx dy = - \iint_{D_{xy}} (x-y) dx dy = 0.$$

**例 2** 计算下列曲面积分:

(1)  $\oint_S \frac{1}{x} dy dz + \frac{1}{y} dz dx + \frac{1}{z} dx dy$ ,  $S$  为椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  外侧;

(2)  $\iint_S f(x) dy dz + g(y) dz dx + h(z) dx dy$ ,  $f, g, h$  为连续函数,  $S$  为平行六面体  $0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c$  的外表面;

(3)  $\iint_S x dy dz + y dz dx + (x+z) dx dy$ ,  $S$  是平面  $2x+2y+z=2$  在第一卦限部分的上侧.

**解** (1)  $I = \oint_S \frac{1}{x} dy dz + \oint_S \frac{1}{y} dz dx + \oint_S \frac{1}{z} dx dy,$

$$\begin{aligned} I_1 &= \oint_S \frac{1}{x} dy dz = 2 \iint_{D_{xy}} \frac{dy dz}{a \sqrt{1 - y^2/b^2 - z^2/c^2}} \\ &= \frac{8}{a} \int_0^b dy \int_0^{\sqrt{1-y^2/b^2}} \frac{dz}{\sqrt{1 - y^2/b^2 - z^2/c^2}} = \frac{4\pi abc}{a^2}, \end{aligned}$$

其中  $D_{xy}$  为  $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ . 由轮换对称性, 得

$$\oiint_S \frac{1}{y} dz dx = \frac{4\pi abc}{b^2}, \quad \oiint_S \frac{1}{z} dx dy = \frac{4\pi abc}{c^2}.$$

故 
$$I = \frac{4\pi abc}{a^2} + \frac{4\pi abc}{b^2} + \frac{4\pi abc}{c^2} = 4\pi abc \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right).$$

(2) 先计算  $\iint_S h(z) dx dy$ , 由于侧面垂直于  $xoy$  面, 故

$$\begin{aligned} \iint_S h(z) dx dy &= \iint_{D_{xy}} h(c) dx dy - \iint_{D_{xy}} h(0) dx dy \\ &= (h(c) - h(0)) \iint_{D_{xy}} dx dy = abc \frac{h(c) - h(0)}{c}. \end{aligned}$$

由轮换对称性, 得

$$\begin{aligned} \iint_S f(x) dy dz &= abc \frac{f(a) - f(0)}{a}, \\ \iint_S g(y) dz dx &= abc \frac{g(b) - g(0)}{b}. \end{aligned}$$

故 
$$I = abc \left[ \frac{f(a) - f(0)}{a} + \frac{g(b) - g(0)}{b} + \frac{h(c) - h(0)}{c} \right].$$

(3) 由于  $S$  取上侧, 故法向量与  $z$  轴的夹角为锐角, 方向余弦分别为  $\cos\alpha = 2/3, \cos\beta = 2/3, \cos\gamma = 1/3$ , 于是

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \left[ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}(x+z) \right] dS = \frac{1}{3} \iint_S (3x + 2y + z) dS \\ &= \frac{1}{3} \iint_S [(2x + 2y + z) + x] dS \\ &= \frac{1}{3} \iint_S (2 + x) dS \quad (\text{因为 } 2x + 2y + z = 2). \end{aligned}$$

而  $D_{xy}$  为  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=3$ , 故

$$I = \frac{1}{3} \iint_{D_{xy}} (2+x) \cdot 3 dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (2+x) dx$$

$$= \int_0^1 (-x^2 - x + 2) dx = \frac{7}{6}.$$

**例 3** 计算  $\oiint_S \frac{x}{r^3} dydz + \frac{y}{r^3} dzdx + \frac{z}{r^3} dxdy$ , 其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $S$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  的外侧.

**解** 设  $n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$  为  $S$  上单位外法线向量, 则  $\cos\alpha = x/r, \cos\beta = y/r, \cos\gamma = z/r$ , 于是

$$\begin{aligned} I &= \oiint_S \left( \frac{x}{r^3} \cos\alpha + \frac{y}{r^3} \cos\beta + \frac{z}{r^3} \cos\gamma \right) dS \\ &= \oiint_S \frac{1}{r^2} (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) dS = \oiint_S \frac{1}{r^2} dS \\ &= \frac{1}{a^2} \oiint_S dS = \frac{1}{a^2} 4\pi a^2 = 4\pi. \end{aligned}$$

**例 4** 计算  $\iint_S yx^3 dydz + xy^3 dzdx + z^2 dxdy$ , 其中  $S$  是  $z = x^2 + y^2$  ( $0 \leq z \leq 1$ ) 的外侧.

**解** 由于曲面关于  $z$  轴对称, 故

$$\iint_S yx^3 dydz = \iint_S xy^3 dzdx.$$

又, 曲面关于  $yoz$  平面对称, 且  $yx^3$  是关于  $x$  的奇函数, 所以

$$\iint_S yx^3 dydx = \iint_S xy^3 dx dx = 0.$$

$$\begin{aligned} I &= 0 + \iint_S z^2 dxdy = - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2)^2 dxdy \\ &= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^5 dr = - \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

本例依据区域的对称性和函数的奇偶性简化了计算.

**例 5** 计算

$$I = \iint_S [f(x, y, z) + x] dydz + [2f(x, y, z) + y] dzdx$$

$$+ [f(x, y, z) + z] dx dy,$$

其中  $f(x, y, z)$  为连续函数,  $S$  是平面  $x - y + z = 1$  在第四卦限部分的上侧.

**解** 设平面法向量为  $n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ , 则  $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$ ,  $\cos\beta = -1/\sqrt{3}$ ,  $\cos\gamma = 1/\sqrt{3}$ . 于是

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \{ [f(x, y, z) + x] \cos\alpha + [2f(x, y, z) + y] \cos\beta \\ &\quad + [f(x, y, z) + z] \cos\gamma \} dS \\ &= \iint_S f(x, y, z) (\cos\alpha + 2\cos\beta + \cos\gamma) dS \\ &\quad + \iint_S (x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma) dS \\ &= \iint_S f(x, y, z) \cdot 0 + \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{3}} (x - y + 1 - x + y) \sqrt{3} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} dx dy = \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 dy = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

本例含抽象函数  $f(x, y, z)$ , 不能直接用二重积分, 但可利用第一型曲面积分求出解.

**例 6** 计算  $\oiint_S \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ .  $S$  为锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  与平面  $z = 1, z = 2$  所围立体的外侧.

**解** 记  $S_1$  为锥面部分,  $S_2, S_3$  分别为  $z = 1, z = 2$  部分, 在  $xoy$  面上投影域分别为  $D_1, D_2, D_3$ , 则  $S_1, S_2$  取下侧,  $S_3$  取上侧. 于是

$$\begin{aligned} I &= - \iint_{D_1} \frac{e^{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy - \iint_{D_2} \frac{e}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\ &\quad + \iint_{D_3} \frac{e^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \frac{e^r}{r} r dr - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{e}{r} r dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \frac{e^2}{r} r dr \\
&= - 2\pi \int_1^2 \frac{e^r}{r} dr - 2\pi \int_0^1 e dr + 2\pi \int_0^2 e^2 dr = 2\pi e^2.
\end{aligned}$$

## 第五节 高斯公式与斯托克斯公式

### 主要内容

1. 高斯公式 设空间区域  $V$  由分片光滑的双侧封闭曲面  $S$  所围成, 若函数  $P, Q, R$  在  $V$  上连续, 且有一阶连续偏导数, 则有高斯公式

$$\iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \oiint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy,$$

其中  $S$  取外侧.

2. 斯托克斯(Stokes)公式 设光滑曲面  $S$  的边界  $L$  是分段光滑的连续曲线, 函数  $P, Q, R$  在  $S$  及  $L$  上连续, 且有一阶连续偏导数, 则有斯托克斯公式

$$\begin{aligned}
&\iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\
&= \oint_L P dx + Q dy + R dz,
\end{aligned}$$

其中  $S$  的侧与  $L$  的方向依右手法则确定.

3. 设  $\Omega \subset \mathbf{R}^3$  为空间单连通域, 若  $P, Q, R$  是  $\Omega$  上连续函数, 且有一阶连续偏导数, 则以下四个条件等价:

(1) 对  $\Omega$  内任一光滑封闭曲线, 有

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = 0;$$

(2) 对  $\Omega$  内任一分段光滑曲线, 曲线积分  $\int_L Pdx + Qdy + Rdz$  与路径无关;

(3)  $\Omega$  内存在函数  $u(x, y, z)$ , 使得  $du = Pdx + Qdy + Rdz$ ;

(4) 在  $\Omega$  内成立  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$ .

## 疑难解析

### 1. 高斯公式有什么意义与用途?

答 高斯公式建立了沿空间闭曲面的曲面积分与三重积分之间的联系, 使得对曲面积分的计算可以化为对曲面所围立体上的三重积分的计算. 与牛顿-莱布尼茨公式和格林公式一样, 高斯公式体现了一个重要的数学思想——区域内部问题与边界问题的互相转化.

高斯公式是格林公式由平面域到空间域的推广, 它不仅对封闭区域上的积分有效, 对非封闭区域也可以用添加曲面的方法来使用. 当  $V$  是空间复连通域时,  $S$  是  $V$  的外侧与内部小区域边界内侧之和.

### 2. 斯托克斯公式有什么意义与用途?

答 斯托克斯公式建立了沿空间曲面的曲面积分与沿其边界曲线的曲线积分之间的联系, 它也是格林公式的推广.

对在  $V$  内有一阶连续偏导数的函数  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ , 以下三个命题等价:

(1)  $\forall S \subset V, \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$  与曲面  $S$  的形状无关, 仅与  $S$  的边界曲线有关;

(2) 对  $V$  内任一封闭曲面  $S, \oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = 0$ ;

(3) 在  $V$  内恒有  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$ .

利用斯托克斯公式和上述命题可以大大简化积分计算并解决许多力学问题.

## 方法、技巧与典型例题分析

在用高斯公式和斯托克斯公式求解时,首先要验证问题是否满足定理条件,然后再考虑问题的具体条件,如能否利用轮换对称性、区域对称性、函数奇偶性,能否通过拼、凑、拆项来简化计算.

**例 1** 计算  $\oint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ , 设:

(1)  $S$  为  $x^2 + y^2 + z^2 = \epsilon^2$ ;

(2)  $S$  为不包含原点的光滑闭曲面;

(3)  $S$  为包含原点的光滑闭曲面.

**解** (1) 因为  $x^2 + y^2 + z^2 = \epsilon^2$ , 所以由高斯公式有

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\epsilon^3} \iiint_S xdydz + ydzdx + zdx dy \\ &= \frac{1}{\epsilon^3} \iiint_V 3dxdydz = \frac{1}{\epsilon^3} \cdot 3 \cdot \frac{4}{3}\pi\epsilon^3 = 4\pi. \end{aligned}$$

(2)  $S$  不包含原点, 而  $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}$ , 即  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$ , 于是

$$I = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iiint_V 0 dxdydz = 0.$$

(3)  $S$  包含原点, 需作半径充分小球面  $S_1: x^2 + y^2 + z^2 = \epsilon^2$ ,  $S_1 \subset S$ . 则  $S$  与  $S_1$  之间区域  $V_1$ , 根据题(2), 有

$$\iiint_{V_1} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = 0.$$



而根据题(1),有

$$-\iint_{S_1} xdydz + ydzdx + zdxdy = -4\pi.$$

故 
$$I = \iint_S = -\iint_{S_1} = -(-4\pi) = 4\pi.$$

这里  $S_1$  是取内侧.

**例 2** 计算下列曲面积分:

$$(1) \oiint_S \left[ \frac{x}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) + x^3 \right] dydz + \left[ f\left(\frac{x}{y}\right) + y^3 \right] dxdy \\ + \left[ -\frac{z}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) + z^2 \right] dxdy,$$

其中  $f(u)$  有连续导数,  $S$  为  $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$  内侧.

$$(2) \iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy, S \text{ 为锥面 } x^2 + y^2 = z^2$$

( $0 \leq z \leq h$ ) 外侧.

**解** (1)  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$ , 依高斯公式, 有

$$I = -3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz \\ = -3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^4 \sin\varphi dr = -6\pi \int_0^{\pi/2} \frac{32}{5} R^5 \cos^5 \varphi \sin \varphi d\varphi \\ = 6 \cdot \frac{32}{5} \pi R^5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{32}{5} \pi R^5.$$

(2) 令  $S_1: z=h (x^2 + y^2 \leq h)$ , 取上侧, 则  $S+S_1$  构成封闭曲面, 可用高斯公式. 于是

$$\iint_{S+S_1} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy \\ = 2 \iiint_V (x + y + z) dxdydz = 2 \int_0^h dz \iiint_{x^2+y^2 \leq z^2} z dxdy$$

$$= 2 \int_0^h \pi z^4 dz = \frac{\pi}{2} h^4.$$

而

$$\begin{aligned} & \iint_{S_1} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} dxdy = h^2 \cdot \pi h^2 = \pi h^4, \end{aligned}$$

故

$$I = \frac{\pi}{2} h^4 - \pi h^4 = -\frac{\pi}{2} h^4.$$

这里,在计算三重积分利用了区域的对称性和函数的奇偶性.

**例 3** 利用高斯公式计算下列曲面积分:

(1)  $\oiint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$ ,  $S$  为立方体:  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$  外侧;

(2)  $\iint_S [x^3 \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}) + y^3 \cos(\mathbf{n}, \mathbf{y}) + z^3 \cos(\mathbf{n}, \mathbf{z})] dS$ ,  $S$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  上半部分外侧.

**解** (1) 因为  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2(x+y+z)$ ,  $S$  为封闭曲面, 故

$$\begin{aligned} I &= 2 \iiint_V (x+y+z) dV = 2 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x+y+z) dz \\ &= 2 \int_0^a dx \int_0^a \left( ax + ay + \frac{a^2}{2} \right) dy \\ &= 2 \int_0^a \left( a^2 x + \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2} \right) dx = 3a^4. \end{aligned}$$

(2) 补  $S_1: x^2 + y^2 \leq R^2, z=0$ , 取下侧, 则  $S+S_1$  构成封闭曲面, 依高斯公式, 有

$$\begin{aligned} \oiint_{S+S_1} &= 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R r^4 \sin\varphi dr \\ &= 6\pi \cdot \frac{R^5}{5} \int_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi = \frac{6}{5} \pi R^5. \end{aligned}$$

而 
$$\iint_{S_1} = \iint_{S_1} [0 \cdot x^3 + 0 \cdot y^3 + (-1) \cdot 0] dS = 0,$$

故 
$$I = \oiint_{S+S_1} - \iint_{S_1} = \frac{6}{5}\pi R^5 - 0 = \frac{6}{5}\pi R^5.$$

#### 例 4 计算曲面积分

$$\begin{aligned} & \iint_S (x+y-z) dydz + [2y + \sin(z+x)] dzdx \\ & + (3z + e^{x+y}) dxdy, \end{aligned}$$

$S$  为曲面  $|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1$  的外侧.

解 因为  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 + 2 + 3 = 6$ , 所以

$$I = 6 \iiint_V dxdydz.$$

对  $V: |x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| \leq 1$  作旋转变换:  
 $u = x-y+z, v = y-z+x, w = z-x+y, S$  变成  $|u| + |v| + |w| = 1$ .  
 $V$  是对称八面体, 其第一封限部分由  $u+v+w=1$  及  $u=0, v=0, w=0$  所围成, 则

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = 1 \bigg/ \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \frac{1}{4},$$

故 
$$I = 6 \iiint_{|u|+|v|+|w|\leq 1} \frac{1}{4} du dv dw = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 2.$$

例 5 设空间区域  $V$  由曲面  $z = a^2 - x^2 - y^2$  与平面  $z = 0$  所围成,  $a > 0$ . 记  $V$  的表面外侧为  $S$ , 体积为  $V$ , 证明:

$$\oiint_S x^2 y z^2 dydz - x y^2 z^2 dzdx + z(1 + xyz) dxdy = V.$$

证 因为  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 + 2xyz$ , 所以

$$I = \iiint_V (1 + 2xyz) dV = V + 2 \iiint_V xyz dV.$$

因为区域关于  $yoz$  平面对称, 而函数是关于  $x$  的奇函数, 所以

$$\iiint_V xyz dV = 0,$$

故

$$I = V + 0 = V.$$

例 6 用斯托克斯公式计算下列曲线积分：

(1)  $\oint_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$ ,  $L$  为椭圆  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $x/a + y/b = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ), 从  $x$  轴正向看去, 取逆时针方向;

(2)  $\int_L (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz$ ,  $L$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$  与柱面  $x^2 + y^2 = 2x$  的交线, 从  $z$  轴正向看去, 取逆时针方向 ( $z \geq 0$ ).

解 (1) 取以  $L$  为边界的部分平面  $S: x/a + y/b = 1$  的上侧, 则  $S$  平面法线的方向余弦为  $\cos\alpha = b/\sqrt{a^2+b^2}$ ,  $\cos\beta = 0$ ,  $\cos\gamma = a/\sqrt{a^2+b^2}$ , 于是

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} dS = -2 \iint_S \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}} dS \\ &= -2 \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}} \iint_S dS = -\frac{2(a+b)}{a} \iint_{D_{xy}} dx dy \\ &= -\frac{2(a+b)}{a} \pi a^2 = -2\pi a(a+b). \end{aligned}$$

(2) 球面法线方向的方向余弦为  $\cos\alpha = (x-2)/2$ ,  $\cos\beta = y/2$ ,  $\cos\gamma = z/2$ , 于是

$$\begin{aligned} I &= 2 \iint_S [(y-z)\cos\alpha + (z-x)\cos\beta + (x-y)\cos\gamma] dS \\ &= 2 \iint_S \left[ (y-z) \frac{x-2}{2} + (z-x) \frac{y}{2} + (x-y) \frac{z}{2} \right] dS \end{aligned}$$

$$= 2 \iint_S (z - y) dS.$$

由于曲面关于  $xoy$  平面对称, 故  $\iint_S y dS = 0$ . 而

$$\iint_S z dS = \iint_S 2 \cos \gamma dS = 2 \iint_{D_{xy}} dx dy = 2\pi.$$

故  $I = 4\pi$  ( $D_{xy}$  为  $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ , 面积为 1).

例 7 利用斯托克斯公式计算下列曲线积分:

(1)  $\int_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$ ,  $L$  为曲线:  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ,  $x^2 + y^2 = Rx$  ( $R < 0, z \geq 0$ ), 从  $z$  轴正向看去, 取顺时针方向;

(2)  $\int_L (x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - xy) dz$ ,  $L$  是从  $A(0, 0, 0)$  到  $B(a, 0, h)$  的螺旋线:  $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, z = \frac{h}{2\pi} \theta$ .

解 (1)  $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -2z, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -2x, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2y$  均为连续函数, 取曲面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  外侧为  $L$  部分为  $S$ , 因为取顺时针方向, 积分前加负号

$$\begin{aligned} I &= - \iint_S [-2z \cos \alpha - 2x \cos \beta - 2y \cos \gamma] dS \\ &= 2 \iint_S [z \cos \alpha + x \cos \beta + y \cos \gamma] dS, \end{aligned}$$

由于  $S$  关于  $xoz$  平面对称, 则  $\iint_S x \cos \beta dS = 0$ .

又  $S$  在  $xoy$  平面投影  $D_{xy}$ :  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq R \cos \theta$ , 故

$$\begin{aligned} I &= 2 \iint_S (z \cos \alpha + y \cos \gamma) dS = 2 \iint_S (x + y) \cos \gamma dS \\ &= 2 \iint_{D_{xy}} (x + y) dx dy = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{R \cos \theta} r (\cos \theta + \sin \theta) r dr \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} R^3 \cos^4 \theta d\theta = \frac{\pi}{4} R^3. \end{aligned}$$

其中运用了关系式  $z \cos \alpha = z \cdot x/R = x \cdot z/R = x \cos \gamma$ .

(2) 将  $L$  添上直线段  $BA$  构成封闭曲线. 因为  $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ , 所以积分与曲面无关, 只与张它的曲线有关. 由斯托克斯公式, 有

$$\int_{L+BA} = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma} = - \int_{BA} = \int_{AB}.$$

直线段  $AB$  的方程为  $x=a, y=0, 0 \leq z \leq h$ , 所以

$$I = \int_{AB} z^2 dz = \int_0^h z^2 dz = \frac{h^3}{3}.$$

**例 8** 计算  $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , 点  $(x_1, y_1, z_1)$  在球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  上, 点  $(x_2, y_2, z_2)$  在球面  $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$  上 ( $a > 0, b > a$ ).

**解** 设  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$ ,  $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ , 故积分与路径无关, 只与起点和终点有关, 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Big|_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \\ &= b - a. \end{aligned}$$

**例 9** 计算  $I = \int_A^B P dx + Q dy + R dz$ , 其中  $P = xz + ay^2 + bz^2, Q = xy + az^2 + bx^2, R = yz + ax^2 + by^2, A(0, 0, z_0), B(x_1, y_1, 0)$ . 确定  $a, b$  值, 使积分与路径无关, 并求出积分值.

**解** 由  $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  得  $a = \frac{1}{2}, b = 0$ . 于是

$$I = \int_A^B (xz + \frac{1}{2}y^2) dx + (xy + \frac{1}{2}z^2) dy + (yz + \frac{1}{2}x^2) dz,$$

取折线  $A(0, 0, z_0) \rightarrow A_1(x_1, 0, z_0) \rightarrow A_2(x_1, y_1, z_0) \rightarrow B(x_1, y_1, 0)$  为积分路径, 有

$$\begin{aligned}
I &= \int_A^{A_1} + \int_{A_1}^{A_2} + \int_{A_2}^B \\
&= \int_0^{x_1} P(x, 0, z_0) dx + \int_0^{y_1} Q(x_1, y, z_0) dy + \int_{z_0}^0 R(x_1, y_1, z) dz \\
&= \int_0^{x_1} x z_0 dx + \int_0^{y_1} (x_1 y + \frac{1}{2} z_0^2) dy + \int_{z_0}^0 (y_1 z + \frac{1}{2} x_1^2) dz \\
&= \frac{1}{2} x_1^2 z_0 + \frac{1}{2} x_1 y_1^2 + \frac{1}{2} z_0^2 y_1 - \frac{1}{2} z_0^2 y_1 - \frac{1}{2} x_1^2 z_0 = \frac{1}{2} x_1 y_1^2.
\end{aligned}$$

**例 10** 证明: 若  $S$  为封闭的简单曲面, 而  $\boldsymbol{n}$  为  $S$  的外法线方向,  $\boldsymbol{l}$  为任一固定方向, 则  $\oiint_S \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l}) dS = 0$ .

**证** 设  $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ ,  $\boldsymbol{l}_0 = \frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|} = (\cos\alpha_0, \cos\beta_0, \cos\gamma_0)$ , 其中  $\cos\alpha_0, \cos\beta_0, \cos\gamma_0$  为常量. 由于

$$\cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l}) = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{l} = \cos\alpha_0 \cos\alpha + \cos\beta_0 \cos\beta + \cos\gamma_0 \cos\gamma,$$

故

$$\begin{aligned}
&\oiint_S \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l}) dS \\
&= \oiint_S (\cos\alpha_0 \cos\alpha + \cos\beta_0 \cos\beta + \cos\gamma_0 \cos\gamma) dS \\
&= \oiint_S \cos\alpha_0 dy dz + \cos\beta_0 dz dx + \cos\gamma_0 dx dy \\
&\quad \xrightarrow{\text{由高斯公式}} \iiint_V \left( \frac{\partial}{\partial x} \cos\alpha_0 + \frac{\partial}{\partial y} \cos\beta_0 + \frac{\partial}{\partial z} \cos\gamma_0 \right) dV = \iiint_V 0 dV = 0.
\end{aligned}$$

**例 11** 设  $u(x, y, z)$  在闭区域  $V$  上有二阶连续偏导数, 记  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ , 证明:

$$\oiint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dV + \iiint_V u \Delta u dV,$$

其中  $S$  是  $V$  的边界曲面,  $\frac{\partial u}{\partial n}$  为  $u(x, y, z)$  沿  $S$  外法线方向的方向导数.

证  $n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ , 则

$$\begin{aligned}\oint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS &= \oint_S u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \right) dS \\ &= \oint_S u \frac{\partial u}{\partial x} dydz + u \frac{\partial u}{\partial y} dzdx + u \frac{\partial u}{\partial z} dxdy \\ &= \iiint_V \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( u \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dV \\ &= \iiint_V \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dV + \iiint_V u \Delta u dV.\end{aligned}$$

例 12 利用斯托克斯公式化  $\iint_S \text{rot} F \cdot n dS$  为曲线积分,  $F = y^2 i + xyj + xzk$ ,  $S$  为上半球面  $z = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$  的上侧,  $n$  为  $S$  的单位法向量.

解  $\text{rot} F = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k$ ,  
 $S$  的边界曲线为  $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ , 则由斯托克斯公式, 有

$$\begin{aligned}I &= \iint_S \text{rot} F \cdot n dS = \oint_S y^2 dx + xy dy + xz dz \\ &= \int_0^{2\pi} [\sin^2 t (-\sin t) + \cos^2 t \sin t] dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos^2 t) d\cos t = 0.\end{aligned}$$

例 13 设  $S$  为包围有界物体  $V$  的简单光滑曲面,  $u(x, y, z)$  在  $V + S$  上连续, 并有二阶连续偏导数,  $n$  为  $S$  的外法线向量, 证明:

$$\oint_S u \text{grad} u \cdot n dS = \iiint_V (\text{grad} u)^2 dV + \iiint_V u \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dV.$$

证 令  $F = u \text{grad} u$ , 则因为

$$\text{grad} u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$



$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{F} &= \operatorname{div}[u \operatorname{grad} u] = \operatorname{div}\left[u\left(\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}\right)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\
&= u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \\
&= u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + (\operatorname{grad} u)^2,
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\oint_S u \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{n} dS &= \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV \\
&= \iiint_V (\operatorname{grad} u)^2 dV + \iiint_V u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) dV.
\end{aligned}$$

**例 14** 设  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  均为连续函数,  $S$  为光滑曲面, 面积为  $S$ ,  $M$  是  $\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$  在  $S$  上的最大值, 证明:  $\left| \iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy \right| \leq MS$ .

证

$$\begin{aligned}
&\left| \iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy \right| \\
&= \left| \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \right| \\
&\leq \iint_S |P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma| dS \\
&= \iint_S |(P, Q, R) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)| dS = \iint_S |\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0| dS \\
&\leq \iint_S |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{n}_0| dS = \iint_S |\mathbf{F}| dS = \iint_S \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} dS \\
&\leq M \iint_S dS = MS.
\end{aligned}$$

**例 15** 有密度为  $\mu$  的空间流体, 流速  $\mathbf{v} = xz^2 \mathbf{i} + yx^2 \mathbf{j} + zy^2 \mathbf{k}$ , 求在单位时间内流过曲面  $S: x^2 + y^2 + z^2 = 2z$  的流量  $\Phi$  (流向外

侧)和沿曲线  $L: x^2 + y^2 + z^2 = 2z, z = 1$  的环流量  $\Gamma$  (从  $z$  轴正向量看是逆时针方向).

解 球面  $S$  的球面坐标方程为  $r = 2\cos\varphi$ , 故

$$\begin{aligned}\Phi &= \oint_S xz^2 dydz + yx^2 dzdx + zy^2 dxdy \quad (\text{由高斯公式}) \\ &= \iiint_V (z^2 + x^2 + y^2) dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^4 \sin\varphi dr \\ &= 2\pi \cdot \frac{32}{5} \int_0^{\pi/2} \cos^5\varphi \sin\varphi d\varphi = \frac{32}{15}\pi.\end{aligned}$$

曲线  $L$  为平面  $z = 1$  上的圆周  $x^2 + y^2 = 1$ , 故

$$\begin{aligned}\Gamma &= \oint_L xz^2 dx + yx^2 dy + zy^2 dz \\ &= \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^2 & yx^2 & zy^2 \end{vmatrix} \quad (\text{由斯托克斯公式}) \\ &= 2 \iint_S yz dydz + zxdzdx + xydxdy \\ &= 2 \iint_S xydxdy = 0 \quad (\text{由区域对称性和函数奇偶性}).\end{aligned}$$

[ General Information ]

□□=□□□□ □□□□□□□□ □□□□

□□=□□□ □□

□□=4 7 7

SS□=1 1 2 1 9 8 4 3

□□□□=2 0 0 3 □ 1 1 □□ 1 □

11

11

--	--	--	--

--

[illegible][illegible][illegible]



[illegible]






Four empty rectangular boxes arranged horizontally, intended for the student to write their answers to the questions.








[illegible]

A crossword puzzle grid is shown. The grid is 15 squares wide and 25 squares high. The starting letter 'n' is located in the white square at row 1, column 10. The grid is composed of black and white squares, with the letter 'n' in the white square at row 1, column 10.

□ □ □ □  
                  □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □  
                  □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □  
                  □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □  
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □  
                  □ □ □ □  
                  □ □ □ □  
                  □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □  
□ □ □       □ □ □ □ □       □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □  
                  □ □ □ □  
                  □ □ □ □  
                  □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □  
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □  
                  □ □ □ □  
                  □ □ □ □  
                  □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □  
□ □ □       □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □  
                  □ □ □ □  
                  □ □ □ □  
                  □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □